

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MARIE CHARPENTIER

Sur des courbes fermées analogues aux courbes de M. Birkhoff

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 14, n° 1-4 (1935), p. 1-48.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1935_9_14_1-4_1_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

*Sur des courbes fermées analogues aux courbes
de M. Birkhoff;*

PAR M^{lle} MARIE CHARPENTIER.

M. Birkhoff⁽¹⁾ définit ses courbes fermées⁽²⁾ remarquables comme des ensembles invariants par de certaines transformations analytiques qui leur sont associées.

Rappelons les principales propriétés topologiques de telles courbes ou courbes \mathcal{C} :

- 1° \mathcal{C} est une courbe fermée;
- 2° \mathcal{C} est invariante par une certaine transformation (analytique) topologique T_ε ;
- 3° \mathcal{C} est enroulée vers la gauche par rapport à l'extérieur et enroulée vers la gauche par rapport à l'intérieur, ou en explicitant : Tout point

(¹) *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. LX, fasc. I-II, p. 1.

(²) *Courbe fermée* au sens de Schoenflies, c'est-à-dire frontière commune à deux domaines dont la somme est égale à la totalité du plan. Voir KEREKJARTO, *Vorlesungen über Topologie*, p. 90.

extérieur à \mathcal{C} est accessible de l'infini (ou d'un point d'un cercle extérieur à \mathcal{C} , contenant \mathcal{C} à son intérieur) par un arc simple régulièrement tourné à gauche *c'est-à-dire* dont la tangente fait en tout point P un angle positif ⁽¹⁾ avec la direction radiale \overrightarrow{PO} , dirigée vers O. Cet angle positif est alors compté à gauche de la direction radiale par un observateur placé en P qui serait tourné *vers* O.

De même tout point intérieur à \mathcal{C} est accessible par un arc simple régulièrement tourné à gauche par rapport à la direction radiale \overrightarrow{OP} .

4° Tout point radialement accessible ⁽²⁾ est transformé en un point radialement accessible par T_ε^{-1} .

5° T_ε laisse invariant l'ensemble des points accessibles de l'intérieur, dont la transformation est douée d'un certain coefficient ⁽³⁾ de rotation τ_i tandis que l'ensemble des points accessibles de l'extérieur est invariant avec un coefficient de rotation τ_e .

On peut choisir T_ε de sorte que τ_e et τ_i soient de signes différents.

6° Il n'existe sur \mathcal{C} aucun point accessible à la fois de l'intérieur et de l'extérieur.

Cette dernière propriété est une conséquence immédiate de la propriété précédente 5°.

Le but de ce mémoire est de donner un exemple d'une courbe jouissant d'un certain nombre de propriétés analogues. Ceci est d'autant plus utile que M. Birkhoff pour définir la transformation T_ε utilise effectivement un anneau d'instabilité de la dynamique.

Or il a bien prouvé l'existence de tels anneaux dans un cas particulier, mais sans déterminer les courbes frontières que *l'on doit supposer connues* pour définir T_ε . Il est donc intéressant de pouvoir donner un exemple, qui, d'ailleurs est peut-être profondément différent des courbes \mathcal{C} , mais qui rend en quelque sorte intuitive la possibilité d'existence de propriétés aussi étranges que celles appartenant aux courbes \mathcal{C} , en particulier 5°.

⁽¹⁾ Cet angle est même uniformément $> d > 0$ pour tout l'arc simple, sauf peut-être à son extrémité.

⁽²⁾ Accessible de l'origine O par un *rayon* OP suivant la terminologie de M. Birkhoff.

⁽³⁾ H. POINCARÉ, *Journal de Math.*, 1885, p. 228 et G. D. BIRKHOFF, *loc. cit.*

I. — Construction de la courbe.

Nous allons donc construire une courbe douée des propriétés suivantes :

1° *Propriété d'être enroulée à gauche par rapport à l'intérieur et par rapport à l'extérieur.*

2° *Invariance par une transformation topologique qui avance en des sens opposés les points accessibles de l'intérieur et les points accessibles de l'extérieur.* Nous obtiendrons cette courbe \mathcal{C} comme le résidu d'un anneau auquel nous enlèverons une suite infinie de régions partielles unies à la région intérieure, et une suite infinie de régions partielles unies à la région extérieure.

Soit un anneau borné par deux cercles concentriques C_1 et C_2 (C_1 intérieur à C_2).

1° LA TRANSFORMATION DES BORDS DE L'ANNEAU. — Je rappellerai d'abord la notion du coefficient de rotation telle qu'elle a été étendue par M. Birkhoff (*loc. cit.*).

Soit un cercle sur lequel chaque point est défini par une coordonnée angulaire θ , une transformation topologique du cercle en lui-même sera définie par la relation

$$\theta_1 = f(\theta)$$

f continue, périodique de période 2π en θ .

En appelant a_k et b_k le maximum et le minimum de $\theta_k - \theta$ pour

$$\theta_k = f_k(\theta),$$

on a

$$b_k < \theta_k - \theta < a_k$$

et, comme $|a_k - b_k| < 2\pi$,

$$\lim \frac{\theta_k - \theta}{2\pi k} = \tau,$$

τ sera appelé le coefficient de rotation de la transformation du cercle. Cette définition est due à Poincaré.

Si l'on considère maintenant une courbe fermée, son intérieur peut être représenté d'après les résultats de M. Carathéodory (1) sur l'inté-

(1) *Math. Annalen*, Bd. 73, p. 325.

rieur d'un cercle par une représentation conforme telle que, à chaque point du cercle corresponde un point ou un bout premier de la courbe. Ainsi à une transformation topologique T de la courbe correspond une transformation topologique $t: \theta_1 = f(\theta)$ du cercle douée d'un certain coefficient de rotation τ_i qui sera appelé le coefficient de rotation de la courbe par rapport à l'intérieur. On définit de même le coefficient de rotation τ_e de la courbe par rapport à l'extérieur en représentant conformément l'extérieur de la courbe sur un cercle. De plus M. Birkhoff a montré que lorsqu'un point radialement accessible reste toujours radialement accessible par itération de T , le coefficient de rotation de T sur \mathcal{C} peut être défini directement pour la suite des images de ce point et l'on a

$$\lim \frac{\theta_n - \theta}{2\pi n} = \tau_i.$$

Ainsi nous commencerons par définir sur les bords de l'anneau un certain ensemble de points radialement accessibles qui appartiendront tous plus tard à la courbe, qui restera invariant par T ; par conséquent le coefficient de rotation défini sur le bord intérieur de l'anneau sera le coefficient de rotation de la courbe par rapport à l'intérieur et le coefficient de rotation défini sur le bord extérieur de l'anneau sera le coefficient de rotation de la courbe par rapport à l'extérieur.

Nous pouvons définir sur C_1 (de longueur 2π , par exemple), une transformation topologique t_1 , douée d'un coefficient de rotation arbitraire τ_1 telle que, un ensemble parfait P , de mesure b , de C_1 , reste invariant et que, étant donné un intervalle quelconque I contigu à P , tout autre intervalle contigu à P soit le transformé de I par une puissance convenable, positive ou négative, de t_1 .

Soit Γ un cercle de longueur $a = 2\pi - b$ sur lequel nous définissons une transformation $t: \theta_1 = \theta + \tau_1 a$, τ_1 incommensurable.

Nous choisissons d'autre part une suite de longueurs

$$\dots, |i_{-4}|, |i_{-2}|, |i_0|, |i_2|, |i_4|, \dots,$$

telle que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |i_{2k}| = b.$$

Soit un point A_0 sur C_1 , nous le choisissons comme origine de l'in-

tervalle $i_0(A_0B_0)$ de longueur $|i_0|$ et nous faisons correspondre à A_0B_0 de C_1 , un point a_0 de Γ .

Nous pouvons maintenant établir une correspondance continue de C_1 à Γ telle que, à tout point de C_1 corresponde un point de Γ et à un point de Γ corresponde un point ou un intervalle de C_1 . A tout point p de Γ , qui est donné par $\theta = a_0 + k\tau_1 a$, correspond sur C_1 l'intervalle i_{-2k} .

Soit un point p de Γ , point qui n'est pas donné par $\theta_1 = \theta + k\tau_1 a$ (k entier). A p correspond un point P de C_1 tel que

$$A_0P = a_0p + \sum_{-\infty}^{+\infty} i_{2k_j},$$

les k_j sont choisis de façon à prendre toutes les valeurs satisfaisant à

$$la < -k_j\tau_1 a < a_0p + la,$$

l étant un entier quelconque.

Soit t la transformation de Γ , $\theta_1 = \theta + \tau_1$ et T la transformation de Γ en C_1 , on définit

$$t_1 = TtT^{-1}$$

pour tous les points où T est définie, c'est-à-dire pour les points P de l'espèce ci-dessus. Mais il est facile de prolonger t_1 sur les intervalles correspondant aux points de Γ ; $\theta_1 = \theta \pm k\tau_1 a$, k entier quelconque; en effet, il est d'abord évident que t_1 fera comprendre i_{2k_j-2} à i_{2k_j} , pour définir complètement t_1 , il suffit de faire correspondre les extrémités A_{2k_j-2} et A_{2k_j} , B_{2k_j-2} et B_{2k_j} et les points intermédiaires se correspondront de façon que

$$\frac{A_{2k_j-2}P_{2k_j-2}}{A_{2k_j}P_{2k_j}} = \frac{\text{long } i_{2k_j-2}}{\text{long } i_{2k_j}},$$

t_1 est ainsi une transformation topologique de C_1 , en lui-même jouissant des propriétés indiquées; en effet l'ordre des points est le même sur Γ et sur C_1 , donc le coefficient de rotation sur C_1 , est encore τ_1 , et il existe un ensemble parfait invariant dont tous les contigus sont les transformés de l'un quelconque d'entre eux par les puissances de t_1 .

Nous définissons sur C_2 une transformation analogue à l'aide du coefficient de rotation τ_2 et de la suite d'intervalles \dots, i_{-3}, i_{-1} ,

i_1, i_3, \dots tels que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |i_{2k+1}| = d.$$

L'ensemble parfait de C_2 qui reste invariant est de mesure $c = 2\pi - d$.

Nous choisissons pour τ_1 , et τ_2 des nombres irrationnels, racines d'équations du second degré à coefficients rationnels, donc développables en fractions continues périodiques et satisfaisant de plus aux inégalités

$$|\tau_2| + |\tau_1| > 2\pi, \quad |\tau_2 - \tau_1| < 2\pi.$$

2° CONSTRUCTION DES RÉGIONS PARTIELLES. — Dans ce qui suit nous supposons l'anneau développé suivant le rectangle $(0, 0; 0, 1; 2\pi, 1; 2\pi; 0)$ du plan des coordonnées r, θ , dont les côtés droit et gauche sont considérés comme identiques. La grande planche montre les premières régions construites (1).

C_1 devient la droite $y = 1$ et C_2 la droite $y = 0$, tandis que le domaine intérieur I est donné par $y > 1$ et le domaine extérieur E par $y < 0$.

a. Nous prolongeons la région intérieure I , par une région r_0 construite sur i_0 ; r_0 se compose principalement d'une bande de largeur $\frac{1}{7}$ (ou en général $\frac{1}{2\alpha + 1}$) située au milieu du rectangle ABCD (fig. 1).

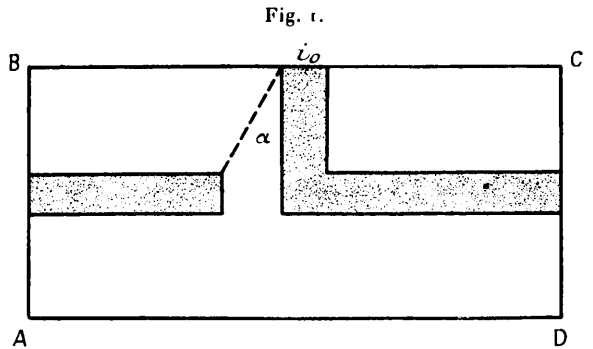
Cette bande est unie à i_0 par un rectangle de base i_0 , et s'arrête à une droite issue de i_0 qui fait un certain angle α avec la verticale Oy .

La frontière de r_0 est bien *enroulée vers la gauche* puisque tout point intérieur est accessible par une courbe tournée à gauche (d'un angle > 0 mais non $> d > 0$).

b. Nous prolongeons maintenant E par une région r_1 construite sur i_1 ; r_1 se compose principalement de deux bandes de largeur $\frac{1}{7}, \frac{3}{7}$

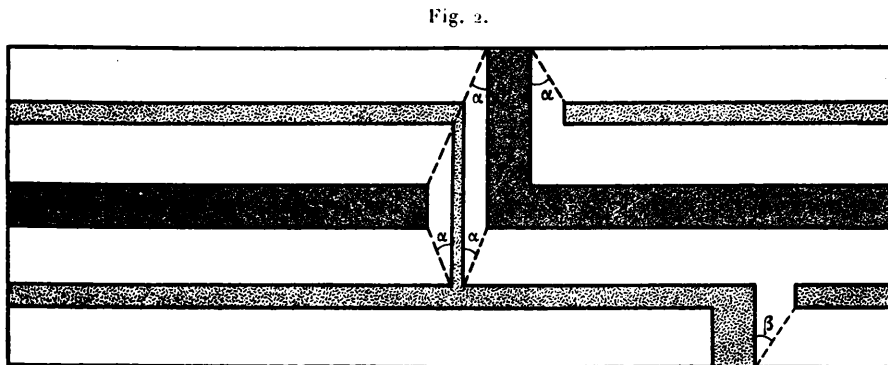
(1) Il faut noter que les proportions ne sont pas, en général, conservées dans les figures du texte. Sur la grande planche, on a donné (pour plus de clarté) aux angles α et β , une valeur bien supérieure à celle qu'ils doivent avoir en réalité, pour satisfaire à la condition (A) (voir 4° et 5°).

situées au milieu des bandes $0, \frac{3}{7}; \frac{4}{7}, 1$. La première s'arrête d'un côté à un rectangle de base i_1 , de l'autre, à une ligne droite issue de i_1 faisant un angle β avec la verticale. La seconde est limitée par les deux droites issues de i_0 faisant un angle α avec la verticale. Ces



deux parties, l'une qui entoure C_2 , l'autre qui entoure C_1 , sont unies par un rectangle qui passe entre l'extrémité et le début de r_0 et occupe le $\frac{1}{7}$ de l'espace qui reste là (*fig. 11*), r_1 est encore tourné à gauche comme on le voit facilement.

Nous appellerons les lignes considérées ci-dessus issues de i_0, i_1 et les lignes analogues, *des diagonales*.



Soient par exemple, $AI, B\alpha, E\delta, \dots$ dans la figure 2.
D'une diagonale à l'autre les r_n sont en ligne droite.

b. Nous prolongeons aussi E à travers i_{-1} par un rectangle r_{-1} de base i_{-1} de hauteur $\frac{4}{7} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^2$.

c. Nous prolongeons I à travers i_{+2} par r_{+2} , r_{+2} se compose :

1° D'une bande entourant C_1 , limitée au rectangle de base i_{+2} et aux diagonales issues de i_0, i_{+2} .

2° D'une bande entourant C_2 et limitée aux diagonales issues de i_{+1}, i_{-1} .

