

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GUSTAVO COLONNETTI

**De l'équilibre des systèmes élastiques dans lesquels se
produisent des déformations plastiques**

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 17, n° 1-4 (1938), p. 233-255.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1938_9_17_1-4_233_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*De l'équilibre des systèmes élastiques dans lesquels
se produisent des déformations plastiques;*

PAR GUSTAVO COLONNETTI.

Histoire et position du problème.

Dans quelques Mémoires présentés à la « R. Accademia dei Lincei » et à la « R. Accademia delle Scienze di Torino » il y a plusieurs années, je tâchais de mettre au point une théorie générale des coactions élastiques.

Mon but était alors bien défini : il s'agissait précisément de résoudre à propos de l'état naturel (état d'équilibre d'un système élastique sur lequel n'agit aucune force extérieure) un problème parfaitement analogue à celui que le théorème de Menabrea permet de résoudre dans le cas classique où les forces extérieures sont données.

A cette occasion je parvins à définir une fonction qui, quand les tensions intérieures sont celles qui caractérisent l'état naturel, passe par un minimum comparativement à toutes les valeurs que cette fonction pourrait prendre en compatibilité avec les déformations imposées et les lois de l'équilibre.

Si les tensions intérieures peuvent être exprimées linéairement en fonction de k paramètres indépendants (inconnues hyperstatiques), le problème se réduit ainsi à la résolution d'un système de k équations linéaires et non homogènes entre ces k paramètres.

Dans ces équations les déformations imposées représentaient naturellement les données du problème. Ce qui était, sous un certain aspect, le point faible de mon étude, au moins dans le sens qu'il en réduisait de beaucoup les possibilités d'application pratiques.

On rencontre en effet, dans ces applications, très peu de cas dans lesquels les déformations imposées soient effectivement connues. De plus parmi ces cas le plus important est celui dans lequel ces déformations se présentent comme la conséquence de certains changements de température : problème particulier celui-ci, dont la solution était déjà connue depuis longtemps.

Nous allons revenir à présent sur la question pour démontrer que les mêmes équations, convenablement interprétées, peuvent aussi conduire à la solution d'un autre problème : celui où les déformations imposées se produisent automatiquement à l'instant même de l'application des forces extérieures, du fait que, dans quelque partie du système, les limites d'élasticité des matériaux étant atteintes, se produisent les premières déformations plastiques.

*
* *

Il faut ici avant tout réduire le phénomène à un schéma suffisamment simple, et plus précisément fixer d'une manière exacte comment se présentent les déformations plastiques.

Pour cela le moyen le plus naturel est celui de postuler l'existence d'une limite de la sollicitation, ou de la déformation correspondante⁽¹⁾, limite qui fixe le point où chaque matériau passe tout à coup de l'état élastique à l'état plastique : c'est-à-dire une limite au-dessous de laquelle les déformations se maintiennent parfaitement élastiques (et conformes à la classique loi de Hooke) et en correspondance de laquelle se produisent, sous charge constante, des déformations exclusivement plastiques. Celles-ci, nous l'admettons, en se superposant au phénomène élastique, n'exercent aucune influence sur ses caractéristiques et en particulier sur son aptitude à disparaître lorsque cessent d'agir les causes qui l'ont produit.

On peut observer qu'à la rigueur il n'y a pas de matériau qui satis-

(1) Rapporter la limite à la sollicitation ou bien à la déformation c'est au fond la même chose, si l'on tient compte que la sollicitation peut être, selon les cas, mesurée par les composantes de tension ou bien par celles que depuis Winkler on convient d'appeler les *tensions idéales*.

fasse à de telles conditions. En pratique on ne rencontre jamais ni des déformations parfaitement élastiques, ni des déformations parfaitement plastiques, mais seulement des déformations dans lesquelles prévaut l'une ou l'autre des deux caractéristiques. Les différentes limites d'élasticité ou d'écoulement, avec lesquelles les techniciens tâchent de caractériser la façon de se comporter des différents matériaux ne sont, à tout prendre, que de simples conventions qui se proposent de délimiter pour chaque cas les domaines des valeurs dans lesquelles l'un des aspects du phénomène (aux effets pratiques et dans les limites d'approximation dont la pratique se contente) peut être négligé par rapport à l'autre.

Il faut toutefois ajouter qu'il y a des matériaux, de très large emploi dans les constructions, l'acier doux, par exemple, dont la façon de se comporter s'approche si sensiblement des conditions théoriques ci-dessus énoncées, que celles-ci leur peuvent venir appliquées avec une approximation plus que suffisante pour tous les besoins de la technique.

S'il arrive, dans ces conditions, que, à l'instant de l'application des forces extérieures, les tensions atteignent quelque part les limites d'élasticité, il faut sans plus admettre que ces tensions cessent immédiatement de s'accroître, et que des déformations plastiques commencent à se produire.

Ces déformations plastiques ne s'arrêteront à leur tour que lorsque le système rejoindra un état d'équilibre compatible, non seulement avec les valeurs données des forces extérieures, mais aussi avec les valeurs (désormais déjà fixes et bien connues) que les tensions intérieures ont acquises dans ces parties du système.

De nouvelles inconnues se sont ainsi introduites. Selon la terminologie que nous avons adoptée lors de nos premiers travaux, nous continuerons à les nommer *déformations imposées*.

En revanche il faut remarquer qu'au même temps un égal nombre des inconnues primitives du problème a disparu (dans le sens que ces inconnues ont acquis des valeurs connues) : ce sont les tensions intérieures correspondantes.

Or l'état d'équilibre, dont nous avons parlé tout à l'heure, se peut toujours définir en imposant qu'une certaine fonction, somme algébrique du potentiel élastique et du potentiel des déformations impo-

sées, passe par un minimum comparativement à toutes les valeurs que cette fonction pourrait prendre en compatibilité avec les déformations imposées et les lois de l'équilibre.

