JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

POTRON

Sur les espaces de Riemann admettant un groupe isométrique à $n(n+1)/2$ paramètres

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 13 (1934), p. 197-216.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1934_9_13__197_0>

Sur les espaces de Riemann admettant un groupe isométrique à $n(n+1)/2$ paramètres;

PAR L'ABBÉ **POTRON**,

Professeur à l'Institut catholique de Paris.

INTRODUCTION.

Les espaces de Riemann à n dimensions et à courbure riemannienne constante [localement euclidiens, elliptiques ou hyperboliques (¹)], caractérisés par une métrique euclidienne ou cayleyenne, admettent des groupes de transformations isométriques à $n(n+1)/2$ paramètres. Par un choix convenable des variables, les t^ons^ ∞^les^ (transformations infinitésimales) génératrices de ces groupes sont pour le groupe euclidien les $p_i = \partial/\partial x^i$ et les $r_{hk} = x^h\partial/\partial x^k - x^k\partial/\partial x^h$, pour les groupes cayleyens les $p_i + \varepsilon x^i \sum x^l p_l$ et les r_{hk} ($\varepsilon = \pm 1$; $i, h, k, l = 1, \ldots, n$).

Les groupes cayleyens sont les groupes projectifs conservant l' « absolu », c'est-à-dire la $(n-1)$-sphère d'équation

$$\sum (x^i)^2 + \varepsilon = 0 \quad (^2).$$

Je me propose de montrer que *si, dans un espace de Riemann à n dimensions, les transformations isométriques forment un groupe* G *à*

(¹) *Cf.* CARTAN, *Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann*, p. 59-89 et 133-177.

(²) *Voir* BIANCHI, *Teoria dei Gruppi*, p. 532-537, ou LIE-ENGEL, *Transformationsgruppen*, t. III, p. 354.

$n(n+1)2$ paramètres, ce groupe G *est nécessairement semblable à l'un des trois groupes euclidien ou cayleyens* ([1]).

Je montrerai d'abord que ce groupe G a nécessairement, en un point ordinaire, n t^{ons} ∞^{les} indépendantes d'ordre zéro, et $n(n-1)/2$ d'ordre 1, dont les termes de moindre degré sont complètement déterminés. J'établirai ensuite que le groupe G′ des transformations conformes contient une certaine t^{on} ∞^{le} U, d'ordre 1, permutable à toutes celles de même ordre de G, puis que G′ est un groupe à $(n+1)(n+2)/2$ paramètres, obtenu en adjoignant, aux t^{ons} ∞^{les} de G, d'abord U, puis n t^{ons} ∞^{les} d'ordre 2, dont les termes de moindre degré sont complètement déterminés. En utilisant un théorème général de Lie ([2]), ce résultat permet de conclure immédiatement que G′ est semblable au groupe G'_1 des transformations conformes de l'espace euclidien. Je montrerai enfin que tout diviseur G_1 de G'_1, semblable à G, est semblable à l'un des trois groupes euclidien ou cayleyens.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Soit un espace de Riemann ([3]) défini par

$$ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik}\, du^i\, du^k, \qquad g = |g_{ik}| \neq 0 \tag{1}$$

et

$$X = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

une t^{on} ∞^{le} de G. Les coefficients de X sont définis par les équations de

([1]) Ces résultats ont fait l'objet de deux Notes à l'Académie des Sciences (*C. R. Acad. Sc.*, t. 195, 1932, p. 747 et 850). Ils sont voisins, mais cependant distincts, des résultats obtenus par Lie (*Transformationsgruppen*, t. III, p. 481-507).

([2]) Lie-Engel, *Transformationsgruppen*, t. I, p. 618.

([3]) Les fonctions g_{ik} de $u^1, \ldots, u^n$ sont supposées analytiques. En un point dit *ordinaire*, toutes ces fonctions sont régulières ainsi que toutes les fonctions définissant éventuellement des changements de variables; et le discriminant g est $\neq 0$.