Le reste de r_{+2} entoure r_0 et r_{-1} .

On voit que la partie de r_{+2} qui entoure C_2 se détache de la partie de r_{+2} qui entoure r_0 et ceci entre les extrémités de r_{+1} . Ceci sera vrai pour tout r_n puisque celui-ci sera précédé par r_{n-1} et r_{n-2} .

c. r_{-2} est un rectangle de base i_{-2} de hauteur $\frac{4}{7} \left(\frac{3}{7}\right)^3$; puis nous prolongerons de même E par r_{+3} et r_{-3} à travers les intervalles i_{+3} et i_{-3} , I par r_{+4} et r_{-4} etc.

3° LES RÉGIONS SITUÉES ENTRE LES DIAGONALES. — Pour bien saisir la formation des r_n , nous procéderons de la façon suivante :

Nous construirons dans l'anneau bordé par C_1 et C_2 un anneau médian α_0 de largeur $\frac{1}{7}$; cet anneau a pour complémentaire deux anneaux, l'un bordé par C_1 , l'autre par C_2 : construire r_0 , revient à couper le premier de ces anneaux par une région issue de i_0 donc de C_1 et allant à α_0 ce qui le change en une région simplement connexe puis à couper α_0 de β_0 à α_0 par une région n'appartenant plus à la région intérieure, on voit ainsi aisément que ce qui reste de l'anneau après que l'on a enlevé r_0 est encore un anneau de largeur $\frac{3}{7}$ et prolongé par une région simplement connexe à travers $\beta_0 \alpha_0$.

Pour construire r_1 nous construisons dans cette région restante ρ_0 une région α_1 en occupant le $\frac{1}{7}$, ce sera un anneau prolongé à travers $\beta_0 \alpha_0$ par une région simplement connexe et son complémentaire par rapport à ρ_0 est formé de deux anneaux de largeur $\left(\frac{3}{7}\right)^2$. Pour

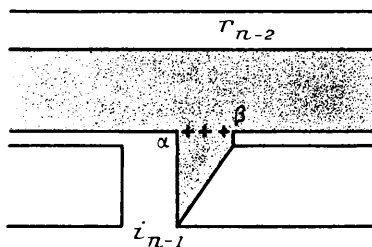
construire r , nous coupons celui de ces anneaux qui est bordé par C_2 par une région allant de i_1 (de C_2) à α_1 , ce qui le transforme en une région simplement connexe, puis nous coupons α_1 de H_1 à A_1 par une région qui unit cette région simplement connexe à l'anneau bordé par C_1 . La région qui reste est donc encore un anneau de largeur $\left(\frac{3}{7}\right)^3$ prolongé par une région simplement connexe à travers $H_1 A_1$, un anneau médian α_2 aura encore deux anneaux complémentaires qui s'unissent par la transformation de α_2 en r_2 etc.

On voit sans peine que r_n a pour frontière deux courbes parallèles qui ne peuvent bifurquer qu'à l'unique endroit où se rattache la région simplement connexe considérée ci-dessus c'est-à-dire en $H_{n-1} A_{n-1}$ si n est pair, $\beta_{n-1} \alpha_{n-1}$ si n est impair.

Appelons région \mathcal{R}_n une région bordée par les i_{-n}, \dots, i_n , les diagonales issues de ces intervalles et limitées à r_n et les bords supérieur et inférieur de r_n , situés entre les points extrémités de ces diagonales; d'après ce qui a été dit ci-dessus les r_{n+k} ont pour frontières des courbes (même des lignes brisées) parallèles à l'intérieur de \mathcal{R}_n , il n'y a dans \mathcal{R}_n aucun point de bifurcation des r_{n+k} pour $k > 1$.

Il nous sera donc possible de construire toutes les parties de r_{n+k}

Fig. 3.



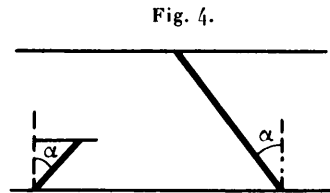
($k > 1$) à l'intérieur de \mathcal{R}_n alors que les r_{-n}, \dots, r_n sont construits, c'est-à-dire que tous les r_{n+k} peuvent être supposés construits dans \mathcal{R}_n , car un r_{n+k} ne se compose que de bandes de largeur $\frac{1}{7} \left(\frac{3}{7}\right)^{n+k}$ sauf naturellement dans les parties verticales où cette région devient de largeur $\frac{1}{7} \left(\frac{3}{7}\right)^{n+k} \text{ tang } \alpha$ (ou $\text{tang } \beta$ suivant le cas).

Cependant pour que ceci soit exact nous avons supposé que les diagonales ne se coupaient pas, en effet dans ce dernier cas il se pourrait qu'un r_{n+k} se termine dans \mathcal{H}_n ou même qu'une région issue de i_{n+k} rencontre une diagonale avant de rencontrer \mathcal{A}_{n+k} , ce qui ne nous permettrait pas plus tard de montrer que les r_n sont tournés à gauche; il s'agira donc de choisir les angles α et β de façon que les extrémités des r_{n+k} soient assurées d'être extérieures à \mathcal{H} . Moyennant quoi il vient :

On peut construire une région r_n si l'on a construit $r_0, \dots, r_{n-1}, r_{-n+1}$ et si l'on connaît les angles α et β .

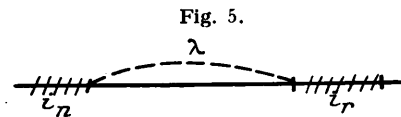
Mais la construction est-elle toujours possible, quel que soit n ?

4° CHOIX DES ANGLES α ET β POSSIBILITÉ DE LA CONSTRUCTION. — D'après les remarques précédentes la construction sera possible, si les droites que nous appellerons toujours maintenant des diagonales ne se coupent pas (*fig. 4*).



D'après ce que nous avons vu, les diagonales issues des intervalles i_n et i_{-n} sont prolongées jusqu'à r_n ou r_{n-1} ; comme nous le verrons ultérieurement il est même nécessaire de les prolonger jusqu'à r_{n-1} .

La condition suffisante pour que le problème soit possible est donc



que les diagonales soit prolongées sans se rencontrer jusqu'à r_{n-1} . Pour cela, il suffit que leurs projections sur C_1 , par exemple, n'empiètent pas. Soit λ la distance de i_n à l'un quelconque i_r des intervalles déjà construits (*fig. 5*)

$$i_{-n+2}, i_{-n+1}, \dots, i_{n-1}, i_{n-2}.$$

Les diagonales issues de i_n sont prolongées jusqu'à r_{n-1} , c'est-à-dire sur une hauteur $\left(\frac{3}{7}\right)^{n-3}$. Il y a donc lieu de ne tenir compte que des projections des parties des diagonales déjà construites situées au dessous de r_{n-1} ,

La projection d'une partie ainsi déterminée sera égale à $\left(\frac{3}{7}\right)^{n-3} \text{ tang } \alpha$.

Par conséquent la condition ci-dessus revient à exprimer que

$$\lambda > 2 \left(\frac{3}{7}\right)^{n-3} \text{ tang } \alpha$$

ou

$$(A) \quad \text{tang } \alpha < \frac{1}{2} \left(\frac{7}{3}\right)^{n-3} \text{ lim. inf. des } \lambda.$$

5° CALCUL DES DISTANCES DES INTERVALLES. — Une limite inférieure des λ est donnée par la distance μ des points correspondants sur Γ aux intervalles considérés sur C_1 (voir 1°).

La distance μ_{ij} de deux points de Γ , a_i , a_j transformés l'un de l'autre par ν^m sera donnée par

$$\frac{\mu_{ij}}{a} = m\tau_1 - p = m \left[\tau_1 - \frac{p}{m} \right] \quad (p \text{ entier})$$

naturellement μ_{ij} est pris en valeur absolue.

Si τ_1 est incommensurable, on peut le développer en fraction continue illimitée, alors $\frac{p}{m}$ est une fraction ordinaire qui ne peut approcher τ_1 plus qu'une réduite $\frac{P_i}{Q_i}$ que si $m > Q_i$; on a donc

$$(1) \quad \left| \tau_1 - \frac{P_i}{Q_i} \right| \leq \left| \tau_1 - \frac{p}{m} \right| \quad \text{pour } m \leq Q_i;$$

donc, si l'on prend $Q_i \geq m$, l'inégalité (1) sera certainement satisfaite.

D'après la théorie des fractions continues on a

$$\left| \tau_1 - \frac{P_i}{Q_i} \right| > \frac{1}{2Q_i(Q_{i+1})}.$$

Or $Q_{n+1} = a_{n+1}Q_n + Q_{n-1}$.

Prenons pour τ_1 une irrationnelle du second degré, les a_n ont un

maximum, soit A ce maximum augmenté de 1. On a

$$Q_{n+1} < A Q_n \quad \text{ou} \quad \frac{1}{Q_{n+1}} > \frac{1}{A Q_n};$$

donc

$$(2) \quad \left| \tau_1 - \frac{p}{m} \right| > \left| \tau_1 - \frac{P_i}{Q_i} \right| > \frac{1}{2 A Q_i^2}$$

pour tout $Q_i \geq m$.

Or comme $\frac{Q_{i+1}}{Q_i} < A$, on a certainement un Q_i satisfaisant à

$$m \leq Q_i \leq A m \quad \text{ou} \quad \frac{1}{A m} \leq \frac{1}{Q_i} \leq \frac{1}{m},$$

on peut donc remplacer dans l'inégalité (2) $\frac{1}{Q_i}$ par $\frac{1}{m A}$; d'où

$$m \left| \tau_1 - \frac{p}{m} \right| > \frac{1}{2 A^2 m}.$$

Il nous suffit de prendre la limite inférieure de $\frac{1}{m}$ donc la limite supérieure de m pour que ceci reste vrai pour tout m .

Ainsi nous prenons pour m, n pour les intervalles $i_{-n}, i_{-n+2}, \dots, i_n$, puisque $i_{-n} = i_1^n(i_n)$.

On a donc

$$\boxed{\mu_n \geq \frac{a}{2 A^3 n}};$$

d'où la condition (A) peut s'écrire

$$\text{tang } \alpha < \frac{1}{4} \left(\frac{7}{3} \right)^{n-3} \frac{a}{A^3 n}$$

ou

$$\text{tang } \alpha < \frac{a}{4 A^3} \left(\frac{3}{7} \right)^3 \cdot \left(\frac{7}{3} \right)^n \frac{1}{n},$$

ce qui sera certainement satisfait si l'on choisit uniformément

$$\boxed{\text{tang } \alpha < \frac{a}{4 A^3} \left(\frac{3}{7} \right)^3}.$$

On a une condition analogue pour $\text{tang } \beta$.

6° DÉFINITION DE LA COURBE C. — Considérons l'ensemble E des

frontières des r_n (n pair et variant de $-\infty$ à $+\infty$), E' l'ensemble des points limités de E .

$E + E' = \bar{E}$ un ensemble fermé.

Appelons R_i le domaine intérieur I augmenté des domaines ouverts r_n (n pair), R_i est évidemment un domaine.

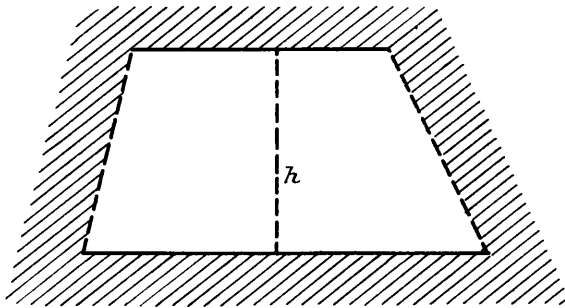
Tout point de \bar{E} est point limite de R_i .

C'est évident par définition mais si l'on appelle R_e le domaine extérieur E augmenté des domaines ouverts r_n (n impair), on voit que

Tout point de \bar{E} est point limite de R_e .

En effet soit \bar{K} l'ensemble des points limites de r_n (n impair) un point

Fig. 6.



quelconque de E est évidemment point limite de R_e puisque point limite de la suite des r_n (n impair), donc

$$\bar{K} \supset E$$

et par conséquent puisque \bar{K} est fermé

$$\bar{K} \supset \bar{E}$$

C. Q. F. D.

Mais on voit par un raisonnement analogue que les frontières des r_n (n impair) et leurs points limites appartiennent aussi à \bar{E} .

L'ensemble \bar{E} est de mesure superficielle nulle.

En effet, considérons une partie de l'anneau qui ne touche pas les

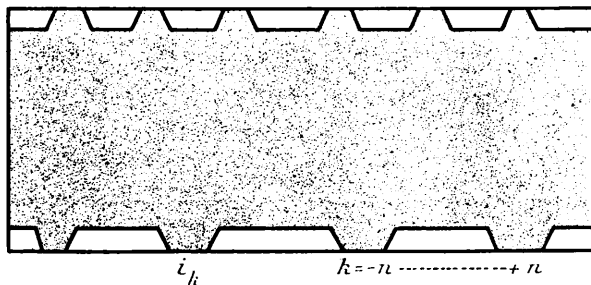
bords, on peut la décomposer en un certain nombre de trapèzes situés entre deux régions $r_k r_l (l > k \text{ par exemple})$ et deux diagonales. Soit la hauteur h de ce trapèze (*fig. 6*), l'intervalle enlevé de h à l'opération suivante sera $h \cdot \frac{1}{7}$, à l'étape suivante $h \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{7}$; d'où la longueur de h appartenant à $R_i + R_e$

$$h \left[\frac{1}{7} + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{7} + \left(\frac{6}{7} \right)^2 \cdot \frac{1}{7} + \dots \right] = h;$$

donc \bar{E} est sur h de mesure linéaire nulle. Il en résulte que \bar{E} est de mesure superficielle nulle dans le trapèze.

Avec plus de précision, si l'on considère la région r_n comme dessinée, on détermine la région \mathcal{H}_n intérieure à l'anneau et intérieure aux bords inférieur et supérieur de r_n et aux diagonales issues des intervalles i_{-n}, \dots, i_{+n} (*fig. 7*).

Fig. 7.



D'après ce qui précède l'ensemble \bar{E} est entièrement déterminé dans \mathcal{H}_n et de mesure nulle dans \mathcal{H}_n .

De même \bar{E} sera déterminé dans \mathcal{H}_{n+1} et donc de mesure nulle dans $\mathcal{H}_{n+1} - \mathcal{H}_n$.

On a

$$\bar{E} = \bar{E} \times \mathcal{H}_n + \bar{E} \times (\mathcal{H}_{n+1} - \mathcal{H}_n) + \bar{E} \times (\mathcal{H}_{n+2} - \mathcal{H}_{n+1}) + \dots + C_1^1 + C_2^2,$$

C_1^1 et C_2^2 sont les ensembles parfaits invariants de C_1 et C_2 .

Chaque ensemble du second membre est de mesure superficielle nulle, donc \bar{E} étant la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle.

Donc

\bar{E} est un ensemble fermé de mesure nulle séparant le plan en deux régions, chacun de ses points est point limite des deux régions, \bar{E} est donc une courbe fermée au sens de Schönflies, soit \mathcal{C} .