Et les k équations dans lesquelles cette condition de minimum se résout, sont linéaires et non homogènes, non seulement dans les k paramètres de l'état de tension (inconnues hyperstatiques), mais aussi dans les caractéristiques de l'état de coaction (paramètres en fonction desquels dans chaque cas particulier on peut exprimer linéairement les déformations imposées).

Si h des inconnues hyperstatiques sont données (dans le sens qu'on puisse leur attribuer des valeurs connues) les mêmes équations pourront évidemment être utilisées pour déterminer, avec les $k-h$ inconnues hyperstatiques restantes, h caractéristiques de l'état de coaction qui seront en conséquence restées indéterminées.

*
* *

Dans le cas où le matériau ne présente pas une limite d'écoulement bien marquée, ou que pour toute autre raison sa manière de se comporter s'éloigne trop du schéma que nous avons proposé tout à l'heure, on peut construire un schéma plus adhérent à la réalité en postulant qu'au-dessus de la limite d'élasticité les déformations élastiques continuent à se produire (toujours selon la loi de Hooke), mais qu'elles soient accompagnées par des déformations plastiques qui, dans une première approximation, pourront toujours être considérées elles aussi comme des fonctions linéaires de la sollicitation.

Dans les k équations qui caractérisent l'état d'équilibre, les k inconnues hyperstatiques apparaîtront alors non seulement dans les expressions des tensions intérieures mais aussi dans celles des déformations imposées.

En définitive le résultat ne différera pourtant en aucune manière de celui auquel nous avons abouti auparavant; en effet, la résolution de ces équations, toujours linéaires et non homogènes, par rapport aux inconnues hyperstatiques, nous conduira implicitement à la détermination simultanée des caractéristiques de l'état de coaction qui sont maintenant des fonctions de ces inconnues.

*
* *

Or, c'est précisément sur ce résultat que je voudrais particulièrement retenir l'attention du lecteur.

Car c'est, selon moi, un fait d'extrême importance que l'on puisse déterminer, en même temps que l'état de tension, les déformations imposées quand celles-ci consistent en déformations plastiques, conséquences d'un dépassement des limites d'élasticité des matériaux.

Je dis cela non seulement pour la raison, absolument intuitive, que ce fait nous permet de passer tout de suite, si nous le désirons, à l'identification du nouvel état d'équilibre (état naturel) auquel le système tend à revenir quand on supprime toute force extérieure.

Mais je dis cela surtout parce qu'une nouvelle et très intéressante possibilité nous est ainsi offerte : celle de connaître la mesure des déformations plastiques qui doivent se produire pour que l'état d'équilibre puisse se réaliser; ce qui est fondamental au point de vue de la détermination des marges de sécurité que le système peut encore offrir dans son nouvel état.

Tous ceux qui s'occupent aujourd'hui de la mécanique appliquée aux constructions savent en effet que les phénomènes du genre de celui que j'ai cherché ici de décrire et d'analyser, se vérifient dans la pratique non seulement en conséquence d'accroissements exceptionnels et imprévus des charges, mais aussi à la suite de l'adoption volontaire de dimensions que, d'après la théorie classique de l'élasticité, on jugerait insuffisantes.

C'est une méthode que les constructeurs les plus hardis et les mieux doués d'intuition adoptent souvent pour réaliser une meilleure utilisation des matériaux employés, se traduisant en définitive par une économie.

Si l'on tient compte qu'une très longue et sûre expérience est désormais à notre disposition, qui tend à mettre hors de doute le solide fondement, et par conséquent la légitimité de ces hardiesses, on ne tardera pas à se convaincre de l'importance du problème et des bonnes raisons qui ont conduit dans ces dernières années beaucoup d'auteurs de tous les pays à chercher à le résoudre au moins dans les cas particuliers les plus simples et les plus caractéristiques.

Mon but actuel est de soumettre ces hardiesses aux règles d'un calcul absolument rigoureux et tout à fait général, capable de déterminer exactement dans quelle mesure on peut y avoir recours sans pour cela réduire trop fortement les marges de sécurité qu'une construction doit toujours présenter.

Ci-après nous établirons des formules générales, et en exposerons les développements analytiques, pour aboutir ensuite à quelques exemples très simples qui serviront à mettre en évidence, soit l'importance théorique des nouveaux points de vue, soit l'intérêt pratique des applications

Démonstration des formules générales et leur développement analytique

Considérons un solide élastique; soient V l'espace (connexe) qu'il occupe et S la surface, ou l'ensemble de surfaces, qui limite cet espace.

Nous allons supposer que ce solide soit passé d'un état initial non déformé à l'état d'équilibre défini par un système donné de forces extérieures, et que les composantes u, v, w des déplacements de ses points qui caractérisent ce passage, soient des fonctions continues et uniformes des coordonnées, très petites par rapport aux dimensions du solide, et dont les dérivées partielles du premier ordre soient elles aussi continues, uniformes et très petites par rapport à l'unité.