Killing [1].

$$(2) \qquad \sum_\lambda \left(g_{i\lambda}\frac{\partial\xi^\lambda}{\partial u^k} + g_{k\lambda}\frac{\partial\xi^\lambda}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^\lambda}\right) = 0 \qquad (i,\ k = 1,\ \ldots,\ n).$$

Les premières conséquences différentielles de ces équations sont résolubles par rapport à toutes les dérivées secondes. Les termes contenant les dérivées secondes sont en effet $\sum_\lambda \left(g_{i\lambda}\frac{\partial^2\xi^\lambda}{\partial u^h\,\partial u^k} + g_{k\lambda}\frac{\partial^2\xi^\lambda}{\partial u^i\,\partial u^h}\right)$. Si l'on forme deux expressions analogues en permutant circulairement les indices i, h, k, et si l'on retranche la troisième de la somme des deux premières, on obtient $2\sum_\lambda g_{i\lambda}\frac{\partial^2\xi^\lambda}{\partial u^h\,\partial u^k}$. Si alors g^{rs} désigne en général $(1/g)\partial g/\partial g_{rs}$, on aura

$$\sum_{i,\lambda} g^{il} g_{i\lambda} \frac{\partial^2\xi^\lambda}{\partial u^h\,\partial u^k} = \frac{\partial^2\xi^l}{\partial u^h\,\partial u^k}.$$

Il en résulte immédiatement que le groupe G, en un point ordinaire, n'a pas de t$^{\text{on}}$ ∞^{le} d'ordre > 1 [2].

Posons maintenant

$$\frac{\partial\xi^\lambda}{\partial u^k} = p^{\lambda k},$$

et considérons les formes linéaires à n^2 variables, qui figurent dans (2),

$$F_{ik} = \sum_\lambda (g_{i\lambda}p^{\lambda k} + g_{k\lambda}p^{\lambda i}) \qquad (i = 1,\ \ldots,\ n;\ k = i,\ \ldots,\ n).$$

Leur nombre est $N = n(n+1)/2$. Elles sont indépendantes. En effet, par le changement de variables

$$p_i^h = \sum_\lambda g_{i\lambda}p^{\lambda h},$$

F_{ik} devient $p_i^k + p_k^i$. Il est clair que ces N formes sont indépendantes, chaque variable p_i^k $(k \geqq i)$ ne figurant que dans l'une d'elles. Ainsi les

---

[1] Bianchi, *Teoria...*, p. 495.

[2] Bianchi, *Teoria...*, p. 142-145.

N équations (2) peuvent être résolues par rapport à N des n^2 dérivées premières. On en conclut [1] que *le nombre des paramètres est* $\leqq n + n^2 - \mathrm{N} = n(n+1)/2$ *et que si ce maximum est atteint (ce qui est le cas du groupe* G*), il y a, en un point ordinaire,* n *t*

2. Soit A un point ordinaire, où je supposerai $u^1 = \ldots = u^n = 0$. J'effectuerai [2], sur les u^i (et par suite sur les du^i), une substitution linéaire à coefficients constants telle que l'on ait, au point A,

$$ds_0^2 = \Sigma (du^i)^2.$$

Les cosinus directeurs α^i d'une direction issue de A vérifient en ce cas

$$(3) \qquad \Sigma(\alpha^i)^2 = 1.$$

On sait [3] qu'alors le stabilisateur G_0 du point A dans G est engendré par les $n(n-1)/2$ t

dantes d'ordre zéro, et $n(n-1)/2$ d'ordre 1, dont les termes de moindre degré sont complètement déterminés ([1]).

