

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

SERGE BERNSTEIN

Sur un système d'équations indéterminées

*Journal de mathématiques pures et appliquées 9<sup>e</sup> série*, tome 17, n° 1-4 (1938), p. 179-186.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1938\\_9\\_17\\_1-4\\_179\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1938_9_17_1-4_179_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur un système d'équations indéterminées;*

PAR SERGE BERNSTEIN.

Dans un article, *Sur la formule d'intégration approchée de Tchebycheff*<sup>(1)</sup>, j'ai montré que la formule proposée par Tchebycheff

$$(1) \quad \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (0 \leq x_i \leq 1),$$

ne peut pour aucun choix des valeurs réelles  $x$  être exacte pour tout polynôme de degré  $n$ , lorsque  $n$  est assez grand. Cela signifie, en d'autres termes, que toutes les  $n$  grandeurs  $x_i$  satisfaisant aux  $n$  équations

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n x_i^k = \frac{n}{k+1} \quad (k = 0, \dots, n),$$

ne peuvent pas être réelles. D'ailleurs, dans deux Notes<sup>(2)</sup> récentes, M. Kuzmin a découvert la distribution asymptotique des grandeurs  $x_i$  satisfaisant à (2) pour  $n$  très grand, en étudiant directement le polynôme

$$p_n(x) = \prod_{i=1}^{i=n} (x - x_i).$$

Mais il serait intéressant de déterminer quel est le nombre  $M_n$

(1) *Bull. de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S.*, 1932.

(2) *Comptes rendus*, t. 201, p. 1094, et t. 202, p. 272.

d'équations (2) ( $k \leq M_n$ ) auxquelles il serait possible de satisfaire au moyen de  $n > M_n$  grandeurs réelles  $x_i$ .

Nous nous bornerons ici à établir une limite supérieure (1) du nombre  $M_n$  en fonction de  $n$ . Il en résultera, en particulier, que le degré  $M_n$  des polynômes pour lesquels la formule (1) est exacte ne peut atteindre  $n$ , dès que  $n > 9$ . Dans ce but, je démontrerai d'abord deux théorèmes qui ne sont que des applications ou modifications plus ou moins immédiates d'une proposition due à Tchebycheff.

**THÉORÈME I.** — Si  $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_m$  sont les  $m$  racines du polynôme  $P_m(x)$  de Legendre relatif au segment  $OI$ , et  $\rho_m^{(1)}, \rho_m^{(2)}, \dots, \rho_m^{(m)}$  sont les coefficients de la formule de quadrature mécanique de Gauss

$$(3) \quad \int_0^1 f(x) dx = \sum_1^m \rho_m^{(k)} f(\gamma_k),$$

qui est exacte pour tous les polynômes de degré  $2m - 1$ ; si la formule (1) est exacte pour tous les polynômes de degré  $2m - 2$ , on a

$$(4) \quad \frac{1}{n} S(\gamma_1) \leq \rho_m^{(1)},$$

où  $S(\gamma_1)$  est le nombre de valeurs  $x_i \leq \gamma_1$ .

En effet, construisons le polynôme de degré  $2m - 2$

$$F_{2m-2}(x) = \frac{P_m^2(x)}{(x - \gamma_1)^2 \rho_m^{(1)}(\gamma_1)}$$

qui est déterminé par les conditions que

$$F_{2m-2}(\gamma_1) = 1, \quad F_{2m-2}(\gamma_k) = F'_{2m-2}(\gamma_k) = 0 \quad (k = 2, \dots, m).$$

L'équation  $F'_{2m-2}(x) = 0$  aura alors, outre les  $m - 1$  racines  $\gamma_2, \dots, \gamma_m$  encore  $m - 2$  racines séparant ces grandeurs  $\gamma_k$ , qui sont également racines de  $F_{2m-2}(x) = 0$ . Donc, pour  $x < \gamma_2$ , la fonction  $F_{2m-2}(x)$  est décroissante, car le nombre  $2n - 3$  des racines de  $F'_{2m-2}(x)$  est

(1) J'ai donné une limite inférieure de  $M_n$  dans la Note *Modifications de la formule de quadrature de Tchebycheff* (C. R. Acad. Sc., t. 204, p. 1526.)