Nous allons supposer encore que ce passage soit le résultat d'une déformation élastique ayant pour composantes

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy},$$

et d'une déformation plastique (déformation imposée) ayant pour composantes

$$\bar{\varepsilon}_x, \bar{\varepsilon}_y, \bar{\varepsilon}_z, \bar{\gamma}_{yz}, \bar{\gamma}_{zx}, \bar{\gamma}_{xy}.$$

Nous aurons alors les relations

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon_x + \bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{yz} + \bar{\gamma}_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \varepsilon_y + \bar{\varepsilon}_y = \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{zx} + \bar{\gamma}_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \varepsilon_z + \bar{\varepsilon}_z = \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{xy} + \bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{array} \right.$$

Soit φ l'énergie potentielle élastique élémentaire, fonction homogène du second degré, essentiellement positive, des composantes de tension

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$$

en fonction desquelles les composantes de la déformation élastique peuvent toujours être exprimées au moyen des relations linéaires

$$(2) \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_x}, & \varepsilon_y = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_y}, & \varepsilon_z = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_z}, \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{yz}}, & \gamma_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{zx}}, & \gamma_{xy} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{xy}}. \end{cases}$$

Dans ces conditions nous nous proposons de déterminer quelle variation peut subir l'énergie potentielle élastique totale

$$\Phi = \int_V \varphi(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}) dV,$$

lorsqu'aux variables

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$$

on attribue des variations très petites

$$\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \delta\sigma_z, \delta\tau_{yz}, \delta\tau_{zx}, \delta\tau_{xy}$$

qui soient compatibles avec la déformation imposée et avec les lois de l'équilibre.

Cette dernière condition, à savoir la compatibilité des variations avec les lois de l'équilibre pour le système donné de forces extérieures, exige évidemment que soient satisfaites les équations

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial(\delta\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\tau_{zx})}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\sigma_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial(\delta\tau_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\sigma_z)}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \delta\sigma_x \cos(n, x) + \delta\tau_{xy} \cos(n, y) + \delta\tau_{zx} \cos(n, z) = 0, \\ \delta\tau_{xy} \cos(n, x) + \delta\sigma_y \cos(n, y) + \delta\tau_{yz} \cos(n, z) = 0, \\ \delta\tau_{zx} \cos(n, x) + \delta\tau_{yz} \cos(n, y) + \delta\sigma_z \cos(n, z) = 0, \end{cases}$$

dans tout l'espace occupé par le solide, et sur toute la surface qui le limite, n étant comme d'habitude la normale à cette surface en un point quelconque, dirigée vers l'intérieur de l'espace.

Si l'on tient compte que φ est du second degré, on peut immédiatement écrire

$$\begin{aligned}\delta\Phi &= \int_V \varphi(\sigma_x + \delta\sigma_x, \sigma_y + \delta\sigma_y, \dots, \tau_{xy} + \delta\tau_{xy}) dV \\ &\quad - \int_V \varphi(\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}) dV \\ &= \int_V \left[\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_x} \delta\sigma_x + \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_y} \delta\sigma_y + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_{xy}} \delta\tau_{xy} \right] dV \\ &\quad + \int_V \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma_x^2} \delta\sigma_x^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma_x\partial\sigma_y} \delta\sigma_x\delta\sigma_y + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_{xy}^2} \delta\tau_{xy}^2 \right] dV.\end{aligned}$$

Mais l'intégrale des termes du second ordre n'est autre que la fonction

$$\int_V \varphi(\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \dots, \delta\tau_{xy}) dV$$

qui est essentiellement positive, et négligeable par rapport à l'intégrale qui précède

La variation cherchée s'écrira donc plus simplement ainsi

$$\delta\Phi = \int_V (\varepsilon_x \delta\sigma_x + \varepsilon_y \delta\sigma_y + \varepsilon_z \delta\sigma_z + \gamma_{yz} \delta\tau_{yz} + \gamma_{zx} \delta\tau_{zx} + \gamma_{xy} \delta\tau_{xy}) dV.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\int_V \varepsilon_x \delta\sigma_x dV &= \int_V \frac{\partial u}{\partial x} \delta\sigma_x dV - \int_V \bar{\varepsilon}_x \delta\sigma_x dV \\ &= \int_V \frac{\partial}{\partial x} (u \delta\sigma_x) dV - \int_V u \frac{\partial(\delta\sigma_x)}{\partial x} dV - \int_V \bar{\varepsilon}_x \delta\sigma_x dV \\ &= - \int_S u \delta\sigma_x \cos(n, x) dS - \int_V u \frac{\partial(\delta\sigma_x)}{\partial x} dV - \int_V \bar{\varepsilon}_x \delta\sigma_x dV\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \int_V \bar{\gamma}_{yz} \delta \tau_{yz} dV &= \int_V \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta \tau_{yz} dV - \int_V \bar{\gamma}_{yz} \delta \tau_{yz} dV \\
 &= \int_V \left[\frac{\partial}{\partial y} (w \delta \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (v \delta \tau_{yz}) \right] dV \\
 &\quad - \int_V \left[w \frac{\partial (\delta \tau_{yz})}{\partial y} + v \frac{\partial (\delta \tau_{yz})}{\partial z} \right] dV - \int_V \bar{\gamma}_{yz} \delta \tau_{yz} dV \\
 &= - \int_S [w \delta \tau_{yz} \cos(n, y) + v \delta \tau_{yz} \cos(n, z)] dS \\
 &\quad - \int_V \left[w \frac{\partial (\delta \tau_{yz})}{\partial y} + v \frac{\partial (\delta \tau_{yz})}{\partial z} \right] dV - \int_V \bar{\gamma}_{yz} \delta \tau_{yz} dV.
 \end{aligned}$$