7° \mathcal{C} EST ROULÉE A GAUCHE. — Par définition tout point intérieur à \mathcal{C} ou bien appartient à I ou bien appartient à une r_n (n pair).

Il est évident que tout point de I est accessible par une courbe tournée à gauche, en est-il de même de tout point de r_n ?

LEMME. — Si la frontière de r_n est une courbe non tournée à droite, tout point de r_n est accessible par une courbe non tournée à droite.

Soit P un point intérieur à r_n menons le rayon OP (fig. 8), soit Q

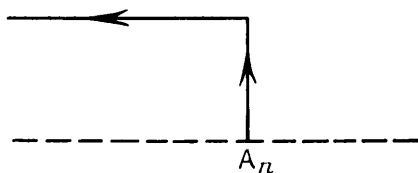
Fig. 8.



le premier point de rencontre de OP avec la frontière de r_n , on peut évidemment tracer un arc de Jordan parallèle à la frontière de r_n à l'intérieur de r_n aboutissant en R puis joindre RP, le long de RP l'angle est de 180° avec le rayon, OP, donc P est bien accessible par une courbe non tournée à droite.

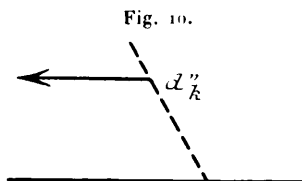
Il suffit donc de démontrer que la frontière de r_n est non tournée à

Fig. 9.

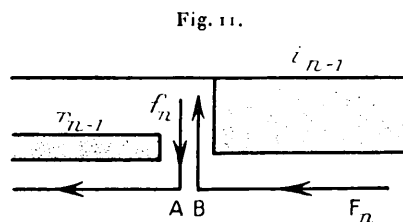


droite. Soit F_n cette frontière. Partons de l'extrémité droite de i_n , A_n , F_n fait avec le rayon, d'abord un angle nul, puis un angle

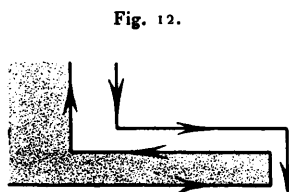
de 90° (*fig. 9*). A sa première rencontre avec une diagonale d'_k , F_n devient parallèle à la frontière, F_k , de r_k , donc est non tournée à droite si celle-ci est non tournée à droite. A partir de d'_k , F_n sort de ρ_k en faisant un angle de 90° avec le rayon (*fig. 10*), par conséquent reste non tournée à droite jusqu'à la prochaine diagonale, etc.



Il reste à considérer le prolongement f_n qui se détache de F_n , on voit que l'angle à l'arrivée en A, avant lui, et après lui, en B, est le même (*fig. 11*). En partant de A on suit C_i en *sens* inverse entre deux



diagonales, f_n est encore tournée à gauche de 90° par rapport à C_i , puis f_n tourne autour de r_{n-k} (k impair) en sens inverse; par conséquent si F_{n-k} est tournée à gauche par rapport à l'intérieur de C_i , f_n sera

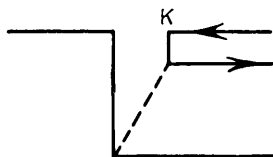


tournée à gauche par rapport à l'intérieur de C_{3-i} . L'angle étant $\theta_1 = (\theta + 180^\circ) - 180 = \theta$ en tout point puisque cette égalité est vérifiée en A ($\theta_1 = \theta = 0$) (*fig. 11*, voir *fig. 12*).

A partir de d''_{n-1} , f_n revient parallèle à elle-même mais son angle avec le rayon est augmenté de 180° ; donc si la première partie de f_n est tournée à gauche la seconde partie est, *a fortiori*, tournée à gauche.

Quand F_n arrive en d'_n l'angle de 90° devient 270° et reste supérieur de 180° à ce qu'il était au point correspondant; donc, si jusqu'en K, F_n n'est pas tournée à droite, elle ne le sera pas après, *a fortiori*, (fig. 13).

Fig. 13.



Il vient : Si F_{-n+1}, \dots, F_{n-1} n'est pas tournée à droite, F_n ne le sera pas.

Comme il est évident que F_0 n'est pas tournée à droite, F_n est non tournée à droite quel que soit n ; par conséquent tout point de r_n est accessible par une courbe non tournée à droite quel que soit n .

II. — Définition de la transformation.

La seconde partie de ce travail est consacrée à la définition d'une transformation topologique de l'anneau en lui-même, transformation qui laisse la courbe \mathcal{C} invariante, tout en avançant en des sens opposés ses points accessibles de l'intérieur et ses points accessibles de l'extérieur.

Nous établirons d'abord que toute région r_n doit se changer en une région r_{n+h} et déterminerons $h = -2$ en choisissant la transformation des bords de l'anneau (I).

Nous considérerons ensuite la région R_n qui sera l'anneau diminué des domaines ouverts r_{-n}, \dots, r_n ; d'après I, à R_n doit correspondre une région S_n (l'anneau diminué des domaines ouverts r_{-n-2}, \dots, r_{n-2}). Nous appellerons G_n une transformation topologique de l'anneau en lui-même changeant R_n en S_n ; cela est toujours possible l'ordre des points étant le même sur les deux frontières et pour simplifier nous

admettrons que

$$G_i \left[\sum_{-n}^{+n} r_k \right] = G_n \left[\sum_{-n}^{+n} r_k \right] \quad (\text{pour } i \geq n).$$

Si nous pouvons construire une suite G_i telle que, aussi bien la suite G_n que la suite G_n^{-1} soit uniformément convergente, la transformation limite est bicontinue donc topologique et change la courbe \mathcal{C} en elle-même puisque changeant l'ensemble des r_n en l'ensemble des r_n .

Or, d'après ce qui précède, une transformation G_{n+1} est une transformation G_n , choisie de façon à transformer R_{n+1} en S_{n+1} et R_{n+1} n'est autre que R_n diminué des domaines ouverts r_{n+1} et r_{-n-1} comme S_{n+1} est la région S_n diminuée des domaines ouverts r_{n-1} et r_{-n-3} ; mais dans la première partie du Mémoire nous avons vu que r_{n+1} est bien déterminé quand on a construit tous les r_k ($|k| \leq n$) et les diagonales qui aboutissent sur ces r_k ; f_{n+1} (la frontière de r_{n+1}) débute sur i_{n+1} qui est bien déterminé, se compose de lignes droites allant d'une diagonale à l'autre et doit s'arrêter aux deux diagonales $J'\Omega$ et $\alpha'\gamma'(r_{n+1})$ ⁽¹⁾ et AO et φH , diagonales qui aboutissent sur r_{n+1} et viennent de i_n, i_{n+1}, r_n et qui suffiront plus tard, avec les diagonales déjà tracées à définir r_{n+2} , ainsi la connaissance de la région R_n et de ses transversales situées sur les diagonales qui sont tracées suffit à déterminer r_{n+1} , et de même, la construction de r_{n-1} est déterminée par la connaissance de S_n et de ses transversales.

Nous n'oublierons pas cependant qu'il faut encore tracer r_{-n-1} et r_{-n-3} ainsi que les diagonales issues d'eux aboutissant sur r_{n+1} et r_{n+3} et sur r_{n-1} et r_{-n+3} (voir le tracé de ces diagonales à « Détail des transformations »).

Puisque ces transversales jouent un rôle aussi fondamental il est naturel de chercher à choisir des transformations G_n qui transforment R_n et ses transversales en S_n et ses transversales. Ceci est possible (II) car les transversales de R_n et S_n sont « semblablement disposées » à condition que celles de R_1 et S_1 le soient; en effet les correspondantes des transversales de R_1 ne sont pas « marquées » dans S_1 , on peut les choisir arbitrairement, à condition qu'elles ne rencontrent aucune dia-

(1) Dans le cas où n est impair, pour n pair on a $\delta'D$ et $A'J'$.

gonale de $S_n - S_1$. Je les ai choisies des lignes droites quand cela est possible, ou des lignes brisées (III).

Nous avons tout avantage à procéder ainsi, car (IV) alors on peut choisir les G_n de façon que, quand une G_n transforme une transversale d de R_n en une transversale δ de S_n (et que G_n^{-1} transforme δ en d), d soit transformée en δ (et réciproquement) par toute G_i pour $i \geq n$ (et réciproquement $G_i^{-1}(\delta) = d$ pour $i \leq n$) et cette permanence de δ , correspondante de d , suffit à assurer la convergence uniforme des G_i sur d (des G_i^{-1} sur δ).

Dans une quatrième partie, nous verrons comment choisir les fonctions de transformation (et leurs inverses) *entre deux diagonales* pour assurer la convergence à l'intérieur de cette région.

Nous verrons qu'il est même possible de choisir G_n dans toute région interdiagonalaire de façon que $G_{n+p} = G_n$ ($p > 0$ quelconque), ceci uniformément dans une région \mathcal{R}_n dont la distance de tout point de la frontière aux bords de l'anneau est inférieure à $\left(\frac{3}{7}\right)^{n+1}$.

Nous appellerons T_n la transformation G_n ainsi choisie qui est une transformation quadratique dans chaque trapèze tracé.

Il est alors facile de démontrer la convergence uniforme des T_n (et T_n^{-1}) dans tout l'anneau et la transformation limite obtenue \mathfrak{C} satisfait bien aux conditions requises.

1° Considérons un arc de la courbe \mathcal{C} ; cet arc A peut, soit appartenir à la frontière d'un r_n unique, soit contenir des points a et b de deux r_n différents; dans le premier cas, A' est une ligne brisée, continu de condensation de \mathcal{C} ; en effet, $\overline{\mathcal{C} - A} \supset A^{(1)}$; dans le second cas, A contient tous les points accessibles de a à b ; il contient donc les frontières d'une infinité de r_n , et comme A est fermé, il est identique à la courbe \mathcal{C} elle-même, et il n'y a pas d'autre genre d'arcs A possibles. Par une transformation topologique de la courbe en elle-même, deux arcs du premier genre doivent se correspondre et deux arcs du second genre doivent aussi se correspondre.

(¹) Voir pour la notion de continu de condensation et ces notations, les *Fundamenta Mathematicæ*, en particulier, KURATOWSKI, *Fundamenta Mathematicæ*, t. I, III et X, et JANISZEWSKI, *Thèse*, Paris, 1912.

Soit F_n la frontière d'un r_n , d'après ce qui précède,

$$T(F_n) \subset F_{n+h} \quad (h \text{ entier});$$

mais alors

$$T^{-1}(F_{n+h}) \supset F_n.$$

Or, en appliquant à T^{-1} la remarque précédente, on a aussi

$$T^{-1}(F_{n+h}) \subset F_n;$$

donc

$$T^{-1}(F_{n+h}) = F_n \quad \text{ou} \quad T(F_n) = F_{n+h};$$

il vient :

Toute transformation topologique de la courbe \mathcal{C} en elle-même, conservant les bords de l'anneau, transforme une région r_n en une région r_{n+h} .

Il nous faut maintenant choisir h , car *a priori*, nous ne pouvons décider s'il doit être le même pour tout r_n .

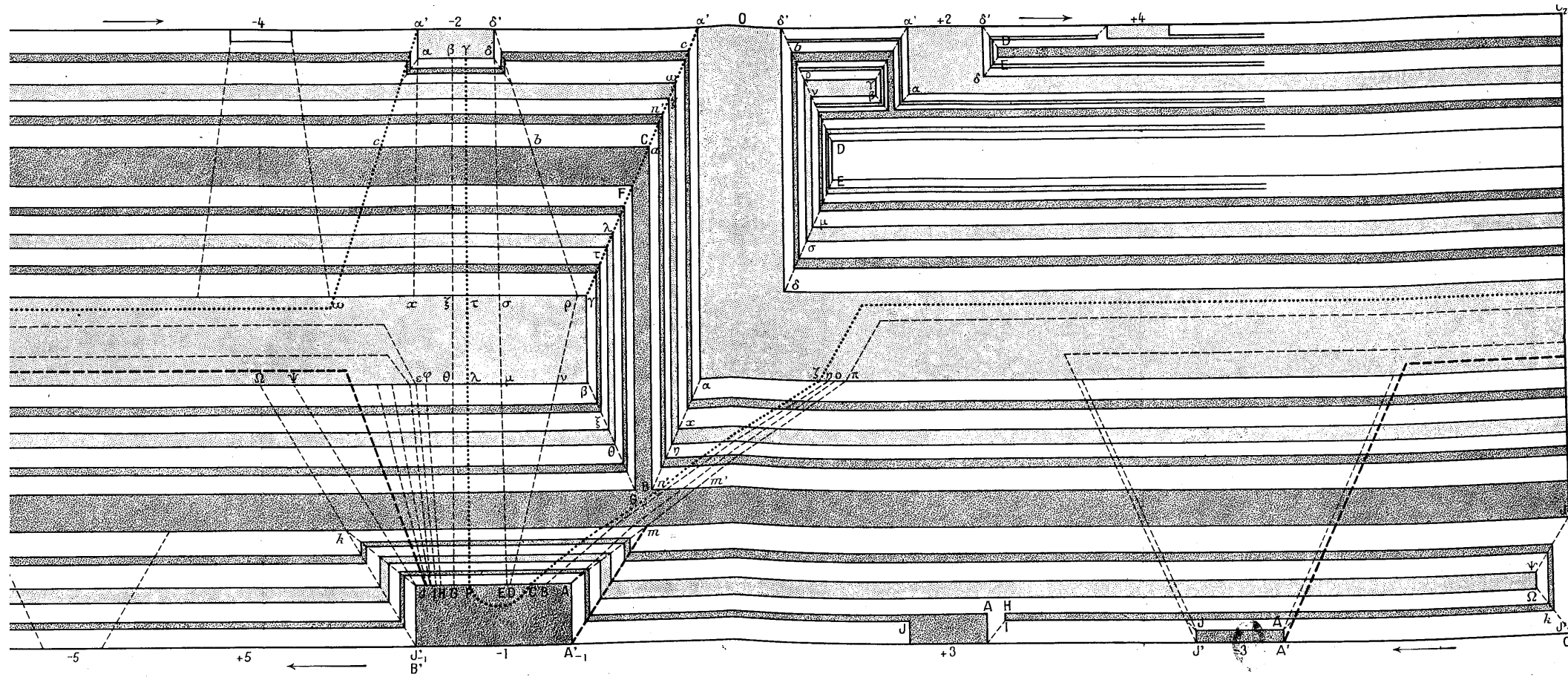
Considérons le cercle Γ sur lequel nous définissons l'ensemble des points P_n qui se déduisent d'un point de Γ , P_0 par rotation du nombre γ incommensurable avec 2π , c'est-à-dire $P_0 P_n = n\gamma \bmod 2\pi$.