épuisé par les racines indiquées plus haut. Par conséquent, on a

$$(5) \quad \begin{cases} F_{2m-2}(x) \geq 1 & \text{pour } x \leq \gamma_1, \\ F_{2m-2}(x) \geq 0 & \text{pour } x > \gamma_1. \end{cases}$$

Or, d'après les conditions du théorème, les formules (1) et (3) étant applicables au polynome  $F_{2m-2}(x)$ , on a

$$\int_0^1 F_{2m-2}(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_{2m-2}(x_i) = \rho_m^{(1)},$$

et en tenant compte des inégalités (5), il en résulte que

$$(4 \text{ bis}) \quad \frac{1}{n} S(\gamma_1) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_{2m-2}(x_i) = \rho_m^{(1)}.$$

Passons ensuite à la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Si la formule*

$$(6) \quad \int_0^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n p_i f(y_i), \quad (n > m),$$

où  $p_i > 0$  est exacte pour tous les polynomes de degré  $2m-2$ , il y a au moins un point  $y_i < \gamma_1$ .

En effet, construisons le polynome

$$R_{2m-1}(x) = \frac{P_m^2}{\left(1 - \frac{x}{\gamma_1}\right) P_m^2(0)}.$$

On aura, évidemment, d'après la formule (6),

$$(7) \quad \int_0^1 R_{2m-1}(x) dx = 0 = \sum_{i=1}^n p_i R_{2m-1}(y_i).$$

Or, on a

$$R_{2m-1}(x) > 0 \quad \text{pour } x < \gamma_1$$

et

$$R_{2m-1}(x) \leq 0 \quad \text{pour } x \geq \gamma_1,$$

le signe d'égalité  $R_{2m-1}(x) = 0$  n'ayant lieu que pour les  $m$  valeurs

$x = \gamma_i (i = 1, \dots, m)$ . Comme, par hypothèse,  $n > m$ , tous les termes de la somme (7) ne sont pas nuls; donc, il y a au moins une valeur  $\gamma_i < \gamma_1$ .

Du théorème II nous concluons que, si la formule (1) est applicable à tous les polynômes de degré  $2m - 1$ , il y a au moins une valeur  $x_i < \gamma_1$ . Donc, à cause de l'inégalité (4) on aura

$$(8) \quad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} S(\gamma_1) \leq \rho_m^{(1)}.$$

D'où résulte le

**THÉORÈME III.** — *Si la formule (1) est valable pour tous les polynômes de degré  $2m - 1$ , on a*

$$(8 \text{ bis}) \quad \rho_m^{(1)} \geq \frac{1}{n}.$$

Appliquons notre théorème aux cas de  $m = 5, 6, 7, 8$ . On a :

$$\frac{1}{9} < \rho_5^{(1)} = 0,11846344 < \frac{1}{8},$$

$$\frac{1}{12} < \rho_6^{(1)} = 0,08566225 < \frac{1}{11},$$

$$\frac{1}{16} < \rho_7^{(1)} = 0,06474248 < \frac{1}{15},$$

$$\frac{1}{20} < \rho_8^{(1)} = 0,05061427 < \frac{1}{19}.$$

De l'inégalité  $\rho_5^{(1)} < \frac{1}{8}$ , nous concluons que la formule de quadrature de Tchebycheff, pour  $n = 8$ , ne peut être applicable aux polynômes de 9° degré; donc, elle ne saurait aussi être applicable aux polynômes de 8° degré, car, à cause de la distribution symétrique des valeurs  $x$  déterminées par les équations (2), l'équation

$$\sum_{i=1}^n x_i^{n+1} = \frac{n}{n+2}$$

en est une conséquence, lorsque  $n$  est pair. On sait, d'ailleurs, par le calcul effectif, que les abscisses de Tchebycheff deviennent complexes pour  $n = 8$ . Pour  $n = 9$ , l'inégalité  $\rho_5^{(1)} > \frac{1}{9}$  confirme que la suppo-

sition  $M_n = 9$  n'est pas contradictoire (le calcul montre qu'elle est vraie).