3. A toute direction (α) issue de A, il existe une géodésique tangente. L'arc AM $= x^1$ de cette géodésique et les n cosinus directeurs α^i, liés par (3), déterminent le point M. Inversement tout point M, voisin de A, détermine une géodésique AM, la direction (α) de sa tangente en A, et l'arc AM $= x^1$. Je puis considérer $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ comme coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un point μ de la $(n-1)$-sphère (Σ) représentée par (3), et former une représentation paramétrique $\alpha^i = f_i(x^2, \ldots, x^n)$ de (Σ). En supposant qu'à tout point μ de (Σ) correspond un seul point $m(x^2, \ldots, x^n)$, je puis substituer, aux coordonnées $u^1, \ldots, u^n$, les coordonnées $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

Je prendrai, pour $x^2, \ldots, x^n$, les coordonnées cartésiennes rectangulaires de la projection centrale m de μ sur le $(n-1)$-plan (P) d'équation $\alpha^1 = 1$. On a alors la représentation paramétrique

$$(6)\qquad \begin{cases} \alpha^1 = (1+\mathfrak{X})^{-\frac{1}{2}}, & \mathfrak{X} = (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2, \\ \alpha^i = x^i(1+\mathfrak{X})^{-\frac{1}{2}} & (i = 2, \ldots, n). \end{cases}$$

L'élément linéaire devient alors

$$(7)\qquad ds^2 = \sum_{r,s} h_{rs}\, dx^r\, dx^s, \qquad h_{rs} = \sum_{i,k} g_{ik} \frac{\partial u^i}{\partial x^r} \frac{\partial u^k}{\partial x^s}.$$

Je dis que l'on a

$$h_{11} = 1, \qquad h_{1l} = 0 \qquad (l = 2, \ldots, n).$$

En effet, quand x^1 varie seul, le point décrit une géodésique, sur laquelle $ds = dx^1$; d'où $1 = h_{11}$; et, par suite, en introduisant les symboles de Christoffel ([2]),

$$(8)\qquad 0 = \frac{\partial h_{11}}{\partial x^j} = 2\Gamma_{11j} = 2\Gamma_{j11} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

([1]) *Cf.* LIE-ENGEL, *ibid.*, p. 325-333. Lie démontre, par des calculs assez pénibles, que la structure de G est alors nécessairement celle du groupe euclidien ou de l'un des deux groupes cayleyens.

([2]) BIANCHI, *Geometria differenziale*, seconde édition, t. II, p. 63, ou CARTAN, *Leçons...*, p. 35.

D'autre part, les géodésiques sont définies par les équations différentielles (¹)

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \sum_{h,k} \Gamma_{h}{}^{i}{}_{k} \frac{dx^h}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0.$$

Ces équations doivent être vérifiées pour $x^1 = s, dx^2 = \ldots = dx^n = 0$; il faut donc

$$\Gamma_1{}^i{}_1 = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

d'où

$$\Gamma_{1j1} = \sum_i g_{ij} \Gamma_1{}^i{}_1 = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

On a donc

$$\frac{\partial h_{1j}}{\partial x^1} = \Gamma_{1j1} + \Gamma_{j11} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

et les h_{1j} ne dépendent pas de x^1. Mais les

$$h_{1l} = \sum_{i,k} g_{ik} \frac{\partial u^i}{\partial x^1} \frac{\partial u^k}{\partial x^l}$$

sont tous nuls en A. En effet, comme u^k s'annule avec x^1, quels que soient $x^2, \ldots, x^n$, $\partial u^k/\partial u^l$ s'annule aussi avec x^1, et pour $x^1 = 0$, $\partial u^i/\partial x^1$ se réduit à α^i.

Ainsi l'élément linéaire a la forme (²)

$$ds^2 = (dx^1)^2 + d\sigma^2, \qquad d\sigma^2 = \sum_{i,k} g_{ik}\, dx^i\, dx^k, \tag{10}$$

les indices i et k parcourant seulement $2, \ldots, n$, mais les g_{ik} dépendant de $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

4. Tout point M a pour coordonnées, soit $x^1, x^2, \ldots, x^n$, soit $x^1, \alpha^1, \ldots, \alpha^n$, les α^i liés par (3), et exprimés, par (5), en fonction de $x^2, \ldots, x^n$. Le stabilisateur $G_0 < G$ du point A, qui transforme tout arc de géodésique en un arc de géodésique égal, laisse inaltérée la

---

(¹) LEVI-CIVITA, *Absolute Differentialkalkül*, p. 61; CARTAN, *Leçons...*, p. 41 et 98.