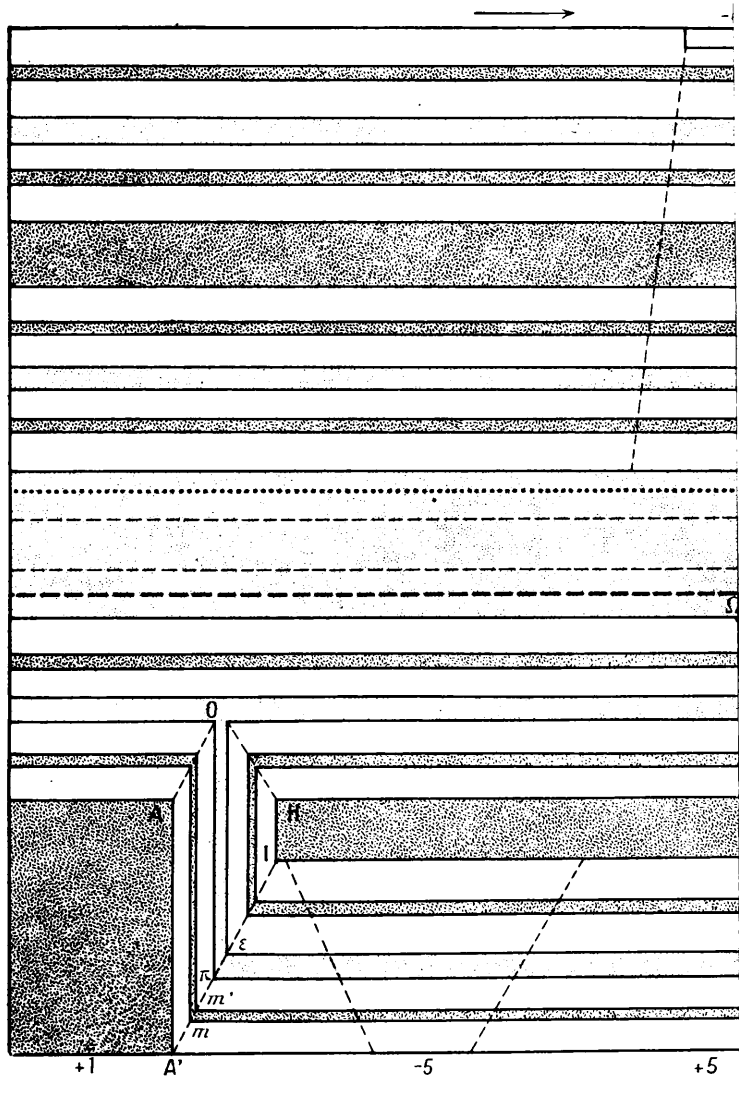
Si une transformation topologique t de Γ en lui-même transforme l'ensemble des P_n en l'ensemble des P_n , chaque point P_n devient un point P_{n+h} de façon que l'ensemble des points P_n soit identique à l'ensemble des points P_{n+h} et que l'ordre des points P_{n+h} soit le même que celui des points P_n sur Γ .

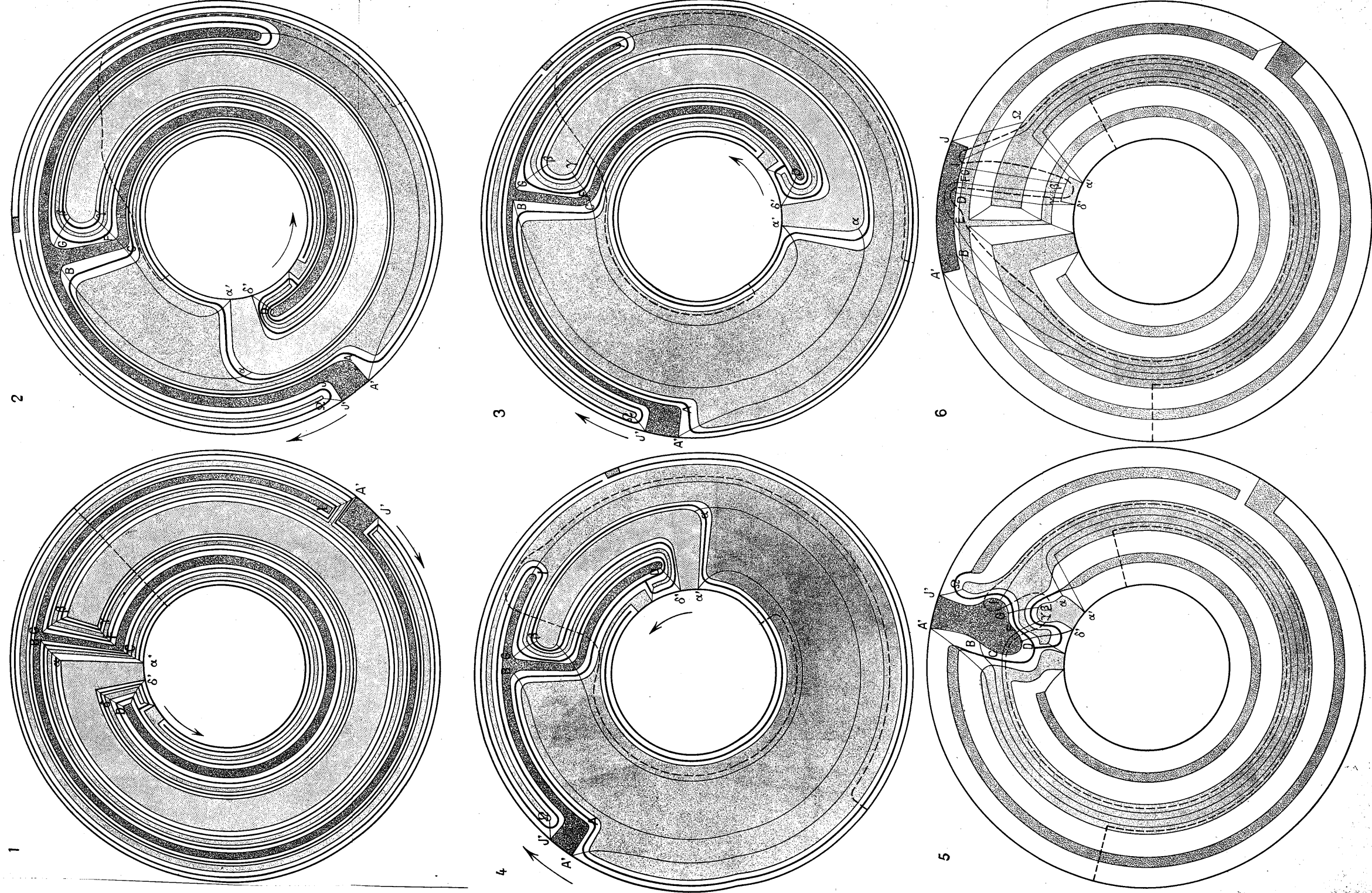
LEMME. — *Si pour $n \geq N$, h est borné, h est constant pour $n \geq N$.*

En effet, l'ensemble des points P_n ($n \geq N$) est partout dense sur Γ ; d'autre part, appelons G_h l'ensemble des points P_n qui deviennent des points P_{n+h} , l'ensemble G_h subit une rotation d'ensemble de $h\gamma$ ⁽¹⁾. Il n'y a qu'un nombre borné d'ensembles G_h par hypothèse; considérons un ensemble déterminé G_i , ou bien il est partout dense, ou bien \overline{G}_i a un dernier point ρ à droite. Dans le premier cas, tout point d'un \overline{G}_h ($h \neq i$) est point d'accumulation de G_i ; dans le second cas, Q est alors au moins point d'accumulation d'un G_k puisqu'il n'y a

(1) A $2m\pi$ près bien entendu.







qu'un nombre déterminé de G_k , et il appartient à G_i ou il en est point d'accumulation; donc, en tout cas, on a deux points de G_i et de G_k qui sont aussi voisins que l'on veut. La transformation t est continue sur un ensemble fermé, donc uniformément continue.

Par t , G_i subit une rotation $i\gamma$ et G_k une rotation $k\gamma$ si nous appelons d la distance de deux points de G_i et G_k , leur distance devient (en valeur absolue)

$$(i - k)\gamma \bmod 2\pi \pm d;$$

or, nous pouvons choisir deux points de G_i et G_k dont la distance est inférieure à η en choisissant pour η un nombre positif inférieur à la fois à $\frac{(i - k)\gamma \bmod 2\pi}{4}$, et à δ qui est un nombre positif tel que deux points dont la distance est inférieure à δ , se transforment en deux points, dont la distance est inférieure à $\frac{(i - k)\gamma \bmod 2\pi}{4}$, il en résulte que la distance de ces points puisqu'ils appartiennent à G_i et G_k doit devenir égale à $(i - k)\gamma \bmod 2\pi \pm \eta$, c'est-à-dire supérieure à $\frac{(i - k)\gamma \bmod 2\pi}{2}$, ce qui est impossible par hypothèse.

THÉORÈME. — *Si pour $n \geq N$, h est borné, h est constant pour tout n . En effet, d'après le lemme, h est constant pour $n \geq N$. Soit un point $P_i (n < N)$; il est point d'accumulation de points $P_n (n > N)$, son transformé est le point d'accumulation des transformés des points $P_n (n > N)$, c'est-à-dire le point d'accumulation des points P_{n+h} où h est constant; le transformé de P_i est donc le point P_{i+h} , la longueur $P_i P_{n+h}$ tendant vers $h\gamma \bmod 2\pi$ quand P_n tend vers P_i . Donc, h est le même pour tous les points P_n .*

Considérons une région r_n telle que $T(r_n) = r_{n+h}$, et en particulier le point $T\Omega_n$ de r_{n+h} . Soit ρ la longueur de la distance $T\Omega_n P$ de $T\Omega_n$ au point P de la frontière de r_{n+h} qui en est le plus proche, en considérant exclusivement la partie de la frontière de r_{n+h} qui est séparée de $T\Omega_n$ par Ω_{n+h} . σ sera la longueur de la distance $T^{-1}\Omega_{n+h}$ au point Q de la frontière de r_n qui en est le plus proche en considérant exclusivement la partie de la frontière de r_n qui est séparée de $T\Omega_{n+h}$ par Ω_n .

On a

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{n+h} \frac{1}{7} \tan \alpha \leq \rho \leq \left(\frac{3}{7}\right)^{n+h} \frac{1}{7} \frac{1}{\cos \alpha}$$

et

$$\left(\frac{3}{7}\right)^n \frac{1}{7} \operatorname{tang} \alpha \leq \sigma \leq \left(\frac{3}{7}\right)^n \frac{1}{7} \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Supposons que $T\Omega_n$ précède Ω_{n+h} ⁽¹⁾, alors Ω_n précède $T^{-1}\Omega_{n+h}$.

La transversale $T\Omega_n P$ doit donc par T^{-1} se transformer en une transversale de r_n allant de Ω_n à un point qui *suit* $T^{-1}\Omega_{n+h}$, donc $T^{-1}[T\Omega_n, P]$ doit rencontrer la transversale $T^{-1}\Omega_{n+h} Q$; ainsi, son *diamètre* ne peut être inférieur à la plus courte distance de Ω_n à cette transversale, une limite inférieure de cette distance est évidemment donnée ⁽²⁾ par

$$\operatorname{dist}_{(\text{le long de } r_n)} \Omega_n, T^{-1}\Omega_{n+h} - T^{-1}\Omega_{n+h}, Q$$

ou

$$\operatorname{dist}_{(\text{le long de } r_n)} \Omega_n, T^{-1}\Omega_{n+h} - \sigma;$$

appelons m le diamètre du plus petit arc $\Omega_n T^{-1}\Omega_{n+h}$ appartenant à r_n (l sera le diamètre du plus petit arc $\Omega_{n+h} T\Omega_n$ appartenant à r_{n+h}), il vient

$$\operatorname{diam} T^{-1}[T\Omega_n, P] > m - \sigma.$$

On a de même

$$\operatorname{diam} T[T^{-1}\Omega_{n+h}, Q] > l - \rho;$$

il vient alors :

THÉOREME. — *A tout nombre positif arbitraire ε , on peut faire correspondre un entier N tel que*

$$\operatorname{dist}_{(r_{n+h})} T\Omega_n, \Omega_{n+h} < \varepsilon, \quad \operatorname{dist}_{(r_n)} T^{-1}\Omega_{n+h}, \Omega_n < \varepsilon$$

(pour $n, n+h > N$).

En effet, s'il en était autrement, il serait possible de trouver une suite d'entiers n_1, n_2, n_3, \dots , telle que

$$\operatorname{diam} T^{-1}[T\Omega_{n_i} P] \rightarrow M > 0.$$

⁽¹⁾ Le raisonnement serait en tous points semblable si l'on faisait l'hypothèse contraire.

⁽²⁾ Dans un triangle $T^{-1}\Omega_{n+h}, \Omega_n, I$, en appelant I un point commun à $(\Omega_n, T^{-1}P)$ et à $T^{-1}\Omega_{n+h} Q$, $\Omega_n I > \Omega_n T^{-1}\Omega_{n+h} - T^{-1}\Omega_{n+h} I$ (voir pour les distances relatives MAZURKIEWICZ, *Fund. Math.*, t. I). Cette distance avait été définie par M. Denjoy (*C. R. Acad. Sc.*, 1911), j'appelle $\operatorname{dist}_{r_n}(P, Q)$ la distance de P à Q relativement à r_n .

Mais puisque T^{-1} est une transformation continue, on peut faire correspondre à $\frac{M}{3}$ un entier positif η tel que $\text{dist RS} < \eta$ entraîne $\text{dist } T^{-1}RT^{-1}S < \frac{M}{3}$.

Or, il est possible de choisir un n_i , tel que pour $n_k > n_i$ on ait simultanément

$$\text{diam } T^{-1}[T\Omega_{n_k}P] > \frac{2M}{3}$$

et

$$\max \frac{1}{7 \cos \alpha} \left(\frac{3}{7}\right)^{n_k+n_k}, \quad \frac{1}{7 \cos \alpha} \left(\frac{3}{7}\right)^{n_k} < \min \eta, \quad \frac{M}{6}$$

ce qui est toujours possible, la suite n_k et $n_k + h_k$ croissant indéfiniment. Il existe alors des points J et K de $T\Omega_n, P$ dont la distance des transformés par T^{-1} est égale à

$$\text{diam } T^{-1}[T\Omega_{n_k}, P] > \frac{2M}{3} - \sigma$$

ou puisque $\sigma < \frac{M}{6}$; ou $-\sigma > -\frac{M}{6}$

$$\text{dist}(T^{-1}J, T^{-1}K) > \frac{2M}{3} - \frac{M}{6} > \frac{M}{2};$$

mais d'autre part, comme J et K sont sur la transversale de longueur ρ

$$\text{dist}(J, K) < \frac{1}{7 \cos \alpha} \left(\frac{3}{7}\right)^{n_k+h_k} < \eta,$$

ce qui doit entraîner

$$\text{dist}(T^{-1}J, T^{-1}K) < \frac{M}{3}.$$

Il y a donc contradiction et le théorème est établi.

Les suites $T\Omega_n$ et Ω_{n+h} ont donc même limite, comme les suites $T\Omega_{n+h}$ et Ω_n .

Dans la suite, nous écrirons toujours non pas h mais $2h$ puisque les différences d'indices des i_n sur un même bord sont paires.