L'inégalité  $\rho_6^{(1)} < \frac{1}{11}$  prouve que

$$M_{10} < 10, \quad M_{11} < 11;$$

l'inégalité  $\rho_7^{(1)} < \frac{1}{15}$  prouve que

$$M_{12} < 12, \quad M_{13} < 13, \quad M_{14} < 13, \quad M_{15} < 13;$$

l'inégalité  $\rho_8^{(1)} < \frac{1}{19}$  prouve que

$$M_{16} < 15, \quad M_{17} < 15, \quad M_{18} < 15, \quad M_{19} < 15.$$

Pour montrer que l'on a

$$(9) \quad M_n < n,$$

à partir de  $n > 9$ , il nous suffira donc à présent d'établir l'inégalité

$$(10) \quad M_n < \pi n \sin \frac{2\pi}{M_n + 1},$$

valable pour toute valeur de  $n > 0$ , puisqu'on a

$$\pi \sin \frac{2\pi}{M_n + 1} < \frac{2\pi^2}{M_n + 1} < 1,$$

lorsque  $M_n \geq 19$ , et le cas de  $n \leq 19$  vient d'être examiné directement.

L'inégalité (10) est une conséquence d'une inégalité correspondante, concernant la valeur  $\rho_m^{(1)}$  dans l'inégalité (8 bis). Dans ce but nous observons que

$$\rho_m^{(1)} = \frac{1}{2} \rho_m,$$

où  $\rho_m$  est le coefficient correspondant à la plus grande racine  $\xi$ , du polynome  $R_m(x)$  de Legendre dans la formule de quadrature mécanique relative au segment  $(-1, +1)$ .

On sait que

$$\rho_m = \frac{2}{(1 - \xi_1^2) R_m'(\xi_1)},$$

donc

$$(11) \quad \rho_m^{(1)} = \frac{1}{(1 - \xi_1^2) R_m'(\xi_1)},$$

où  $R'_m(x)$  est la dérivée du polynôme de Legendre de degré  $m$ , relatif au segment  $(-1, +1)$ .

Posons

$$(12) \quad (1-x^2)^{\frac{1}{2}} R_m(x) = f_m(x);$$

il est aisé de vérifier que  $f_m(x) = f_m(\cos \theta)$  satisfait à l'équation différentielle

$$(13) \quad \frac{d^2 f_m}{d\theta^2} + \frac{1}{\lambda_m^2} f_m = 0,$$

où

$$(14) \quad \lambda_m^2 = \frac{1-x^2}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 (1-x^2) + \frac{1}{4}}.$$

Pour obtenir une limite inférieure de  $\zeta_m^{(1)}$  nous reproduirons sous une forme particulière les résultats de mon Mémoire : *Sur les polynômes orthogonaux relatifs à un segment fini* <sup>(1)</sup>. Formons la fonction

$$(15) \quad u(x) = f_m^2 + \lambda_m^2 \left(\frac{df_m}{d\theta}\right)^2.$$

En tenant compte de (13), nous aurons

$$\frac{du}{d\theta} = 2f_m \frac{df_m}{d\theta} + 2\lambda_m^2 \frac{df_m}{d\theta} \cdot \frac{d^2 f_m}{d\theta^2} + 2\lambda \frac{d\lambda}{d\theta} \left(\frac{df_m}{d\theta}\right)^2 = \frac{d\lambda_m^2}{d\theta} \cdot \left(\frac{df_m}{d\theta}\right)^2,$$

d'où

$$(16) \quad \frac{du}{dx} = \frac{d\lambda_m^2}{dx} \left(\frac{df_m}{d\theta}\right)^2 = - \frac{x}{2 \left[ \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 (1-x^2) + \frac{1}{4} \right]^2} \left(\frac{df_m}{d\theta}\right)^2.$$

Donc,  $u(x)$ , ainsi que  $\lambda_m^2$ , atteint son maximum pour  $x = 0$ , et pour  $x > 0$ ,  $\frac{du}{dx} \leq 0$ . Par conséquent, on a, en supposant  $x > 0$ ,

$$0 \geq \frac{du}{dx} \geq \frac{u(x)}{\lambda_m^2(x)} \frac{d\lambda_m^2}{dx},$$

d'où

$$0 > \int_0^x \frac{d \log u}{dx} dx > \int_0^x \frac{d \log \lambda_m^2}{dx} dx \quad (0 < x \leq 1).$$

---

<sup>(1)</sup> *Journal de Mathématiques*, t. X, 1931, p. 219-286; voir, en particulier, les pages 226-233.