(²) *Cf.* BIANCHI, *Geometria*, seconde édition, t. II, p. 336; CARTAN, *Leçons...*, p. 109.

variable x^1. Il conserve donc toute variété V_1, à $n-1$ dimensions, représentée par $x^1 = \text{const.}$, ainsi que l'élément linéaire $d\sigma$ de cette variété. Les coordonnées variables d'un point quelconque de V_1 sont, ou bien les α^i liés par (3) [coordonnées d'un point μ de (Σ)], ou bien $x^2, \ldots, x^n$ [coordonnées de la projection centrale m de μ sur le $(n-1)$-plan (P) d'équation $\alpha^1 = 1$]. L'action de G_0 sur les points μ est (n° **2**) celle du groupe Γ engendré par les ρ_{hk}. L'action de G_0 sur les points m sera donc la même que celle H_0 de Γ. Or on sait (¹) que, si deux t^ons^ ∞^les^ correspondantes de Γ et H_0 sont :

$$A = \sum a_i \frac{\partial}{\partial \alpha^i}, \qquad X = \sum \xi_k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

les ξ_k sont déterminés par les équations

$$(11) \qquad a_i = X\alpha^i = \sum_k \xi_k \frac{\partial \alpha^i}{\partial x^k} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Si

$$A = \rho_{1l} \qquad (l = 2, \ldots, n),$$

on trouve, d'après (6),

$$X_l = \frac{\partial}{\partial x^l} + x^l\left(x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \ldots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n}\right),$$

et, si

$$A = \rho_{hk} \qquad (h, k = 2, \ldots, n),$$

on trouve

$$X_{hk} = x^h \frac{\partial}{\partial x^k} - x^k \frac{\partial}{\partial x^h}.$$

Le groupe H_0 est donc le groupe projectif conservant la $(n-2)$-sphère d'équation

$$(x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2 + 1 = 0 \quad (^2).$$

Il conserve un élément linéaire $d\sigma_1$, qui est (³), à un facteur près

---

(¹) Bianchi, *Teoria...*, p. 161.

(²) Bianchi, *Teoria,...* p. 532.

(³) Lie-Engel, *Transformationsgruppen*, t. III, p. 354; Cartan, *Leçons...*, p. 141.

dépendant de x^1 seul, donné par

$$(12) \qquad d\sigma_1^2 = \frac{(1+\mathfrak{X})\Sigma(dx^k)^2 - (\Sigma x^k\, dx^k)^2}{(1+\mathfrak{X})^2}.$$

L'élément linéaire $d\sigma$ de V_1 conservé par G_0, on a donc la forme $R(x^1)\,d\sigma_1$; et (10) devient

$$(13) \qquad ds^2 = (dx^1)^2 + R^2(x^1)\,d\sigma_1^2.$$

5. *La fonction* $R(x^1)$ *est le produit, par* x^1, *d'une série entière en* $(x^1)^2$, *se réduisant à* 1 *pour* $x^1 = 0$. Considérons en effet deux géodésiques issues de A, correspondant aux deux points $m_k(x_k^2, \ldots, x_k^n)$ $(k = 1, 2)$ du $(n-1)$-plan (P) (n° **3**). Sur toute variété V_1, ces géodésiques déterminent deux points B_k. On peut représenter un arc $B_1 B_2$, situé sur une V_1 quelconque, par

$$x_h = \varphi_h(t) \quad (0 \leqq t \leqq 1), \qquad \varphi_h(0) = x_1^h, \qquad \varphi_h(1) = x_2^h \qquad (h = 2, \ldots, n).$$