Considérons l'égalité suivante entre les angles décrits par les différents points de r_n (n pair, r_n est donc issu de C_1) : $\alpha_n \Omega_n$ et $\alpha_{n+2h} \Omega_{n+2h}$

sont comptés le long de r_n et r_{n+2h}

$$\alpha_n \alpha_{n+2h} \equiv \alpha_n \Omega_n + \Omega_n \Omega_{n+2h} + \Omega_{n+2h} \alpha_{n+2h},$$

$$(A) \quad \boxed{\alpha_n \alpha_{n+2h} - \Omega_n \Omega_{n+2h} = \alpha_n \Omega_n - \alpha_{n+2h} \Omega_{n+2h}}.$$

Si nous considérons le plan des coordonnées r, θ , et si nous nous reportons à la définition du coefficient de rotation (1^{re} Partie, 1^o), nous savons que le maximum de $\alpha_n \alpha_{n+2h}$ n'en peut dépasser le minimum de plus de 2π , puisque l'ordre des points de C_1 doit être conservé par T .

Soit A le point de C_2 le plus près de Ω_n , pour $n > N$ et $A \Omega_n < \eta$ on a

$$\text{dist}(\Omega_{n+2h}, TA) < \text{dist}(\Omega_{n+2h}, T\Omega_n) + \text{dist}(T\Omega_n, TA),$$

ou, comme $n > N$ entraîne $\text{dist}(\Omega_{n+2h}, T\Omega_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ [égalité qui est encore vraie si l'on considère la différence angulaire $\theta(\Omega_{n+2h}) - \theta(T\Omega_n)$] et que $\text{dist}(A, \Omega_n) < \eta$ entraîne $\text{dist}(TA, T\Omega_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour un η convenablement choisi, il vient

$$\text{dist}(\Omega_{n+2h}, TA) < \varepsilon$$

ou encore

$$\theta(\Omega_n, \Omega_{n+2h}) = \theta(\Omega_n, A) + \theta(A, TA) + \theta(TA, \Omega_{n+2h}),$$

puisque nous avons évalué Ω_{n+2h} dans r_n ; d'où

$$\theta(\Omega_n, \Omega_{n+2h}) \leq \eta + \theta(A, TA) + \varepsilon,$$

or $\theta(A, TA)$ varie d'au plus 2π pour la même raison que $\alpha_n \alpha_{n+2h}$; donc $\Omega_n \Omega_{n+2h}$ variera d'au plus $2\pi + \delta(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon)$ pouvant être choisi aussi petit que l'on veut.

Il en résulte que

$$\alpha_n \alpha_{n+2h} - \Omega_n \Omega_{n+2h}$$

ne peut varier de plus de $4\pi + \delta$ pour $n > N$.

Considérons $\alpha_{n+2} \Omega_{n+2} - \alpha_n \Omega_n$; par construction $\alpha_{n+2} \Omega_{n+2}$ tourne de $\alpha_{n+2} \alpha_n$, puis de $\alpha_n \Omega_n$, puis de $\Omega_n \Omega_{n+2}$; $\Omega_n \Omega_{n+2}$ est avec une différence de

$$\left[\left(\frac{3}{7} \right)^{n+1} - \left(\frac{3}{7} \right)^{n-1} \right] \pm k(n)$$

la rotation de $J'_{n+1} J'_{n-1}$ il vient

$$2\pi(\tau_1 - \tau_2) - 4\pi - \varepsilon \leq \alpha_{n+2} \Omega_{n+2} - \alpha_n \Omega_n \leq 2\pi(\tau_1 - \tau_2) + 4\pi + \varepsilon ;$$

pour $\alpha_{n+2h} \Omega_{n+2h} - \alpha_n \Omega_n$, on aura

$$2\pi h(\tau_1 - \tau_2) - 4\pi - \varepsilon \leq \alpha_{n+2} \Omega_{n+2h} - \alpha_n \Omega_n \leq 2\pi h(\tau_1 - \tau_2) + 4\pi + \varepsilon \text{ (pour } n > N).$$

On peut choisir N assez grand pour que ε reste petit même pour h assez grand, c'est-à-dire qu'il y aura un N tel que $\varepsilon < \pi$ même pour des valeurs de h telles que

$$h_1 - h_2 > \frac{(13\pi + \delta)}{2\pi(\tau_1 - \tau_2)}.$$

Il arrive alors, si l'on donne à $h_1 - h_2$ d'assez grandes valeurs, que

$$2\pi h_1(\tau_1 - \tau_2) - 2\pi h_2(\tau_1 - \tau_2) - 8\pi \pm \varepsilon \quad \text{ou} \quad (h_1 - h_2) 2\pi(\tau_1 - \tau_2) - 9\pi$$

donnera la valeur minimum de la variation du second membre de l'égalité (A); or nous avons vu que le maximum de variation du premier membre était $4\pi + \delta$, donc

$$2\pi(\tau_1 - \tau_2)(h_1 - h_2) - 9\pi < 4\pi + \delta$$

ou

$$h_1 - h_2 < \frac{13\pi + \delta}{2\pi(\tau_1 - \tau_2)}.$$

Il y a donc contradiction et $h_1 - h_2$ doit être borné, c'est-à-dire que si l'on désigne par h_0 une valeur fixe de h

$$|h - h_0| \leq \frac{13\pi + \delta}{\tau_1 - \tau_2}$$

et ainsi

$$h \text{ est borné pour } n \geq N.$$

Du théorème précédemment démontré, il résulte que h est constant pour tout n .

Donnons à h une valeur — H_1 sur C_1 , quelle valeur en résultera-t-il pour h le long de C_2 ?

Soit un point J'_{n_0} et une suite de points Ω_{n_k} tendant vers lui, la suite des transformés $T(\Omega_{n_k})$ a même limite que la suite $\Omega_{n_k - 2H_1}$ et celle-ci a nécessairement pour limite $J'_{n_0 - 2H_1}$, ainsi J'_{n_0} vient sur $J'_{n_0 - 2H_1}$ et ceci en tournant vers la gauche de J'_{n_0} à $J'_{n_0 - 2}$ puis à $J'_{n_0 - 4}$, etc.

Il en résulte que puisque h est constant aussi le long de C_2 il sera égal à $-H_1$ et que le coefficient de rotation sera $H_1\tau_2$ (τ_2 est ici compté dans le même sens que τ_1 , ce que nous ne conserverons plus dans la suite).

Dans la suite nous choisirons $H_1 = 1$ et nous prendrons $T(\Omega_n)$ en Ω_{n-2} .

2° La région R_n sera, par définition, l'anneau diminué des domaines ouverts r_n, \dots, r_{-n} ; par toute transformation du type cherché (I) R_n doit se transformer en l'anneau diminué des domaines ouverts r_{n-2}, \dots, r_{-n-2} , nous appellerons une telle région S_n et une transformation de l'anneau en lui-même transformant R_n en S_n sera une transformation G_n . Il s'agit, comme nous l'avons vu dans l'introduction, de choisir une suite de transformations G_n telle que la suite G_n et la suite G_n^{-1} convergent uniformément et par suite d'étudier le passage d'une G_n à une G_{n+1} . Pour simplifier, nous considérerons exclusivement dans la suite, des transformations telle qu'une transformation

G_{n+1} soit égale à la précédente, G_n sur $\sum_{-n}^{+n} r_k$, il suffira donc d'étudier

la formation de G_{n+1} dans R_n , c'est-à-dire dans le domaine où se dessinent deux régions : r_{-n-1} et r_{n+1} . Réciproquement G_{n+1}^{-1} n'aura plus à être définie qu'à l'intérieur de S_n , région à laquelle appartiennent r_{-n-3} et r_{n-1} .

G_n sera choisie sur C_1 et C_2 égale à t_1 et t_2 définies au numéro précédent, elle change donc tout i_n en i_{n-2} ; par conséquent sur C_1 et C_2 , G_n est choisie de façon définitive, la transformation entre les intervalles ouverts i_n et i_{n-2} peut être choisie arbitrairement, par exemple ils peuvent se correspondre par segments proportionnels. *A priori*, il semble qu'on puisse laisser arbitraire la correspondance entre l'intérieur de r_n et r_{n-2} , cela est vrai, sans doute, tant que n n'est pas trop grand, mais n'est pas possible indéfiniment. Il vient :

Il est toujours possible pour un n déterminé de choisir une transformation G_n égale à t_1 et t_2 sur C_1 et C_2 et changeant r_k en r_{k-2} pour $k = -n, \dots, n$.

Ceci est évident, car l'ordre des extrémités des entailles r_{k-2} sur C_1

et C_2 se déduit de l'ordre des extrémités des entailles r_k par les transformations t_1 et t_2 .

Nous avons à considérer maintenant dans le domaine R_n non plus seulement sa frontière, mais toutes ses transversales situées sur des diagonales. Il y a quatre de ces transversales qui jouent un rôle particulier et qui, d'autre part, sont situées sur des diagonales qui s'arrêtent à r_n ; ce sont (en supposant n impair) $A'_n I_n$, $\delta'_{n-1} D_n$, $\beta_{n-1} G_n$ et $B_n \alpha_{n-1}$.

$A'_n I_n$ unit l'intervalle i_n à l'extrémité de r_n , $\delta'_{n-1} D_n$ unit l'intervalle i_{n-1} à l'autre extrémité (prolongement) de r_n et les transversales $\beta_{n-1} G_n$ et $\alpha_{n-1} B_n$ vont de r_{n-1} à la naissance de ce prolongement.

Si nous considérons r_{n-2} dans le domaine S_n nous avons encore à considérer à part quatre transversales $A'_{n-2} I_{n-2}$, $\delta'_{n-3} D_{n-2}$, $\beta_{n-3} G_{n-2}$ et $\alpha_{n-3} B_{n-2}$, ces transversales jouent pour r_{n-2} le même rôle que les transversales de même nom jouaient pour r_n , il est donc naturel en faisant correspondre les transversales des deux domaines de chercher à faire correspondre ces quatre transversales une à une.

Nous démontrerons d'abord un théorème préliminaire (1).

Considérons deux domaines \mathcal{D} et \mathcal{D}' de même connexion dont chaque frontière μ (μ') est une courbe de Jordan; chaque μ , (μ') est douée d'un numéro d'ordre, choisi de façon que les frontières extérieures des deux domaines aient le même numéro d'ordre. Supposons tracées dans ces deux domaines m transversales λ qui seront encore douées de numéros d'ordre, de façon que sur deux courbes frontières μ_i et μ'_i les extrémités des transversales soient douées de mêmes numéros et rangées dans le même ordre. Je dirai que *ces domaines sont à transversales semblablement disposées*.

Si deux domaines sont à transversales semblablement disposées, il est toujours possible de faire correspondre topologiquement les frontières et les transversales, mais à quelles conditions cette correspondance peut-elle s'étendre à l'intérieur des deux domaines ?

THÉORÈME. — *L'extension de la correspondance des frontières et des*

(1) J'insiste sur des détails évidents, car ils ont une grande importance dans la suite.

transversales à l'intérieur du domaine est toujours possible pour deux domaines simplement connexes.

Nous allons d'abord montrer que si le problème est possible pour deux domaines simplement connexes contenant $1, \dots, (n-1)$ transversales, il est possible pour deux domaines simplement connexes possédant n transversales. En effet considérons une transversale λ_i de \mathcal{O} et la transversale λ'_i de \mathcal{O}' qui a le même numéro que λ_i ; λ_i divise \mathcal{O} en deux domaines \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 dont chacun contient au plus $(n-1)$ transversales, λ'_i divisera de même \mathcal{O}' en deux domaines \mathcal{O}'_1 et \mathcal{O}'_2 . *Les domaines \mathcal{O}'_1 et \mathcal{O}'_2 sont à transversales semblablement disposées.* En effet, soient A, B les extrémités de λ_i sur la frontière de \mathcal{O} , μ_α et μ_β les arcs de la frontière de \mathcal{O} déterminés par λ_i . La correspondance choisie sur les frontières et les transversales fait correspondre à λ_i , λ'_i , à A, A' et à B, B', puis à μ_α un arc μ'_α et à μ_β un arc μ'_β , de façon que les extrémités des transversales situées sur μ'_x correspondent aux extrémités des transversales sur μ_x ; il en résulte qu'aux extrémités d'une transversale de \mathcal{O}_1 (frontière : λ_i, μ_α) correspondent les extrémités d'une transversale situées sur μ'_α donc d'une transversale située dans \mathcal{O}'_1 . Ainsi à toute transversale de \mathcal{O}_1 correspond une transversale de \mathcal{O}'_1 et ses extrémités ont même rang sur les frontières de \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}'_1 , ainsi les transversales \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}'_1 sont semblablement disposées.

Par conséquent, si l'on peut faire correspondre topologiquement deux domaines simplement connexes dont les $(1, \dots, n-1)$ transversales sont semblablement disposées, on peut faire correspondre topologiquement \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}'_1 d'une part, \mathcal{O}_2 et \mathcal{O}'_2 de l'autre, ainsi l'on a bien une correspondance topologique entre \mathcal{O} et \mathcal{O}' tout entiers.

Il suffit donc maintenant de démontrer que la correspondance peut s'étendre à l'intérieur de \mathcal{O} et \mathcal{O}' quand $n=1$.

Mais pour $n=1$, les deux domaines \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 ne contiennent aucune autre transversale et T est définie sur leurs frontières il est alors évident que T peut être définie de façon à faire correspondre \mathcal{O} et \mathcal{O}' (voir KEREKJARTÓ, *Topologie*, p. 72).

Le théorème est donc démontré.

Il reste à chercher une condition suffisante assurant l'extension de T quand le domaine n'est plus simplement connexe.

Il existe alors des transversales qui ne coupent pas \mathcal{O} : nous choisissons parmi les transversales un certain nombre $\lambda_1 \dots \lambda_i$, tel que leur ensemble ne coupe pas \mathcal{O} mais que néanmoins l'ensemble E des frontières et des $\lambda_1 \dots \lambda_i$ soit connexe — alors le domaine limité par E est simplement connexe — E et E' sont à transversales semblablement disposées et l'on peut appliquer le théorème.

Je dis que l'on peut toujours transformer \mathcal{O} et \mathcal{O}' en deux domaines simplement connexes en ajoutant à leurs frontières des transversales convenablement choisies si toute courbe de Jordan fermée intérieure à \mathcal{O} (ou à \mathcal{O}') et contenant à son intérieur une des frontières rencontre au moins l'une des transversales (condition A).

En effet, supposons cette condition réalisée, pour des domaines \mathcal{O} et \mathcal{O}' contenant m transversales et bornés par k frontières, évidemment $m \geq k - 1$ et soient \mathcal{F} la frontière extérieure, P^1 une extrémité d'une transversale allant sur une autre frontière f_i qu'elle rencontre en Q^i , en tournant sur f_i dans le sens des aiguilles d'une montre, nous rencontrons une autre transversale n'allant ni à \mathcal{F} ni à f_i , soit à f_l , nous la suivons jusqu'à f_l et nous continuons jusqu'à ce que nous ayons épuisé ces k frontières — comme aucune de ces transversales n'a coupé le domaine et que chaque fois le domaine avait une frontière de moins — le domaine final est bien simplement connexe.

Mais est-on sûr de rejoindre toutes les frontières? en effet, il se peut que le long de f_q par exemple on revienne à Q_q sans rencontrer de transversales allant à des frontières non encore utilisées. Mais alors il est facile de revenir le long de $Q_q P_p$ jusqu'à f_p , et, ou bien de suivre la première transversale satisfaisant aux conditions voulues, ou bien s'il n'y en a pas, de suivre la transversale $Q_p P_o$, etc. puisque l'on est sûr qu'il n'y a pas de point cherché sur l'arc de frontière $Q_o P_o$.