On obtient alors, en opérant ces substitutions et en ordonnant

$$\begin{aligned}
 \delta \Phi &= - \int_V [\bar{\varepsilon}_x \delta \sigma_x + \bar{\varepsilon}_y \delta \sigma_y + \bar{\varepsilon}_z \delta \sigma_z + \bar{\gamma}_{yz} \delta \tau_{yz} + \bar{\gamma}_{zx} \delta \tau_{zx} + \bar{\gamma}_{xy} \delta \tau_{xy}] dV \\
 &\quad - \int_V \left\{ \left[\frac{\partial (\delta \sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\delta \tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial (\delta \tau_{zx})}{\partial z} \right] u \right. \\
 &\quad \quad + \left[\frac{\partial (\delta \tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (\delta \sigma_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\delta \tau_{yz})}{\partial z} \right] v \\
 &\quad \quad \left. + \left[\frac{\partial (\delta \tau_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial (\delta \tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial (\delta \sigma_z)}{\partial z} \right] w \right\} dV \\
 &\quad - \int_S \{ [\delta \sigma_x \cos(n, x) + \delta \tau_{xy} \cos(n, y) + \delta \tau_{zx} \cos(n, z)] u \\
 &\quad \quad + [\delta \tau_{xy} \cos(n, x) + \delta \sigma_y \cos(n, y) + \delta \tau_{yz} \cos(n, z)] v \\
 &\quad \quad + [\delta \tau_{zx} \cos(n, x) + \delta \tau_{yz} \cos(n, y) + \delta \sigma_z \cos(n, z)] w \} dS.
 \end{aligned}$$

Dans cette expression, toutes les fois que les équations (3) et (4) sont satisfaites, les deux dernières intégrales sont identiquement nulles quelles que soient les valeurs de u , v , w .

Reste à considérer la première intégrale, dans laquelle les

$$\bar{\varepsilon}_x, \quad \bar{\varepsilon}_y, \quad \bar{\varepsilon}_z, \quad \bar{\gamma}_{yz}, \quad \bar{\gamma}_{zx}, \quad \bar{\gamma}_{xy}$$

doivent être regardées comme des constantes, puisque nous nous sommes proposé d'étudier seulement les variations de Φ compatibles avec les valeurs des composantes de la déformation imposée.

On aura donc

$$\delta \Phi = - \delta \int_V [\bar{\varepsilon}_x \sigma_x + \bar{\varepsilon}_y \sigma_y + \bar{\varepsilon}_z \sigma_z + \bar{\gamma}_{yz} \tau_{yz} + \bar{\gamma}_{zx} \tau_{zx} + \bar{\gamma}_{xy} \tau_{xy}] dV,$$

ou bien, ce qui est équivalent,

$$\delta \left[\Phi + \int_V (\bar{\varepsilon}_x \sigma_x + \bar{\varepsilon}_y \sigma_y + \bar{\varepsilon}_z \sigma_z + \bar{\gamma}_{yz} \tau_{yz} + \bar{\gamma}_{zx} \tau_{zx} + \bar{\gamma}_{xy} \tau_{xy}) dV \right] = 0,$$

et l'on pourra conclure que *les tensions intérieures qui caractérisent l'état d'équilibre sont telles que l'expression*

$$\Phi + \int_V (\bar{\varepsilon}_x \sigma_x + \bar{\varepsilon}_y \sigma_y + \bar{\varepsilon}_z \sigma_z + \bar{\gamma}_{yz} \tau_{yz} + \bar{\gamma}_{zx} \tau_{zx} + \bar{\gamma}_{xy} \tau_{xy}) dV$$

passé par un minimum comparativement à toutes les valeurs que cette même expression pourrait prendre en compatibilité avec la déformation imposée et avec les forces extérieures appliquées.

Supposons :

*
* *

1° Que l'on puisse faire correspondre les différents états de tension compatibles avec les forces extérieures, aux différents systèmes de valeurs de k paramètres indépendants (inconnues hyperstatiques)

$$X_1, X_2, \dots, X_k,$$

et cela biunivoquement et linéairement; c'est-à-dire que l'on puisse exprimer les composantes de tension sous la forme de fonctions linéaires de ces k paramètres;

2° Que l'on puisse caractériser la déformation imposée au moyen d'un certain nombre $k' \leq k$ de paramètres indépendants (paramètres de l'état de coaction), et cela biunivoquement et linéairement; c'est-à-dire que l'on puisse exprimer les composantes de la déformation imposée sous la forme de fonctions linéaires de ces k' paramètres.

Dans cette double hypothèse, qui se vérifie naturellement dans tous les cas particuliers les plus intéressants dans la pratique, la con-

dition de minimum que nous venons d'établir se traduit dans les k équations

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial X_1} \left[\Phi + \int_V (\bar{\varepsilon}_x \sigma_x + \bar{\varepsilon}_y \sigma_y + \dots + \bar{\gamma}_{xy} \tau_{xy}) dV \right] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial X_2} \left[\Phi + \int_V (\bar{\varepsilon}_x \sigma_x + \bar{\varepsilon}_y \sigma_y + \dots + \bar{\gamma}_{xy} \tau_{xy}) dV \right] = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{\partial}{\partial X_k} \left[\Phi + \int_V (\bar{\varepsilon}_x \sigma_x + \bar{\varepsilon}_y \sigma_y + \dots + \bar{\gamma}_{xy} \tau_{xy}) dV \right] = 0, \end{cases}$$

qui sont linéaires et non homogènes entre les k paramètres de l'état de tension et les k' paramètres de la déformation imposée.

Ces équations pourront donc, en général, être utilisées pour déterminer k quelconques entre ces $k + k'$ paramètres, en fonction des autres k' ; ou, plus généralement encore, pour les déterminer tous, s'il arrive qu'entre eux on puisse ultérieurement établir d'autres relations linéaires au nombre de k' .

Or c'est précisément ce qui se vérifie, soit dans le cas contemplé dans mes premières études sur les coactions, où les k' paramètres de la déformation imposée étaient donnés (ou considérés tels), soit dans les deux cas que nous avons choisis comme schématisations possibles du phénomène des déformations plastiques : en effet, dans le premier de ces cas k paramètres de la déformation imposée deviennent inconnus pendant qu'un égal nombre de paramètres de l'état de tension acquiert des valeurs connues; dans le second ceux des paramètres de la déformation imposée qui ne sont pas connus peuvent être exprimés comme des fonctions linéaires des paramètres de l'état de tension.