Donc

$$0 > \log \frac{u(x)}{u(0)} > \log \left( m^2 + m + \frac{1}{2} \right) \lambda_m^2(x),$$

c'est-à-dire

$$u(0) > u(x) > u(0) \frac{\left( m^2 + m + \frac{1}{2} \right) (1-x^2)}{\left( m + \frac{1}{2} \right)^2 (1-x^2) + \frac{1}{4}}.$$

En particulier, au point  $\xi_1$ , où  $R_m(x) = 0$ , on a

$$u(\xi_1) = \lambda_m^2(\xi_1) (1 - \xi_1^2)^{\frac{3}{2}} R_m'^2(\xi_1);$$

donc

$$(1 - \xi_1^2)^{\frac{3}{2}} R_m'^2(\xi_1) > \left( m^2 + m + \frac{1}{2} \right) u(0).$$

Lorsque  $m$  est pair,

$$u(0) = R_m^2(0) = \left[ \frac{1 \cdot 3 \dots (m-1)}{2 \cdot 4 \dots m} \right]^2;$$

lorsque  $m$  est impair,

$$u(0) = \frac{1}{m^2 + m + \frac{1}{2}} R_m'^2(0) = \frac{m^2}{m^2 + m + \frac{1}{2}} \left[ \frac{1 \cdot 3 \dots (m-2)}{2 \cdot 4 \dots (m-1)} \right]^2.$$

Ainsi, en vertu de la formule de Wallis,

$$\left[ \frac{1 \cdot 3 \dots (2s-1)}{2 \cdot 4 \dots 2s} \right]^2 = \frac{1}{\pi(s+\theta)} \quad \left( 0 < \theta < \frac{1}{2} \right),$$

on a, quel que soit  $m$ ,

$$(1 - \xi_1^2)^{\frac{3}{2}} R_m'^2(\xi_1) > \frac{2m}{\pi}.$$

Donc, d'après (11),

$$(17) \quad \rho_m^{(1)} < \frac{\pi}{2m} \sqrt{1 - \xi_1^2}.$$

De plus, à cause de l'inégalité

$$\frac{1}{\lambda_m^2} > \left( m + \frac{1}{2} \right)^2,$$

la distance entre deux racines d'une solution  $f_m(\cos\theta)$  de l'équa-



tion (13) est inférieure à  $\frac{\pi}{m + \frac{1}{2}}$ ; donc, si l'on pose

$$\zeta_1 = \cos \theta_1,$$

on a

$$\theta_1 < \frac{\pi}{m + \frac{1}{2}},$$

d'où

$$\sqrt{1 - \zeta_1^2} = \sin \theta_1 < \sin \frac{\pi}{m + \frac{1}{2}}$$

et finalement, il résulte de (17) que

$$(18) \quad \rho_m^{(1)} < \frac{\pi}{2m} \sin \frac{\pi}{m + \frac{1}{2}}.$$

Par conséquent, d'après le théorème III, si la formule (1) est exacte pour tous les polynômes de degré  $M_n = 2m - 1$ , on doit avoir

$$(19) \quad \frac{\pi}{M_n + 1} \sin \frac{2\pi}{M_n + 2} > \frac{1}{n}.$$

Dans le cas où  $M_n$  est pair, la formule (1), étant, par hypothèse, exacte pour tous les polynômes de degré inférieur à  $M_n$ , sera également vraie pour les polynômes de degré impair  $M_n - 1$ ; on aura donc l'inégalité

$$(19 \text{ bis}) \quad \frac{\pi}{M_n} \sin \frac{2\pi}{M_n + 1} > \frac{1}{n},$$

qui est par conséquent valable, quel que soit le nombre entier  $M_n$ .

Ainsi, *a fortiori*, pour que le système d'équations (2) possède des solutions réelles, il est nécessaire que

$$M_n < \pi \sqrt{2n}.$$

