

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

A. TH. MASLOFF

**Sur les solutions quadratiques de l'équation harmonique ( $A_{3,2}$ )**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 9<sup>e</sup> série*, tome 14, n° 1-4 (1935), p. 229-232.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1935\\_9\\_14\\_1-4\\_229\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1935_9_14_1-4_229_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur les solutions quadratiques de l'équation harmonique (A<sub>3,2</sub>);*

PAR M. A. TH. MASLOFF.

---

**1. Les systèmes de solutions quadratiques de l'équation**

$$(A_{3,2}) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \left[ -\frac{6}{(u-v)^2} + \frac{2}{(u+v)^2} \right] \theta$$

sont donnés par M. Gambier dans un Mémoire inséré au *Journal de Mathématiques*, t. IX, 1930, p. 333-361. M. Gambier a obtenu ces solutions en considérant comme plus que vraisemblable que la condition fondamentale

$$I \equiv \Sigma \left\{ u \left( \frac{U_i}{u} \right)^{(s)} - \left( \frac{U_i}{u} \right)^{(m)} \right\} \left\{ v \left( \frac{V_i}{v} \right)^{(s)} - \left( \frac{V_i}{v} \right)^{(m)} \right\} = 0$$

est nécessaire (1). Dans la Note présente je donne la démonstration de la nécessité de cette condition. Soient  $\theta_i (i = 1, \dots, n)$  les solutions quadratiques de l'équation (A<sub>3,2</sub>) :

$$\Sigma \theta_i^2 = U(u) + V(v).$$

On sait que l'équation (A<sub>3,2</sub>) est transformée de l'équation

$$(E_1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = -\frac{2}{(u-v)^2} z$$

par la solution particulière  $\omega = (u-v)^2(u+v)$  (la transformation

---

(1) GAMBIER, *loc. cit.*, p. 340.

de Moutard); soient  $z_i (i=1, \dots, n)$  les solutions de cette équation  $(E_i)$  qui se transforment en  $\theta_i (i=1, \dots, n)$ . D'après mon théorème (*Recueil Math. de la Soc. Math. de Moscou*, t. XXXII, 1925, p. 576), l'expression

$$\frac{1}{(u-v)^2(u+v)} (\Sigma z_i^2 - \Sigma \theta_i^2)$$

est la solution de  $(E_i)$ , d'où

$$\Sigma z_i^2 = U + V - 2[\varphi_1(u) - \varphi_2(v)](u^2 - v^2) + (\varphi'_1 + \varphi'_2)(u-v)^2(u+v).$$

Désignons par  $y_i (i=1, \dots, n)$  les solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0$$

qui se transforment  $(^1)$  en  $z_i (i=1, \dots, n)$  par la solution  $u-v$ . D'après mon résultat (*loc. cit.*, p. 575), l'expression

$$\frac{1}{u-v} (\Sigma y_i^2 - \Sigma z_i^2)$$

doit satisfaire nécessairement à la condition

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left[ \frac{1}{u-v} (\Sigma y_i^2 - \Sigma z_i^2) \right] = - \frac{2}{u-v} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} (\Sigma z_i^2).$$

En intégrant nous obtenons

$$\Sigma y_i^2 = \Sigma z_i^2 + (u-v) [2uv(\varphi'_1 - \varphi'_2) + 2v\varphi_1 - 2u\varphi_2 + 3v^2\varphi'_1 - 3u^2\varphi'_2 + \lambda(u) + \mu(v)].$$

Dans cette équation remplaçons chaque fonction  $y_i$  par son expression

$$y_i = U_{0i}(u) + V_{0i}(v),$$

et dérivons en  $u$ , puis en  $v$ ; nous obtenons

$$\begin{aligned} \Sigma U''_{0i} V''_{0i} &= -6v\varphi'''_1 - 6u\varphi'''_2 & \Sigma U'''_{0i} V''_{0i} &= -6v\varphi^{(4)}_1 - 6\varphi'''_2, \\ \Sigma U'_{0i} V''_{0i} &= -6\varphi''_1 - 6u\varphi^{(4)}_2, & \Sigma U''_{0i} V'''_{0i} &= -6\varphi^{(4)}_1 - 6\varphi^{(4)}_2, \end{aligned}$$

---

<sup>(1)</sup> DARBOUX, *Théorie des surfaces*, 2<sup>e</sup> éd., t. 2, p. 171.