Cas particulier des poutres en treillis.

Dans le cas particulier des poutres en treillis la fonction qui, pour l'état d'équilibre, doit passer par un minimum prend la forme

$$\Phi + \sum \bar{s} S,$$

où S et $\bar{s}$ représentent respectivement les efforts qui, pour l'état d'équi-

libre considéré, s'exercent dans les barres, et les correspondantes variations de longueur imposées.

Soit k le nombre des barres surabondantes (degré d'hyperstaticité du système). Prenons les efforts

$$X_1, X_2, \dots, X_k$$

qui s'exercent dans ces barres comme inconnues hyperstatiques.

L'effort dans une barre quelconque pourra toujours s'écrire

$$(6) \quad S = S_p + S_1 X_1 + S_2 X_2 + \dots + S_k X_k$$

en représentant par S_p l'effort qui correspond à cette barre dans la poutre principale, supposée soumise au système donné de forces extérieures, et par

$$S_1, S_2, \dots, S_k$$

les efforts qui dans la même barre seraient déterminés par les conditions fictives de charge

$$X_1=1, \quad X_2=1, \quad \dots, \quad X_k=1.$$

Nous désignerons par :

l , la longueur d'une barre quelconque,

A , l'aire de sa section droite,

E , le module d'élasticité normale du matériau dont elle est constituée, et par suite

$$(7) \quad s = \frac{Sl}{EA},$$

la variation élastique de longueur qu'elle subit sous l'action de l'effort S .

Les k équations qui traduisent la condition de minimum

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial X_1} [\Phi + \Sigma \bar{s} S] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial X_2} [\Phi + \Sigma \bar{s} S] = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{\partial}{\partial X_k} [\Phi + \Sigma \bar{s} S] = 0 \end{cases}$$

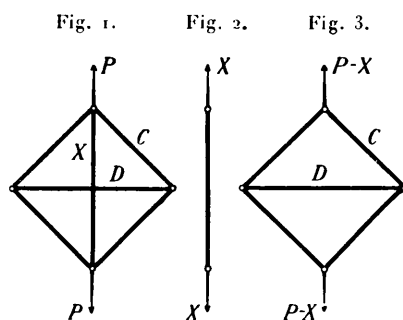
peuvent alors très simplement s'écrire

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma(s + \bar{s}) \frac{\partial S}{\partial X_1} = 0, \\ \Sigma(s + \bar{s}) \frac{\partial S}{\partial X_2} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \Sigma(s + \bar{s}) \frac{\partial S}{\partial X_k} = 0. \end{array} \right.$$

Nous allons maintenant en faire l'application à un exemple très simple qui nous permettra d'interpréter plus facilement les résultats.

Supposons de faire supporter un effort de traction verticale P à un cadre hyperstatique tel que celui représenté à la figure 1.

Un tel cadre peut être évidemment considéré comme formé par l'ensemble d'une barre verticale (*fig. 2*) et d'un quadrilatère à diagonale horizontale (*fig. 3*).



Nous considérerons ce quadrilatère comme poutre principale, en adoptant la diagonale verticale comme barre surabondante, et l'effort correspondant X comme inconnue hyperstatique.

En supposant les deux diagonales égales, et désignant par l leur longueur, et par A l'aire de leur section droite, nous donnerons aux quatre barres périmétrales, de longueur égale à $\frac{l}{\sqrt{2}}$, des sections droites ayant une aire égale à $\frac{A}{\sqrt{2}}$.

Soient C et D respectivement les efforts dans les barres périmétrales et dans la diagonale horizontale.

La statique des systèmes rigides nous donne

$$(10) \quad C = \frac{P - X}{\sqrt{2}}, \quad D = -(P - X),$$

et par suite

$$(11) \quad \frac{\partial C}{\partial X} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\partial D}{\partial X} = 1,$$

tandis que la théorie que nous venons d'exposer nous conduit à une équation du type

$$(12) \quad \Sigma(s + \bar{s}) \frac{\partial S}{\partial X} = 0.$$

Si l'on suppose tout d'abord que toutes les variations imposées s soient nulles, nous plaçant ainsi du point de vue de la théorie classique de l'élasticité, l'équation devient

$$X \frac{l}{EA} + 4 \frac{P - X}{\sqrt{2}} \frac{\frac{l}{\sqrt{2}}}{E \frac{A}{\sqrt{2}}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - (P - X) \frac{l}{EA} = 0.$$

On en tire

$X = \frac{3}{4} P, \quad C = \frac{1}{4} \frac{P}{\sqrt{2}}, \quad D = -\frac{1}{4} P.$
--

Remarquons que cette solution n'est pas très satisfaisante puisqu'elle révèle une faible participation du quadrilatère à la résistance de l'ensemble, et une utilisation seulement partielle des caractéristiques mécaniques du matériau employé.

Remarquons encore que l'on pourrait bien, si on le voulait, augmenter *ad libitum* la fraction de charge supportée par le quadrilatère, et décharger par suite la diagonale verticale.

Pour obtenir ce résultat il faudrait évidemment accroître la rigidité du quadrilatère en adoptant pour ses barres de plus fortes sections.

Cependant le degré d'utilisation des caractéristiques mécaniques du matériau ne s'améliore pas pour cela, et en conséquence l'économie réalisable en réduisant la section de la diagonale verticale ne compense

pas le surplus du matériau que l'on devrait employer dans la construction du quadrilatère.

Cette solution n'est donc en aucun cas économique.

On obtient par contre une solution économique en s'efforçant de créer dans le système un état de coaction convenable.

La façon la plus simple pour l'obtenir sera celle de provoquer une déformation plastique de la barre surabondante.