Il n'y a que deux hypothèses possibles : on revient à P sans être allé à toutes les frontières ou après les avoir toutes parcourues.

Dans le premier cas l'ensemble des transversales et des frontières parcourues forment un ensemble fermé E auquel on peut même ajouter toutes les transversales qui ont un point sur E. Les autres frontières et transversales forment un autre ensemble fermé F qui n'a aucun point commun avec le premier, soit M un composant de F. Il existe une courbe de Jordan intérieure à \mathcal{O} ayant M à son

intérieur et ne rencontrant ni E ni F, donc ne rencontrant aucune transversale ce qui est contraire à la condition A qui est ainsi prouvée suffisante pour permettre l'extension de T dans les domaines multiple-ment connexes \mathcal{O} et \mathcal{O}' . En particulier si \mathcal{O} et \mathcal{O}' sont doublement connexes l'existence d'une transversale unissant les deux frontières suffit.

THÉORÈME. — Si pour $n = N$, R_n et S_n sont à transversales semblablement disposées, les $4\delta_n$ particulières signalées plus haut, ayant même numéro, pour $n > N$, R_n et S_n sont encore à transversales semblablement disposées à condition que f_{N+1} ne rencontre chacune des diagonales de R_N , S_N qu'en deux points et que cette condition soit permanente.

Il suffit de le montrer pour $n = N + 1$ et de montrer que les transversales de R_{N+1} se divisent en deux groupes de même que pour R_N de façon à assurer la permanence de cette condition.

Les transversales de R_N sont de deux sortes : celles qui vont d'une frontière à l'autre et celles qui ont leurs deux extrémités sur la même frontière. Comme r_N coupe toutes les diagonales, les transversales de R_N vont de r_N au reste des frontières : les l seront les transversales qui vont de r_N à l'autre frontière de R_N et les λ les transversales qui vont de r_N à la frontière dont il est issu.

Ces dernières ont leurs extrémités P sur r_N et sur le reste de la frontière, rangées en ordre inverse, la transversale $\alpha_N \gamma_N$ (ou $A'_N I_N$ si N est impair) ayant ses extrémités finissant l'ensemble P des deux côtés, ou si l'on préfère, on peut dire que les domaines limités par ces transversales sont emboîtés et tous contenus dans le domaine limité par $\alpha_N \gamma_N$ ou $(A'_N I_N)$. Toutes les autres transversales vont de r_N à l'autre bord de R_N , elles sont alors nécessairement rangées dans le même ordre des deux côtés puisqu'elles ne se rencontrent pas.

Donc si les diagonales de R_N et S_N sont semblablement disposées, pour toute l_i de R_N il existe une transversale l'_i de S_N et réciproquement; l'ordre des l_i sur les frontières de R_N est le même que celui des l'_i sur les frontières de S_N et si toutes les λ_k sont entre l_p et l_q sur la frontière de R_N , les λ'_k seront sur la frontière de S_N entre l'_p et l'_q .

Nous supposons ainsi que les $\delta'D$ (ou $J'\Omega$) se correspondent dans les deux domaines (voir I).

Je dis que R_{N+1} et S_{N+1} seront encore à diagonales semblablement disposées.

En effet construisons r_{N+1} , f_{N+1} , sa frontière, part de i_{N+1} , se coude à angle droit lorsqu'arrivée à $\left(\frac{3}{7}\right)^{N+2}$ de r_N , en A_{N+1} , et à partir de ce point suit la frontière φ de R_N en s'en tenant toujours à la même distance. f_{N+1} coupe alors toutes les transversales issues de φ suivant l'ordre inverse de celui qu'elles ont sur φ , arrivée au domaine simplement connexe ne contenant aucune transversale et dont la frontière contient le point α_N qui appartient donc à tous les domaines emboîtés considérés plus haut. f_{N+1} rencontre une transversale non encore construite $\alpha'_N D_{N+1}$, puis une autre $\alpha_N E_{N+1}$, f_{N+1} continue ensuite à suivre φ , jusqu'au moment où elle se heurte à A_{N+1} elle doit alors tourner, rencontrer la diagonale $A'_{N+1} I_{N+1}$ et suivre ensuite ψ , la frontière dont elle est issue, jusqu'au moment où elle arrivera à l'autre extrémité de i_{N+1} .

En résumant, les transversales issues de φ et les transversales issues de ψ qui formaient précédemment les l et les λ sont coupées par r_{N+1} et se disposent sur r_{N+1} de la façon suivante : soit l_a la première transversale rencontrée par f_{N+1} , l_p la transversale limitant le domaine contenant les λ , l_b la transversale limitant le domaine contenant i_{N+1} , $l_p = \alpha'_N \gamma_N$).

f_{N+1} rencontre :

- $l_a \dots l_p$ suivant l'ordre inverse de φ ,
- $\lambda_1 \dots \lambda_m \rightarrow \alpha' D$ et αE suivant l'ordre inverse de φ ,
- puis $\lambda_m \dots \lambda_1$
- $l_p \dots l_b$ suivant l'ordre inverse de φ , + $A'_{N+1} I_{N+1}$,
- puis $l_b \dots l_a$ suivant l'ordre inverse de ψ ,

les sens adoptés sur φ et ψ étant différents, φ sera C_1 si N est pair, C_2 si N est impair, et ψ sera C_2 quand φ sera C_1 , et réciproquement.

En faisant la même étude pour la construction de r_{N-1} dans S_N on voit :

f_{N-1} rencontre :

- $l'_a \dots l'_p$ dans l'ordre inverse de φ' ,
- $\lambda'_1 \dots \lambda'_m \rightarrow \alpha'_{N-2} D_{N-1}$ et $\alpha_{N-2} E_{N-1}$,
- $\lambda'_m \dots \lambda'_1$ dans l'ordre inverse de φ' ,
- $l'_p \dots l'_b$ + $A'_{N-1} I_{N-1}$,

k trans. :

$l'_b \dots l'_a$ dans l'ordre inverse de ψ' .

Or nous savons que l'ordre de $l_a \dots l_p$ est sur φ le même que l'ordre $l'_a \dots l'_p$ sur φ' , etc.

Les transversales qui vont d'un bord à l'autre de R_{N+1} sont d'abord les parties des l qui s'arrêtent à r_{N+1} , les deux parties des λ et $\alpha'_{N-2}D_{N-1}$ et $\alpha_{N-2}E_{N-1}$, les autres parties des l qui vont de ψ à r_{N+1} restent sur le même bord de R_{N+1} et appartiennent toutes au domaine limité par $A'_{N+1}I_{N+1}$.

Si les transversales sont semblablement disposées pour R_N et S_N de façon que la correspondance choisie pour C_1 et C_2 soit t_1 et t_2 ; on voit que, puisqu'à i_{N+1} doit correspondre i_{N-1} , les transversales qui suivent l_a et l'_a ont nécessairement même numéro, ainsi r_{N+1} et r_{N-1} rencontrent les transversales de même numéro jusqu'en λ_m et λ'_m les deux transversales qui suivent, ont nécessairement même rang dans R_{N+1} et S_{N+1} (ce sont $\delta'_N D_{N+1}$ et $\delta_N E_{N+1}$ et celles analogues pour r_{N-1}), puis des transversales λ_m et λ'_m jusqu'à l_b vont avoir même rang sur R_{N+1} et r_{N-1} , et enfin après avoir donné le même numéro à $A'_{N+1}J'_{N+1}$ et $A'_{N-1}I'_N$ les transversales l_b, \dots, l_a sont rangées de même sur r_{N+1} et r_{N-1} puisqu'elles le sont sur ψ et ψ' .

Donc les transversales sont encore semblablement disposées pour R_{N+1} et S_{N+1} , car elles gardent leurs numéros correspondants sur les frontières communes à R_N et R_{N+1} d'une part, à S_{N+1} et S_N d'autre part, et elles se disposent de même façon sur r_{N+1} et r_{N-1} , de plus, deux transversales de même numéro de R_N , S_N sont coupées en des transversales de même numéro de R_{N+1} , S_{N+1} .

D'autre part, la disposition des transversales reste la même qu'à l'étape précédente : une famille de transversales unissant les deux bords de R_{N+1} et dont les extrémités sur C_1 et C_2 se transforment par t_1 et t_2 en les extrémités sur C_1 et C_2 des transversales de mêmes numéros de S_{N+1} et une autre famille de transversales s'échelonnant entre la transversale $A'_{N+1}I_{N+1}$ et J' ; le raisonnement s'appliquera donc encore identiquement au passage de R_{N+1} à R_{N+2} .

Donc si R_N et S_N sont à transversales semblablement disposées, $\delta''_N D_N$ et $\delta''_{N-2} D_{N-2}$ se correspondant ainsi que les cercles C_1 et C_2 , toutes deux régions R_{N+k} et S_{N+k} seront à transversales semblablement disposées.

Il suffit donc de construire des transversales de S_N de même disposition que les transversales de R_N pour un N fixe.

Les transversales construites à chaque étape k sont, nous l'avons vu, $A'_k I_k$, $\delta'_{k-1} D_k$, $\delta_{k-1} E_k$, $\beta_{k-1} G_k$ et $\alpha_{k-1} B_k$, plus les transversales issues de r_{-k} qui s'arrêtent à r_k .

Toutes ces transversales font avec la verticale un angle α ou β suivant la parité de $[i_n]$, et nous avons choisi ces angles de façon que ces transversales ne se rencontrent pas. De même dans S_k les transversales $A'_{k-2} I_{k-2}$, etc. ne se rencontrent pas et n'ont aucun point commun avec celles qui les suivent ou les précèdent; même les transversales issues de r_{-k-2} qui sont prolongées jusqu'à r_{k-2} satisfont à cette condition.

Ainsi il suffit de donner mêmes numéros aux transversales caractéristiques pour k quelconque > 3 .

3° Nous considérons la région \mathcal{H}_3 et les diagonales qui lui appartiennent : ce sont celles terminées sur $r_{-3} \dots r_0 \dots r_{+3}$ et toutes les diagonales qu'il faudra ajouter pour $n > 3$ sont extérieures à \mathcal{H}_3 . De même les diagonales que l'on devra ajouter à \mathcal{H}_3 pour former \mathcal{H}_n seront toutes extérieures à \mathcal{H}_3 . Si donc nous pouvons faire correspondre biunivoquement à des diagonales de \mathcal{H}_3 des lignes de \mathcal{H}_3 et réciproquement et si d'autre part elles sont choisies de façon à ne rencontrer que le nombre minimum de fois toutes les r_n entre leurs extrémités, ce qui permettra d'affirmer que semblablement disposées pour R_3 et S_3 , elles resteront semblablement disposées pour R_n et S_n , les régions \mathcal{H}_3 et \mathcal{H}_3 , donc R_3 et S_3 seront bien à diagonales semblablement disposées et, comme nous aurons fait correspondre les points des frontières de R_3 et S_3 de façon que la transformation sur les bords soit précisément égale à t_1 et t_2 sur C_1 et C_2 , respectivement, nous aurons bien satisfait aux conditions désirées.

Il existe sur les deux anneaux R_n et S_n des arcs des bords dont la correspondance est complètement définie, par hypothèse, ce sont ceux qui appartiennent à C_1 et C_2 .

Si une transversale joint les deux bords de l'un et si on lui fait correspondre une transversale joignant les deux bords du second (les extrémités se correspondant d'avance naturellement) et si l'on unit

deux points qui se correspondent à deux autres points qui se correspondent par des transversales ne rencontrant pas les premières, on peut toujours faire correspondre ces transversales, c'est là la propriété exprimée du théorème précédent.

Il nous faudra donc seulement vérifier 1° que les transversales et leurs correspondantes ont leurs extrémités rangées dans le même ordre sur la frontière de R_3 et S_3 ; 2° qu'elles sont disjointes entre elles; 3° qu'elles ne sortent pas de \mathcal{H}_3 et \mathcal{K}_3 respectivement.

Pour satisfaire à cette dernière condition il suffira de commencer par déterminer les transversales qui forment les bords de \mathcal{H}_3 et \mathcal{K}_3 et il est évident que si alors toutes les transversales satisfont à 1° et 2°; 3° sera satisfait ipso facto, puisqu'alors toutes les autres transversales ne pourront sortir du domaine limité par les premières.

Prenons (1) $A'_1 m_3$ dans \mathcal{H}_3 , pour satisfaire à 3° nous devons chercher à faire coïncider sa transformée avec la diagonale aboutissant en A'_1 et allant à r_{+1} . Cela est possible, si les extrémités se correspondent et si les domaines partiels qu'elles déterminent ont des frontières correspondantes. A'_1 correspond bien à A'_1 . Nous ferons correspondre m_1 extrémité de la diagonale d_{-1} sur r_1 à m_3 . En effet les seuls points de r_1 dont les correspondants sont connus, sont A'_1 , J'_1 et D_1 ; or l'ordre $A'_1 D_1 m_1 J'_1$ est bien le même que celui de $A'_3 D_3 m_3 J'_3$. Donc $A'_1 m_1$ correspondra à $A'_1 m_3$, puisque, d'autre part, le domaine simplement connexe limité par $A'_1 m_1$ a sur sa frontière A'_1 et que le domaine simplement connexe limité par $A'_1 m_3$, a A'_3 sur sa frontière.

De même $A'_3 I_3$ et $A'_1 I_1$ peuvent se correspondre. Nous considérons maintenant $J'_1 k_3$, la diagonale $J'_1 k_1$ peut lui correspondre, en effet, J'_1 et J'_1 se correspondent par t_2 et k_3 est situé sur r_3 entre m_3 et I_3 de même que k_1 est situé sur r_1 entre m_1 et I_1 .

Nous passons maintenant à l'autre bord (C_1).

Considérons $\delta'_2 D_3$, sa correspondante pourra être la diagonale $\delta'_0 D_1$, puisque nous savons que δ'_2 et δ'_0 , d'une part, D_3 et D_1 , de l'autre, se correspondent et elles ne se rencontrent pas, ni ne rencontrent les autres transversales. De plus $\alpha'_2 a_3$ peut correspondre à $\alpha'_0 a_1$, puisque

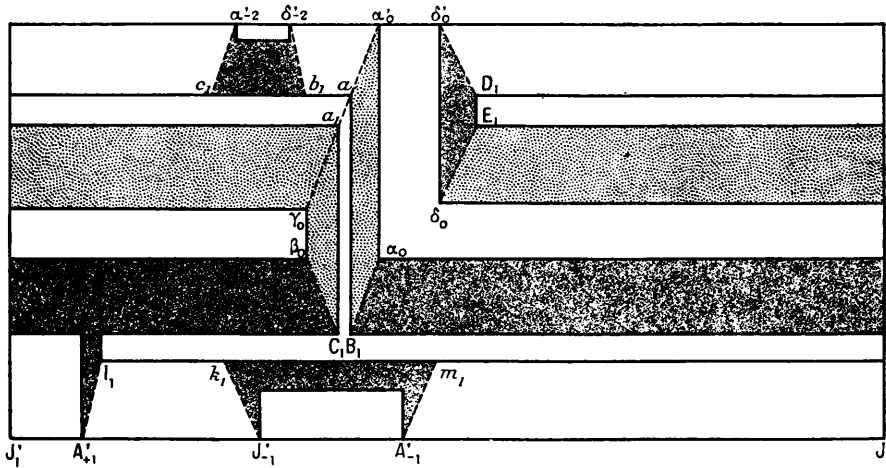
(1) Voir figure 14 et la planche hors texte.