SOLUTIONS QUADRATIQUES DE L'ÉQUATION HARMONIQUE (A<sub>3,2</sub>). 231  
 d'où nécessairement

$$\Sigma(uU''_{0i} - U''_{0i})(vV''_{0i} - V''_{0i}) = 0 \quad (1).$$

On pose, d'après M. Gambier,

$$z_i = u'_i + v'_i - \frac{2(u_i - v_i)}{u - v};$$

d'après les propriétés de la transformation de Moutard nous avons

$$U_{0i} = -u'_i \quad V_{0i} = +v'_i.$$

D'autre part, nous avons (d'après les notations de M. Gambier)

$$uu_i = \frac{dU_i}{du} = U'_i, \quad vv_i = \frac{dV_i}{dv} = V'_i.$$

En remplaçant dans la formule (1) nous obtenons la condition de M. Gambier I = 0.

2. Considérons plus généralement l'équation de Darboux (2)

$$(D) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = - \frac{2 \partial^2 \log[(u - v)\omega]}{\partial u \partial v} \theta,$$

où  $\omega$  est la solution la plus générale de l'équation (E<sub>1</sub>),

$$\omega = \alpha' + \beta' - \frac{2(\alpha - \beta)}{u - v};$$

l'équation (A<sub>3,2</sub>) est le cas particulier de l'équation (D) obtenu pour  $\alpha = \frac{u^k}{2}$  et  $\beta = \frac{v^k}{2}$ .

Nous obtiendrons, si  $\alpha''' \neq 0$ ,  $\beta''' \neq 0$ , par les mêmes considérations la condition fondamentale

$$\Sigma \left\{ \alpha''' \left( \frac{U'_i}{\alpha''} \right)^{(k)} - \alpha^{(k)} \left( \frac{U'_i}{\alpha''} \right)''' \right\} \left\{ \beta''' \left( \frac{V'_i}{\beta''} \right)^{(k)} - \beta^{(k)} \left( \frac{V'_i}{\beta''} \right)''' \right\} = 0$$

pour les fonctions  $U_i, V_i (i = 1, \dots, n)$  qui entrent dans les expres-

(1) GAMBIER, *loc. cit.*, p. 340.

(2) DARBOUX, *loc. cit.*, p. 172.

sions des solutions quadratiques

$$\theta_i = \left( \frac{U'_i}{\alpha''} - \frac{V'_i}{\beta''} \right)' - \frac{2U'_i}{\alpha''} \frac{\partial \log[\omega(u - v)]}{\partial v} + \frac{2V'_i}{\beta''} \frac{\partial \log[\omega(u - v)]}{\partial v} + \frac{2}{\omega} (U_i - V_i) \quad (i=1, \dots, n)$$

de l'équation (D).

Si  $\alpha'' \neq 0$ ,  $\beta'' = 0$ , la condition prend une forme plus simple, et se réduit à

$$\Sigma(\alpha'' U''_{0i} V''_{0i} - \alpha^{(k)} U''_{0i} V''_{0i}) = 0$$

pour les fonctions  $U_{0i}$ ,  $V_{0i}$ ; enfin, si  $\alpha'' = 0$ ,  $\beta'' = 0$  la condition recherchée se réduit à

$$\Sigma U''_{0i} V''_{0i} = 0,$$

ce qui est évident *a priori*, car (D) devient simplement  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = 0$  et l'on a posé  $\theta_i = U'_{0i} + V'_{0i}$ .