Supposons en effet que la section A de cette barre ait été choisie de façon que, quand l'effort extérieur atteindra la valeur

$$P' = \frac{2}{3} P,$$

de sorte que dans la barre s'exerce l'effort

$$X' = \frac{3}{4} P' = \frac{1}{2} P$$

le matériau parvienne dans cette barre à sa limite d'élasticité.

Il est entendu que, si nous adoptons les conventions précédemment énoncées, à partir de cet instant, c'est-à-dire pendant que l'effort extérieur continuera à augmenter de P' à P , l'effort dans la barre ne pourra plus s'accroître, mais restera définitivement fixé à la valeur $\frac{1}{2} P$.

La barre subira ainsi une variation plastique de longueur $\bar{s}$ grâce à laquelle on pourra également atteindre l'équilibre quand l'équation (12)

$$\Sigma(s + \bar{s}) \frac{\partial S}{\partial X} = 0$$

sera vérifiée.

Dans le cas considéré, dans lequel toutes les autres $\bar{s}$ continuent d'être nulles, cette équation devient

$$\left(X \frac{l}{EA} + \bar{s} \right) 1 + \frac{1}{4} \frac{P - X}{\sqrt{2}} \frac{\frac{l}{\sqrt{2}}}{\frac{A}{E \sqrt{2}}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - (P - X) \frac{l}{EA} = 0.$$

Si l'on attribue à X sa valeur $\frac{1}{2} P$ on tire de cette équation

$$(13) \quad \bar{s} = P \frac{l}{EA}.$$

Quant aux efforts dans les autres barres, ils augmenteront pendant ce temps jusqu'à atteindre les valeurs

$$X = \frac{1}{2} P, \quad C = \frac{1}{2} \frac{P}{\sqrt{2}}, \quad D = -\frac{1}{2} P.$$

Dans les nouvelles conditions d'équilibre ainsi réalisées, le quadrilatère a effectivement absorbé la moitié de la charge, et la résistance des matériaux est partout pleinement utilisée.

A l'expression (13) on aura recours quand on voudra remonter à l'état naturel (c'est-à-dire à l'état d'équilibre en l'absence de toute force extérieure) indépendamment du principe de superposition.

Pour caractériser cet état on partira encore une fois de l'équation (12)

$$\Sigma(s + \bar{s}) \frac{\partial S}{\partial X} = 0,$$

dans laquelle on donnera aux efforts dans les barres et à leurs dérivées les valeurs que les formules (10) et (11) prennent en y supposant $P = 0$.

Compte tenu de la valeur (13) de la déformation plastique, l'équation que nous avons rappelée devient en effet

$$\left(X \frac{l}{EA} + P \frac{l}{EA} \right) - 4 \frac{X}{\sqrt{2}} \frac{\frac{l}{\sqrt{2}}}{E \frac{A}{\sqrt{2}}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + X \frac{l}{EA} = 0,$$

et il s'en déduit

$$X = -\frac{1}{4} P, \quad C = \frac{1}{4} \frac{P}{\sqrt{2}}, \quad D = -\frac{1}{4} P.$$

Cependant, comme nous l'avons déjà remarqué en son temps, nous pouvons faire un emploi encore plus important de l'expression (13).

Elle peut en effet nous servir pour lever le doute, qui pourrait surgir dans chaque problème particulier, à propos des conséquences

que la déformation plastique imposée à la diagonale verticale pourrait avoir sur le matériau qui la subit.

L'expression (13) nous donne en effet la mesure de cette déformation, et nous permet, dans chaque cas particulier, de nous faire une idée de son importance par rapport aux déformations que le matériau employé peut effectivement supporter avant de se rompre.

Dans le cas considéré ci-dessus, le fait que la déformation plastique définie par (13) soit du même ordre de grandeur que les déformations élastiques, et précisément égale à la déformation que la barre en question subirait si, en restant parfaitement élastique, elle devait supporter seule l'entière charge P , doit être certainement considéré comme très rassurant.

Pourtant une appréciation des marges de sécurité de l'ensemble ne pourra être faite qu'en tenant compte de la façon dont le matériau se comporte quand la charge continue à s'accroître.

En fait, si après la période dite d'écoulement (pendant laquelle les déformations plastiques se produisent sous charge pratiquement constante) le matériau présente, comme il arrive souvent, une reprise de résistance nette et assez considérable, la différence entre la charge de rupture et celle à laquelle l'écoulement s'était produit, pourra suffir à garantir les marges de sécurité nécessaires.

Si au contraire cette reprise de résistance ne se vérifie pas, ou est trop faible (ou si l'on ne veut pas compter sur elle), la charge P à laquelle se rapportent les calculs précédents devra être considérée comme une sorte de charge critique, au delà de laquelle on s'achemine plus ou moins rapidement vers la rupture, et dont il faut en pratique se tenir prudemment éloigné.

Le problème de l'équilibre des arcs très surbaissés.

Voici maintenant un exemple où l'on traite un problème de grande importance pratique : celui de l'équilibre des arcs très surbaissés.

Examinons un arc en treillis, symétrique, à membrure supérieure rectiligne et à membrure inférieure disposée suivant une polygonale inscrite dans un arc de parabole assez tendu (*fig. 4*).

Pour fixer les idées, nous allons convenir que la membrure supérieure a une section droite constante, et que dans la membrure inférieure la section droite varie, en augmentant vers les appuis. Pour préciser nous admettrons que cette section soit égale à celle de la membrure supérieure dans les deux panneaux les plus proches de l'axe, double de cette valeur dans les deux panneaux suivants, triple enfin dans les deux derniers, proches des appuis.

Nous ne nous attarderons pas à préciser les dimensions des treillis qui n'auront le plus souvent qu'une influence négligeable sur ce qui sera dit.

Fig. 4.