α'_2 et α'_0 se correspondent et que a_3 est entre A_3 et D_3 comme a_1 est entre A_1 et D_1 .

Il nous reste à déterminer la correspondante de $\delta'_0 D_3$, ce sera $\delta'_{-2} D_1$, puisque δ'_{-2} correspond à δ'_0 et que D_3 étant sur r_3 entre a_3 et D_3 il peut correspondre à b_1 qui est sur r_1 entre a_1 et D_1 , et enfin, celle de $\alpha'_0 c_3$ qui devient $\alpha'_{-2} c_1$, puisque α'_0 et α'_{-2} se correspondent et que c_3 est sur r_3 entre b_3 et D_3 comme c_1 est sur r_1 entre b_1 et D_1 .

Nous considérons actuellement \mathcal{H}_3 à l'exclusion des régions com-

Fig. 14.



prises entre r_{-1} et r_3 , r_{-3} et r_3 , r_{-2} et r_3 et \mathcal{H}_2 à l'exclusion des régions comprises entre r_{-3} et r_1 , r_{-5} et r_1 , r_{-4} et r_1 ; nous verrons plus tard qu'il sera très facile de définir les transversales de ces régions. Soient \mathcal{H}'_3 et \mathcal{H}_3 , les régions \mathcal{H}_3 et \mathcal{H}_3 ainsi réduites. Par le choix que nous avons fait des couples de points se correspondant :

$a_1, a_3, k_1, k_3, m_1, m_3, b_1, b_3, c_1, c_3$ nous avons fait correspondre *ipso facto* les arcs de r_1 et r_3

$$\begin{array}{llll} J'_{+3} m_3, & m_3 k_3, & k_3 I_3, & I_3 D_3 \rightarrow J'_1 m_1, & m_1 k_1, & k_1 I_1, & I_1 D_1; \\ D_3 c_3, & c_3 b_3, & b_3 a_3, & & D_1 c_1, & c_1 b_1, & b_1 a_1; \end{array}$$

et enfin $a_3 A'_3$ et $a_1 A'_1$.

Toutes les transversales que nous avons marquées sont, elles et

leurs correspondantes, semblablement disposées et suffisent à assurer que \mathcal{H}'_3 et \mathcal{K}'_3 se correspondent dans toute transformation topologique transformant R_3 en S_3 de façon à transformer chaque diagonale que nous avons étudiée, en la ligne que nous lui avons fait correspondre.

Nous pourrions encore faire correspondre $\alpha_2 B_3$ et (dans \mathcal{K}_3) $\alpha_0 B_1$, puisque α_0 suit α' immédiatement comme α_2 suit α'_2 , de même B_1 est entre a_1 et A'_1 comme B_3 entre b_3 et A'_3 ; puis $\delta_2 E_3$ et $\delta_0 E_1$ pour les mêmes raisons; ensuite $c_3 \beta_2$ et $c_1 \beta_0$, puisque β_2 est situé entre δ_2 et α_2 ; et C_3 entre E_3 et I_3 comme β_0 entre δ_0 et α_0 puis C_1 entre E_1 et I_1 , et enfin $a'_3 \gamma_2$ et $a'_1 \gamma_0$, puisque a'_1 entre E_1 et c_1 et a'_3 entre E_3 et c_3 ; et γ_2 entre α_2 et β_2 comme γ_0 entre α_0 et β_0 .

Jusqu'à présent nous n'avons utilisé que des diagonales de \mathcal{K}_3 toutes tracées que nous avons pu faire correspondre à des diagonales de \mathcal{H}_3 . Il nous restera maintenant à définir dans \mathcal{K}_3 des lignes qui auront la même disposition que les diagonales de \mathcal{H}_3 non encore utilisées.

Or les diagonales tracées divisent $\mathcal{H}'_3 - (r_0 + r_1 + r_{-1} + r_{-2})$ en un certain nombre de régions dont seulement quatre vont contenir toutes les transversales qu'il reste à définir ce sont :

$$A'_{-1} m_1 k_1 J'_{-1}, \quad A'_{+1} I_1 G_1 \beta_0 \alpha_0 B_1, \quad \gamma_0 a'_1 E_1 \delta_0 \quad \text{et} \quad \delta'_{-2} \alpha'_{-2} c_1 b_1.$$

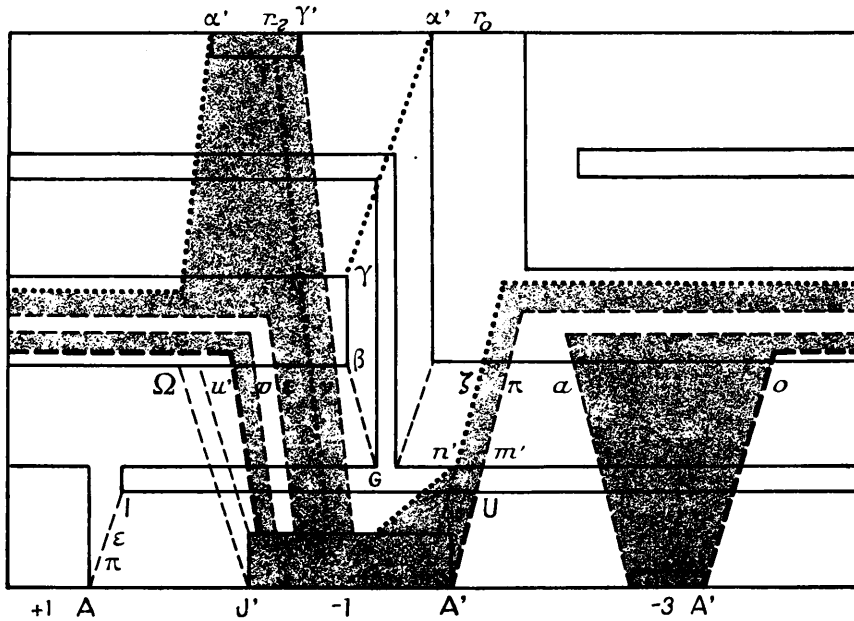
Mais alors il suffira de prendre pour chaque transversale dans le trapèze auquel ses extrémités appartiennent, une courbe de Jordan joignant ces extrémités qui sont situées sur les deux bases du trapèze et ne rencontrant qu'une fois toute la partie de la courbe située dans cette région, il suffit de prendre par exemple une droite.

Cela sera toujours possible car, par notre choix des premières transversales deux bases d'un trapèze de \mathcal{K}_3 correspondent respectivement à deux bases d'un même trapèze de \mathcal{H}_3 quel que soit le choix ultérieur de la transformation sur les bases de ces trapèzes, puisque les extrémités de ces bases sont invariantes.

Ceci n'est cependant tout à fait exact que lorsqu'il s'agit effectivement de transformation de trapèze à trapèze alors que certaine région, telle $A'_{-1} m_1 k_1 J'_{-1}$, n'est pas tout à fait un trapèze, mais elle peut facilement se ramener à un trapèze augmenté de certaines régions élémentaires (voir plus loin au «*Détail des transformations*») de

même pour $\alpha_{-2}, \delta_{-2}, b, c_1$. En tout cas, topologiquement, la difficulté n'existe pas, chacune de ces régions s'appuie sur deux arcs des bords de l'anneau et se termine à droite et à gauche par une transversale rencontrant seulement une fois toute r_n entre une r_{n-k} et une r_{n-l} et

Fig. 15.



théoriquement il suffit de conserver l'ordre des points sur les bases pour que le problème soit résolu.

Cependant, comme je désirais déterminer complètement la transformation, j'ai réduit autant qu'il était possible le nombre des régions élémentaires obtenues qui seront, soit des trapèzes, soit des triangles; c'est dans ce but que, non seulement, j'ai choisi pour transversales des droites, mais encore que j'ai amené r_{-2} et r_{-1} , en face l'un de l'autre de façon à pouvoir remplacer quatre droites différentes par une seule, ce remplacement n'est pas toujours possible, il suffit de regarder la figure, je donne plus loin le nombre des régions élémentaires obtenues à chaque étape, mais toujours en faisant cette hypothèse r_{-1} en face de r_{-2} .

Finalement nous avons donc trouvé dans \mathcal{H}_3 des transversales qui ont la même disposition que les diagonales de \mathcal{H}_3 et R_3 et S_3 sont à transversales semblablement disposées, ce qui entraînera :

R_n et S_n sont à transversales semblablement disposées.

Il résulte du théorème ci-dessus qu'on peut faire correspondre topologiquement R_n et S_n de façon à faire correspondre les transversales de même numéro.

D'autre part, nous avons vu que si une transversale était coupée par r_{n+1} les deux transversales obtenues avaient mêmes numéros que les transversales obtenues en coupant δ' par r_{n-1} ainsi. Si deux transversales δ et δ' se correspondent à une étape, leurs parties intérieures à R_N et S_N se correspondent encore. Pour simplifier on peut aussi faire correspondre leur parties intérieures à $\sum_{-N}^{+N} r_n$; il en résulte que si nous appelons G_n la transformation qui fait passer de R_n à S_n , nous pouvons toujours choisir cette transformation de façon à faire correspondre les transversales de même numéro, la même transversale δ' correspondant toujours à la même δ quand n change.

Nous n'oublierons pas aussi que ces conditions pour avoir toute leur efficacité doivent être réalisées, tant pour G_n que pour G_n^{-1} ; par conséquent il convient de tracer dans R_n des transversales correspondant aux diagonales non utilisées de S_n , ce sont celles qui vont de r_{-n-2} à r_{n+2} , elles doivent donc aller de r_{-n} à r_{n+4} , leur construction est facile, nous compterons plus tard, le nombre de régions élémentaires formées.

Ainsi, à partir du moment où elles sont tracées, deux diagonales de même numéro se correspondront par G_n ($n \geq N$) et aussi bien r_{n+1} que r_{n-1} sont formés de droites allant d'une diagonale à l'autre.

4° Soit α l'angle minimum d'une transversale δ avec les régions r_n qu'elle rencontre, la distance de deux points consécutifs d'une r_n et d'une r_{n-k} sur la même transversale n'est pas supérieure à

$$\frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{3}{7} \right)^{n+1} \quad \left[\text{ou } \frac{1}{\sin \beta} \left(\frac{3}{7} \right)^{n+1} \text{ si } n \text{ est impair} \right].$$

Par hypothèse ces points communs à $r_N r_{N-k}$ ($k = 0, \dots, n$) et leurs

correspondants sont choisis définitivement pour $G_n (n > N)$. Soit un point P de δ n'appartenant pas à (r_N, \dots, r_0) , la distance de ses transformés par G_{n+i} ne peut dépasser $\frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{3}{7}\right)^{N+i}$ car ils appartiennent toujours à l'intervalle dont les deux extrémités sont sur (r_n, \dots, r_0) . Donc :

THÉORÈME. — *Étant donné un nombre arbitraire positif ε , on peut choisir un entier N tel que pour tout point P d'une transversale δ on ait*

$$\text{dist. } [G_i(P), G_j(P)] < \varepsilon \quad (i, j > n)$$

et pour tout point de δ' (de S_n)

$$\text{dist. } [G_i^{-1}(Q), G_j^{-1}(Q)] < \varepsilon \quad (i, j > n).$$

Ainsi la permanence de δ et δ' suffit à assurer l'uniformité de la convergence des suites G_n et G_n^{-1} sur δ et δ' .

Nous irons même plus loin :

Il suffit de faire correspondre les transversales de même numéro par segments proportionnels pour que, pour $n_1, n_2 > N$, on ait $G_{n_1}(P) = G_{n_2}(P)$, toujours sur les transversales.

Ceci est valable naturellement lorsque les deux transversales sont des lignes droites, ce qui est réalisé à partir de R_3 .

En effet, puisque les transversales doivent se correspondre, l'ensemble des points de rencontre de δ avec une $r_n (n > N)$, devient l'ensemble des points de rencontre de δ' avec r_{n-2} , mais comme δ et δ' sont des droites, r_n et r_{n-2} les divisent bien en segments proportionnels par construction; en général, le rapport est $\left(\frac{3}{7}\right)^2$; les segments sont tous égaux entre eux, tant pour δ que pour δ' .

Ainsi une correspondance par segments proportionnels de δ à δ' fait correspondre l'ensemble des points communs à r_n et à δ , à l'ensemble des points communs à r_{n-2} et à δ' pour n quelconque. Comme la courbe \mathcal{C} est un ensemble fermé, cette correspondance, qui est uniformément continue, fait passer de l'ensemble des points communs à \mathcal{C} et à δ à l'ensemble des points communs à \mathcal{C} et à δ' .

Il nous reste à choisir la correspondance entre deux diagonales consécutives. Supposons les bases des deux trapèzes horizontales.

La transformation G_i s'écrira

$$\begin{aligned} X_i &= f_i(x, y), \\ Y_i &= g_i(x, y). \end{aligned}$$

Si le point $P(x, y)$ est sur une diagonale, on a

$$X_i = X_j \quad \text{et} \quad Y_i = Y_j.$$

Soient $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ les extrémités de la parallèle aux bases du trapèze dans R_n , soit $y_1 = y_2$, les points correspondants sont

$$Q_1(X_1^!, Y_1^!); \quad Q_2(X_2^!, Y_2^!); \quad Y_1^! = Y_2^!.$$

(Le raisonnement est semblable, si l'on a $x_1 = x_2$ ou $X_1 = X_2$) on prendra

$$\frac{X_i - X_1^!}{X_2^! - X_1^!} = \frac{x_1 - x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{et} \quad Y_i = Y_1^! = Y_2^!,$$

cette transformation continue fait correspondre les deux trapèzes, de façon que toute parallèle à la base du premier devienne une parallèle à la base du second, et réciproquement.

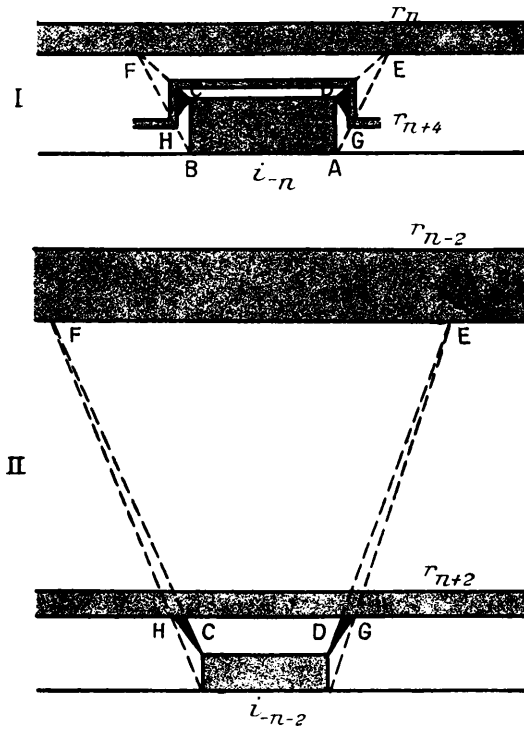
Considérons une partie d'une r_n intérieure au premier trapèze, elle est bordée par des parallèles à la base de ce trapèze. Il lui correspondra par la transformation choisie, une région comprise entre deux parallèles aux bases du trapèze correspondant, ces parallèles étant issues des points des diagonales correspondant aux extrémités de r_n sur les diagonales, c'est-à-dire des points de r_{n-2} correspondant aux points de r_n , ainsi cette transformation fait passer d'une partie de r_n à la partie correspondante de r_{n-2} quel que soit n , à l'intérieur d'un trapèze quelconque limité par des diagonales et des frontières de r_k ($k < n$).