L'élément linéaire de cet arc est, d'après (12) et (13), $R(x^1)\,\psi(t)\,dt$, et sa longueur a pour mesure

$$(14) \qquad L = \mathfrak{S}_0 R(x_1), \qquad \mathfrak{S}_0 = \int_0^1 \psi(t)\,dt.$$

Introduisons alors les coordonnées normales de Riemann relatives au point A [1], c'est-à-dire les $y^i = x^1 \alpha^i$ $(i = 1, \ldots, n)$; l'élément linéaire prend la forme

$$(15) \qquad ds^2 = \sum_i (dy^i)^2 + \sum_{h,k} F_{hk}\, dy^h\, dy^k,$$

les F_{hk}, analytiques comme les g_{ik}, étant des séries entières en $y^1, \ldots, y^n$, commençant par des termes du second degré. On a d'ailleurs

$$\Sigma(dy^i)^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2\,\Sigma(d\alpha^i)^2;$$

et, d'après la définition de la métrique cayleyenne elliptique [2], comme on peut du reste le vérifier directement sur (6) et (12), on a

$$\Sigma(d\alpha^i)^2 = d\sigma_1^2.$$

---

(1) CARTAN, *Leçons...*, p. 224.
(2) *Ibid.*, p. 133 et 140.

La comparaison de (13) et (15) donne donc

$$[R^2(x^1) - (x^1)^2]\, d\sigma_1^2 = \sum_{h,k} F_{hk}\, dy^h\, dy^k.$$

Si, x^1 restant fixe, on change α^i en $-\alpha^i$, donc y^i en $-y^i$ et dy^i en $-dy^i$, cette formule montre que F_{hk} ne change pas, donc que tous ses termes sont de degré pair en $y^1, \ldots, y^n$. On a donc, en remplaçant les y^i par $x^1 \alpha^i$,

$$F_{hk} = a_{hk2}(x^1)^2 + a_{hk4}(x^1)^4 + \ldots,$$

les a_{hkl} étant fonctions de $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$. L'élément linéaire d'une variété V_1 ($dx^1 = 0$) est donc donné, d'après (15), par

$$d\sigma^2 = (x^1)^2\, d\sigma_1^2 + \sum_{h,k} [b_{hk2}(x^1)^2 + b_{hk4}(x^1)^4 + \ldots]\,(x^1)^2\, d\alpha^h\, d\alpha^k.$$

Sur l'arc $B_1 B_2$, on a

$$d\sigma_1 = \psi(t)\, dt, \qquad \sum_{h,k} b_{hkl}\, d\alpha^h\, d\alpha^k = T'_l\, dt^2;$$

on en déduit, pour $d\sigma$, un développement

$$d\sigma = x^1 \psi(t)[1 + T_2(x^1)^2 + T_4(x^1)^4 + \ldots].$$

D'où, pour la longueur de l'arc $B_1 B_2$,

$$(16) \qquad L = x^1[\mathfrak{T}_0 + \mathfrak{T}_2(x^1)^2 + \ldots], \qquad \mathfrak{T}_l = \int_0^1 \psi(t) T_l\, dt.$$

La comparaison de (14) et (16) donne bien, pour $R(x^1)$, le développement annoncé.

6. Si maintenant x'^1 désigne une fonction $f(x^1)$ vérifiant

$$(17) \qquad \frac{dx^1}{R(x^1)} = \frac{dx'^1}{R(x'^1)} \qquad \text{ou} \qquad \frac{dx'^1}{dx^1} = \frac{R(x'^1)}{R(x^1)} = \rho,$$

on aura

$$ds'^2 = (dx'^1)^2 + R^2(x'_1)\, d\sigma_1^2 = \rho^2[(dx^1)^2 + R^2(x^1)\, d\sigma_1^2] = \rho^2\, ds^2.$$

La formule $x'^1 = f(x^1)$ définit donc une transformation conforme.