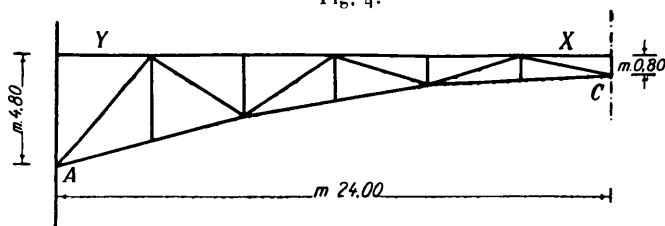


Schéma et dimensions générales du demi-arc de gauche.

La charge étant supposée symétrique, et plus précisément uniformément distribuée sur les nœuds de la membrure supérieure, le système présente un double degré d'hyperstaticité.

On choisit habituellement, en ce cas, comme inconnues hyperstatiques la poussée horizontale H et le moment M dans la section de clé.

On peut alors écrire deux équations du type

$$(14) \quad \begin{cases} \sum (s + \bar{s}) \frac{\partial S}{\partial H} = 0, \\ \sum (s + \bar{s}) \frac{\partial S}{\partial M} = 0. \end{cases}$$

En posant

$$(15) \quad S = S_p + S_h H + S_m M,$$

les équations deviennent

$$(16) \quad \begin{cases} \sum \frac{S_p S_h l}{EA} + H \sum \frac{S_h^2 l}{EA} + M \sum \frac{S_h S_m l}{EA} + \sum \bar{s} S_h = 0, \\ \sum \frac{S_p S_m l}{EA} + H \sum \frac{S_h S_m l}{EA} + M \sum \frac{S_m^2 l}{EA} + \sum \bar{s} S_m = 0. \end{cases}$$

Mais

$$S_p, S_h, S_m$$

sont des efforts statiquement déterminés qui peuvent en conséquence être immédiatement calculés; en général tout se réduit au tracé de trois diagrammes de Cremona.

Cependant, si l'on commence par supposer que les déformations imposées $\bar{s}$ soient toutes nulles, les équations (16) peuvent aussitôt se résoudre par rapport aux inconnues H et M.

En fonction de celles-ci on peut ensuite, au moyen des expressions (15) calculer les efforts dans les différentes barres.

Supposons maintenant que de ce calcul, qui rentre parfaitement dans le domaine de la théorie classique de l'élasticité, résulte que dans une ou deux des barres du système la limite d'élasticité du matériau se trouve être dépassée.

En accord avec nos hypothèses, nous devons alors admettre que, dans ces barres, les efforts ne pourront jamais atteindre les valeurs qu'indique le calcul, mais qu'ils devront s'arrêter aux valeurs qui correspondent aux limites d'élasticité du matériau.

Il faudra se rappeler en outre que, dans ces barres, prendront naissance des déformations plastiques.

Dans une, ou dans deux, des expressions (15) le premier membre deviendra ainsi connu; on pourra s'en servir pour éliminer des équations (16) une, ou bien deux, des inconnues.

Par la suite ces équations pourront être utilisées pour la détermination de la, ou des déformations plastiques.

*
* *

Si l'on sait, *a priori*, dans quelles barres le phénomène peut se produire, il s'en suivra de remarquables simplifications de forme en adoptant, comme inconnues hyperstatiques, les efforts X et Y dans ces barres (*fig. 4*). Ceci équivaut à adopter, comme poutre principale, un arc ayant des rotules à la clé (C) et aux appuis (A).

En posant

$$(15') \quad S = S_p + S_x X + S_y Y,$$

les équations (16) prennent la forme

$$(16') \quad \begin{cases} \sum \frac{S_p S_r l}{EA} + X \sum \frac{S_r^2 l}{EA} + Y \sum \frac{S_x S_y l}{EA} + \sum \bar{s} S_x = 0, \\ \sum \frac{S_p S_y l}{EA} + X \sum \frac{S_x S_y l}{EA} + Y \sum \frac{S_y^2 l}{EA} + \sum \bar{s} S_y = 0. \end{cases}$$

Supposons, pour commencer, qu'en résolvant ces équations par rapport aux inconnues X et Y, les déformations imposées $\bar{s}$ étant toutes nulles, on trouve, pour une de ces inconnues, par exemple pour X, une valeur telle que, dans la barre correspondante, la limite d'élasticité du matériau se trouve être dépassée.

Dans ce cas, à la place de l'inconnue X, on mettra alors dans ces équations une valeur connue que nous désignerons par X_e .

Il y apparaîtra en revanche, comme nouvelle inconnue, une des déformations imposées et précisément la déformation plastique dans la barre en question que nous représenterons par $\bar{s}_x$.

Compte tenu que toutes les autres $\bar{s}$ continuent d'être nulles, et que le coefficient de $\bar{s}_x$ résulte forcément égal à l'unité, les équations (16') pourront s'écrire sous la forme

$$(17) \quad \begin{cases} \sum \frac{S_p S_x l}{EA} + X_e \sum \frac{S_x^2 l}{EA} + Y \sum \frac{S_x S_y l}{EA} + \bar{s}_x = 0, \\ \sum \frac{S_p S_y l}{EA} + X_e \sum \frac{S_x S_y l}{EA} + Y \sum \frac{S_y^2 l}{EA} = 0. \end{cases}$$

La seconde de ces équations pourra aussitôt se résoudre par rapport à Y (seule inconnue hyperstatique restante) et elle déterminera ainsi la distribution des efforts dans le nouvel état d'équilibre.

Après cela, en nous servant de la première équation, nous pourrions calculer la déformation plastique qu'a dû subir, pour qu'on parvienne à cet état d'équilibre, la barre où l'effort a dépassé la limite d'élasticité.

Supposons maintenant que l'effort Y soit lui aussi, tel que dans la barre correspondante la limite d'élasticité se trouve être dépassée.