Nous appellerons T_n , une transformation G_n choisie de cette façon sur la frontière et les transversales de R_n (et S_n). Chaque transformation T_{n+1} sera égale à la transformation précédente T_n sur $\sum_{k=-n}^{k=+n} r_k$, et à l'intérieur de R_n (et S_n) à l'exception des trapèzes situés entre C_1 (et C_2) et le bord le plus proche de r_n d'une part, entre les diagonales d_k et d'_k ($k = -n, \dots, n$) d'autre part.

T_{n+1} peut donc être choisie arbitrairement à l'intérieur de r_{n+1} seulement jusqu'à la première diagonale que cette région rencontre, nous appellerons θ_{n+1} la transformation arbitraire de cette région.

5° DÉTAIL DES TRANSFORMATIONS. — Nous avons à définir la transformation de la figure AEFB (fig. 16). Il faut d'une part déter-

Fig. 16.



miner dans II les lignes qui vont correspondre aux diagonales d'_{-n} , d'_{-n} et d'autre part déterminer dans I les lignes qui correspondent aux diagonales d'_{-n-2} , d'_{-n-2} de II. On voit que l'on peut décomposer la figure en huit parties, dans chacune de ces parties T_n se réduit à une transformation quadratique comme nous l'avons vu.

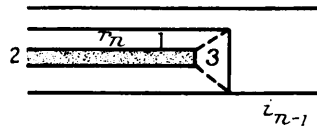
NOMBRE DE TRANSFORMATIONS A DÉFINIR. — Le nombre des intervalles

d'un côté, construits jusqu'à i_{-n} et i_{+n} est $n + 1$, les intervalles compris entre eux sont évidemment en même nombre.

A. *Nombre de transformations de $T_n - T_{n-1}$.* — Pour passer de T_{n-1} à T_n nous aurons à définir :

1° *Du côté qui ne contient pas i_n , il y a $(n - 1 + 1)$ intervalles, donc n transformations, cependant, dans l'intervalle compris entre i_{n-1} et l'intervalle le plus proche (fig. 17) il n'y a pas une transformation,*

Fig. 17.



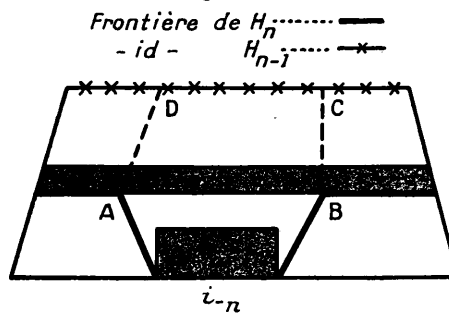
mais *trois* : la transformation au-dessus de r_n (transformation quadratique), la transformation dans r_n , une similitude dans le trapèze construit sur l'extrémité de r_n ; donc le nombre total de transformations dans $\mathcal{H}_n - \mathcal{H}_{n-1}$, de ce côté, sera

$$n + 3 - 1 = n + 2.$$

2° $n + 1$ transformations entre les intervalles, mais ce nombre subit les changements suivants :

a. La partie ABCD située entre r_{n-1} et r_n au-dessus de r_{-n} n'est pas

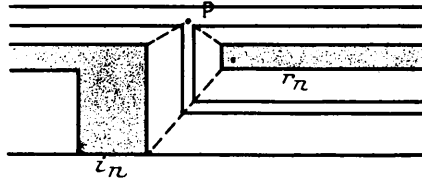
Fig. 18.



comprise entre des diagonales et doit se transformer séparément, nous aurons donc *une transformation* de plus (fig. 18).

b. Le point P divise horizontalement les trapèzes, donc au lieu de 2 trapèzes élémentaires, nous devons en considérer 4, il nous faudra

Fig. 18 bis.



encore définir séparément la transformation dans r_n , nous ajouterons donc

$$4 + 1 - 2 = 3 \text{ transformations;}$$

donc

$$(n + 1) + 1 + 3 = n + 5.$$

3° La transformation est définie entre d'_{-n} et d''_{-n} dans 8 régions.

4° Entre r_n et d'_n la transformation est une similitude; donc T_n dans $\mathcal{H}_n - \mathcal{H}_{n-1}$ se composera de

$$(n + 2) + (n + 5) + 8 + 1 = 2n + 16 \text{ transformations.}$$

Il nous faut maintenant le nombre de transformations à définir pour T_0 , T_1 et T_2 , puisque ces transformations ne peuvent se faire suivant la règle générale, les diagonales ne pouvant être transformées en des lignes droites.

B. Nombre de transformations de T_0 , T_1 et T_2 . — T_0 , nous l'avons vu, se réduit à une transformation topologique θ_0 .

Pour T_1 nous suivons r_1 et comptons le nombre minimum de trapèzes élémentaires obtenus :

| | |
|-----------------------------------|-------------|
| Dans $\Delta \pi AO$ | 3 trapèzes |
| » $\varepsilon IH \varphi$ | 2 » |
| » $AOB \eta$ | 2 » |
| » $B \eta C \zeta$ | 2 » |
| » $D \delta' E \delta$ | 5 » |
| » $E \delta F \gamma$ | 3 » |
| » $F \gamma G \beta$ | 3 » |
| » $G \theta H \varphi$ | 2 » |
| » $x \alpha \omega \alpha'$ | 3 » |
| » $x \alpha \beta \zeta$ | 2 » |
| Total | <u>27</u> » |

La région comprise entre les diagonales aboutissant sur r_{-1} peut être divisée en 14 trapèzes.

Donc pour définir T_1 , on a à définir 41 transformations quadratiques, plus les 3 transformations θ_{-1} , θ_0 et θ_1 , qui sont des homéomorphismes quelconques dans r_1 , r_0 et r_1 connues seulement sur les frontières de r_{-1} , r_0 et r_{+1} .

Passons maintenant à T_2 , on voit qu'il faut faire subir des modifications à la façon de transformer les parties de \mathcal{X}_2 qui avoisinent r_1 .

Nous pouvons, par exemple pour la région $J'\Omega\Psi\epsilon IJJ'$ (région traversée par le transformé des diagonales de r_{-1}) obtenir un nombre minimum de 7 trapèzes, alors que régulièrement il devrait y en avoir 4.

Au contraire la région $CD\nu\beta GB\alpha\zeta C$ pourra être décomposée en 3 trapèzes, alors que régulièrement elle devrait l'être en 6.

Cela est possible en laissant encore quelconque θ_2 , qui est la transformation, à l'intérieur de r_2 , déterminée seulement sur les bords.

Il en résulte que le nombre total des trapèzes à ajouter ne sera pas changé, et sera

$$2n + 16 = 20.$$

Le nombre de transformations à effectuer sera donné par la formule générale

$$23 + \sum_{k=1}^n (2k + 16) = \underline{n^2 + 17n + 23}.$$

Il faut ajouter à ce nombre les $(2n + 1)$ transformations :

$$\theta_0, \theta_1, \theta_{-1}, \theta_2, \theta_{-2}, \dots$$

$\theta_0, \theta_{-1}, \theta_1, \dots$, ne sont définies en général que sur les frontières et peuvent être déterminées arbitrairement à l'intérieur à condition d'être continues et biunivoques.

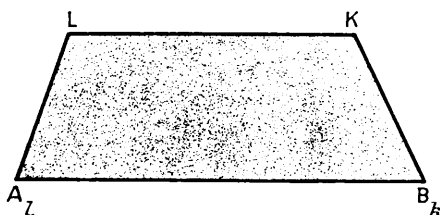
θ_n est également arbitraire jusqu'à la première diagonale que coupe r_n .

Il est intéressant de laisser arbitraire le choix de ces θ_n , car nous pouvons ainsi choisir T_n comme une transformation à volonté :

- 1° Changeant l'anneau en lui-même;
- 2° Changeant l'anneau en une partie de lui-même;
- 3° Changeant l'anneau en une région le contenant.

6° LA TRANSFORMATION DÉFINITIVE \mathcal{C} . — L'anneau diminué d'une région \mathcal{H}_n (ou \mathcal{K}_n) se compose d'un certain nombre ⁽¹⁾ de régions de l'espèce ci-contre sur la frontière desquelles T_n est déterminée (voir *fig. 23* et *7*).

Fig. 19.



Il est possible de choisir un nombre N assez grand pour que les régions déterminées pour T_n soient de diamètre inférieur à ε , en effet leur hauteur est au plus $\left(\frac{3}{7}\right)^{n-1}$ et leur longueur, la distance d'un intervalle à l'intervalle le plus proche, longueur qui tend vers zéro pour n croissant indéfiniment.

Soient deux transformations T_i et T_j telles que $i, j > N$.

Pour un point $P(x, y)$ quelconque de \mathcal{H}_N on a évidemment

$$\begin{aligned} X_i(x, y) &= X_j(x, y), \\ Y_i(x, y) &= Y_j(x, y) \end{aligned}$$

et un point non contenu dans \mathcal{H}_N sera contenu dans l'une des petites régions ci-dessus, région qui se transforma en une autre région bien définie de \mathcal{H}_N , soient l_N et l'_N . On choisit N de façon que le diamètre d'un l'_N quelconque soit inférieur à ε .

Tout point intérieur à l_N a évidemment son transformé dans l'_N par n'importe quel T_n , $n \geq N$, donc la distance des transformés du même point est inférieure au maximum du diamètre des l'_N , donc

$$|X_i - X_j| < \varepsilon, \quad |Y_i - Y_j| < \varepsilon.$$

On a ainsi pour tout point P de l'anneau

$$|X_i - X_j| < \varepsilon, \quad |Y_i - Y_j| < \varepsilon \quad (\text{pour } i, j > N).$$

(1) On peut préciser : ce nombre sera, d'un côté, n , de l'autre $n + 1$, donc $2n + 1$.

Donc les transformations continues T_n convergent uniformément vers une transformation continue \mathfrak{T} .

\mathfrak{T} est continue dans tout l'anneau, donc uniformément continue et laisse invariant l'ensemble E formé par tous les r_n ; l'ensemble fermé \bar{E} , c'est-à-dire la courbe C , est donc invariant par \mathfrak{T} .

Comme d'autre part, \mathfrak{T} change r_n en r_{n-2} , \mathfrak{T} a le coefficient de rotation τ_1 par rapport à l'intérieur R_i et le coefficient de rotation τ_2 par rapport à l'extérieur R_e , coefficients qui ont été choisis de signes contraires.

La transformation obtenue est bicontinue, on voit immédiatement qu'elle est biunivoque de la façon suivante : Si un point P est sur un bord de l'anneau il appartient à une seule suite de trapèzes emboîtés situés entre le bord et $\mathcal{H}_n (n \rightarrow \infty)$, il lui correspondra un seul point, limite unique des trapèzes emboîtés correspondants situés entre ce bord et \mathcal{H}_n . Si maintenant deux points P et Q ne sont pas sur les bords, ils appartiennent à un même \mathcal{H}_n pour $n \geq N$, N fixe. Ils appartiennent alors, soit à un même trapèze de \mathcal{H}_n , soit à deux trapèzes, mais dans les deux cas la biunivocité est évidente.

AUTRES PROPRIÉTÉS DE C . — C a encore d'autres propriétés intéressantes :

C est un continu indécomposable.

En effet tout vrai sous-continu de C est continu de condensation de C , ce qui oblige C à être indécomposable (¹).

Il serait intéressant d'étudier plus à fond la transformation de C . Par \mathfrak{T} , C n'a aucun point fixe accessible.

Mais C a quatre points fixes inaccessibles situés dans les régions,

$$G\theta H\varphi, \quad B\eta AO, \quad E\delta F\gamma, \quad \psi \varepsilon IJ,$$

et il n'y en a pas d'autre.

En un point fixe P passe une droite qui reste invariante dans son

(¹) *Fundamenta Mathematicæ* : KURATOWSKI, loc. cit.

ensemble (du moins assez près de P) par la transformation \mathfrak{C} ; cette droite est formée de points inaccessibles de la courbe.

On peut aussi, pour étudier la transformation, construire le transformé d'un rayon (ou d'un cercle), c'est une courbe de Jordan qui, sauf, peut-être, près des bords se compose d'un nombre fini d'arcs de courbes du second degré.

Explication des planches.

I. J'ai représenté sur la grande planche les diagonales de \mathcal{H}_3 et leurs correspondantes dans \mathcal{K}_3 . Deux diagonales homologues ont les mêmes noms à leurs extrémités; le numéro du r_n sur lequel ces points sont situés donne l'indice dont il faut affecter les lettres marquées à ces extrémités, le lecteur est prié de bien vouloir ajouter par la pensée ces indices aux lettres marquées sur la figure, la clarté du dessin exigeait qu'on les omette.

J'ai tracé aussi $\alpha'_0 \gamma_0$ et son homologue par T : $\alpha'_{-2} \gamma_{-2}$ et aussi $A'_1 m_1$ et son homologue par T : $A'_{-3} m_{-1}$.

II. La déformation subie par les boucles s'opère dans le passage de \mathcal{H}_2 à \mathcal{K}_2 . Pour rendre compréhensible cette déformation, j'indique six étapes successives de la déformation des régions r_0, r_1, r_2 ainsi que des diagonales qui les unissent.

Il est bon d'étudier ces dessins une première fois en considérant seulement r_0 et r_1 , puis une autre fois en considérant r_0, r_1 et r_2 .

Ces images donnent une idée de la déformation subie par les boucles non tracées, en effet la région située entre r_2 et l'un des bords subit approximativement une rotation d'un seul bloc, de même pour l'autre région similaire entre r_2 et le second bord.

Puis, dans l'espace restant, les boucles non tracées ont leur déformation définie par la déformation des bords des trapèzes.

Il serait possible de donner une autre démonstration rigoureuse (d'ailleurs voisine de la précédente) en partant de ces dessins. Le dessin des figures intermédiaires peut être exact, sa détermination par le calcul serait compliquée et superflue.

Il est intéressant aussi de chercher le transformé d'un rayon par

exemple. On obtient une courbe qui *tourne en général à droite*, la forme même de la courbe avec ses nombreux angles droits empêche cette condition d'être satisfaite partout, néanmoins elle est satisfaite en un assez grand nombre de points pour donner à la transformation une ressemblance générale avec la transformation T_ε^{-1} de M. Birkhoff.

J'ai tracé des transformés de rayons, je ne puis pas garantir l'exactitude du tracé en tout point mais seulement son allure générale, comme il suffirait de remplacer les transformations quadratiques par d'autres transformations topologiques un peu plus compliquées pour permettre à un tel transformé d'être tout à fait exact, il peut suffire à faire saisir l'allure de la transformation.