Remarquons bien qu'une telle circonstance peut déjà résulter des équations (16') en régime de parfaite élasticité, comme elle peut se

produire seulement en second lieu, c'est-à-dire résulter des équations (17) en conséquence de la déformation plastique $\bar{s}_x$.

Dans l'un comme dans l'autre cas on aboutira à la même conclusion : les deux inconnues hyperstatiques X et Y prendront en effet des valeurs connues X_e et Y_e ; cela revient à dire que le système des efforts résultera sans plus statiquement déterminé.

En revanche, en même temps que $\bar{s}_x$, apparaîtra une $\bar{s}_y$, et les nouvelles équations auxquelles se réduisent les (16'), soit

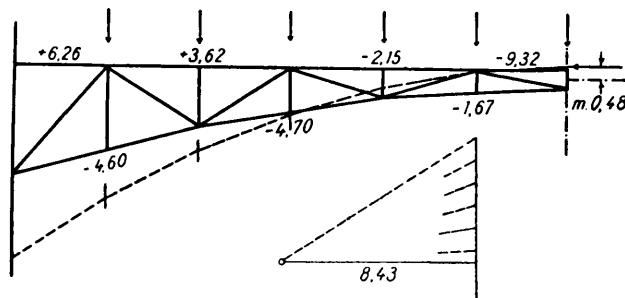
$$(18) \quad \begin{cases} \sum \frac{S_p S_x l}{EA} + X_e \sum \frac{S_x^2 l}{EA} + Y_e \sum \frac{S_x S_y l}{EA} + \bar{s}_x = 0, \\ \sum \frac{S_p S_y l}{EA} + X_e \sum \frac{S_x S_y l}{EA} + Y_e \sum \frac{S_y^2 l}{EA} + \bar{s}_y = 0, \end{cases}$$

pourront être utilisées pour la détermination de ces deux inconnues.

*
* *

Ces calculs ont été développés dans le cas particulier auquel se réfère la figure 4, et les résultats qu'on en a tirés sont indiqués dans les deux figures suivantes.

Fig. 5.



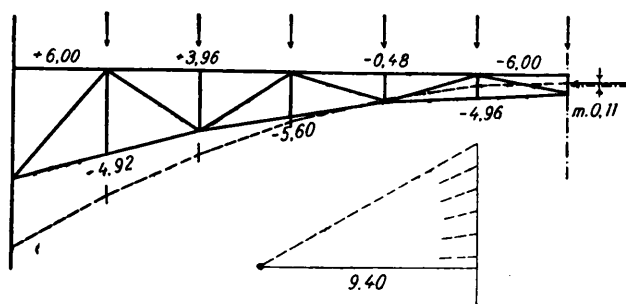
Distribution des efforts et allure de la courbe des pressions dans l'hypothèse de la parfaite élasticité.

La figure 5 se rapporte à l'hypothèse de la parfaite élasticité. On y voit l'allure caractéristique de la courbe des pressions. On y a d'ailleurs marqué à côté de chacune des barres des deux membrures, les valeurs des efforts calculés en prenant comme unité de mesure des forces la charge appliquée en chaque nœud, et rapportés à l'aire de la section droite de la membrure supérieure.

On a ensuite fait l'hypothèse que cette aire soit telle que la limite d'élasticité soit atteinte quand les efforts atteignent une valeur égale à six fois l'unité que nous venons de définir ⁽¹⁾.

A cette hypothèse se rapporte la distribution des efforts indiquée à la figure 6. Dans la même figure nous avons également indiqué la nouvelle allure dans la courbe des pressions.

Fig. 6.



Distribution des efforts et allure de la courbe des pressions réalisables avec l'intervention des deux déformations plastiques :

$$\bar{s}_x = -12,36 \frac{l}{EA},$$

$$\bar{s}_y = +5,08 \frac{l}{EA}.$$

Cette courbe, par l'effet des déformations plastiques intervenues dans les deux barres surabondantes, s'est sensiblement abaissée à la clé et relevée par contre au voisinage des appuis. Elle s'est ainsi rapprochée partout de la ligne moyenne de l'arc, ce qui, au point de vue de l'utilisation des matériaux, amène un bénéfice que les techniciens apprécieront assurément à sa juste valeur ⁽²⁾.

(1) Il est bien entendu que, s'il y a des barres comprimées dans lesquelles doivent se produire des déformations plastiques, leurs dimensions auront été choisies de façon à éviter toute possibilité de flambage.

(2) Des réserves analogues à celles énoncées plus haut devraient naturellement être faites ici, si l'on voulait envisager le problème de la détermination des marges de sécurité. Mais c'est un problème trop important pour être traité brièvement : nous nous proposons d'en faire l'argument d'un autre mémoire.

BIBLIOGRAPHIE.

GUSTAVO COLONNETTI. — *Su certi stati di coazione elastica che non dipendono da azioni esterne* (*Rendiconti R. Accad. dei Lincei*, 5^e série, volume XXVI, 1917).

— *Su di una particolare classe di coazioni elastiche che si incontra nello studio della resistenza delle artiglierie* (*Ibid.*, vol. XXVII, 1918).

— *Una proprietà caratteristica delle coazioni elastiche nei solidi elasticamente omogenei* (*Ibid.*, vol. XXVII, 1918).

— *Sul problema delle coazioni elastiche* (2^e note) (*Ibid.*, vol. XXVII, 1918).

— *Applicazione a problemi tecnici di un nuovo teorema sulle coazioni elastiche* (*Atti R. Accad. delle Scienze, Torino*, vol. LIV, 1918).

— *Per una teoria generale delle coazioni elastiche* (*Ibid.*, vol. LVI, 1921).

— *La statica delle costruzioni* (2 vol.), Torino, Utet, 1928-1932.