Or, si F est une primitive de $1/R$, l'intégration de (17) donne

$$F(x'^1) = F(x^1) + t.$$

Cette équation définit une fonction $x'^1 = f(x^1, t)$, qui vérifie, en même temps que (17),

$$x^1 = f(x^1, 0) \qquad \text{et} \qquad \frac{dx'^1}{dt} = \frac{1}{F'(x'^1)} = R(x'^1).$$

Les transformations considérées forment donc (¹) le groupe $\{X\}$ engendré par la $t^{\text{on}}\,\infty^{\text{le}}$ $X = R(x^1)\,d/dx^1$. Les variables étant différentes, chaque transformation de $\{X\}$ est évidemment permutable à toutes celles de H_0 (n° 3).

Cherchons les expressions Y et U de X par les coordonnées normales $y^1, \ldots, y^n$, puis par les coordonnées primitives $u^1, \ldots, u^n$. On aura (²)

$$Y = \sum \eta_i \frac{\partial}{\partial y^i}, \qquad \eta_i = Xy^i = R(x^1)\,\alpha^i = \frac{R(x^1)}{x^1}\,y^i;$$

comme $R(x^1)/x^1$ est (n° 4) une série entière en $(x^1)^2 = (y^1)^2 + \ldots + (y^n)^2$ commençant par 1, η_i est une série entière en $y^1, y^n, \ldots$, commençant par y^i. On aura ensuite

$$U = \sum \upsilon_l \frac{\partial}{\partial u^l}, \qquad \upsilon_l = \sum_i \eta_i \frac{\partial u^l}{\partial y^i}.$$

Or, si (α) est la direction de la tangente en A à une géodésique, et x^1 l'arc de cette géodésique, les coordonnées de M sont (³)

$$u^l = \alpha^l x^1 - \frac{(x^1)^2}{2} \sum_{h,k} (\Gamma_{hk}^l)_0\, \alpha^h \alpha^k + \ldots$$

ou, avec les coordonnées normales,

$$u^l = y^l - \frac{1}{2} \sum_{h,k} (\Gamma_{hk}^l)_0\, y^h y^k + \ldots,$$

(¹) Bianchi, *Teoria...*, p. 62.

(²) *Ibid.*, p. 68.

(³) Cartan, *Leçons...*, p. 230.

d'où l'on peut évidemment tirer une expression de y^i par une série entière

$$y^i = u^i + \sum_{h,k} C_{h\,k}^{\,i} u^h u^k + \ldots.$$

Il en résulte que η^i et $\partial u^i/\partial y^i$ sont des séries entières en $u^1, \ldots, u^n$ commençant respectivement par u^i et ε_{il}. Donc υ_i est bien une série entière en $u^1, \ldots, u^n$, commençant par u^i.

Ainsi, *si le groupe G des transformations isométriques a $n(n+1)/2$ paramètres, le stabilisateur $G_0 < G$ d'un point ordinaire A ($u^1 = \ldots = u^n = 0$) est semblable au groupe des déplacements de l'espace elliptique; ses systèmes d'intransitivité sont des variétés à $n-1$ dimensions dont chacune a une courbure riemannienne constante positive. Le groupe G' des transformations conformes contient un groupe $\{U\}$ engendré par*

$$U = \sum u^i \frac{\partial}{\partial u^i} + \ldots,$$

dont chaque transformation est permutable à toutes celles de G_0.

DEUXIÈME PARTIE.

7. Le groupe G' des transformations conformes contient donc certainement $n(n-1)/2+1$ t$^{\text{ons}}$ ∞^{les} indépendantes d'ordre 1 : les R_{hk} et U. L'action Γ', sur les directions (α) issues de A, du stabilisateur de A dans G' doit conserver l'équation $\Sigma(\alpha^i)^2 = 0$. Il ne peut donc (1) avoir d'autres t$^{\text{ons}}$ ∞^{les} que les $\rho_{hk} = \alpha^h \frac{\partial}{\partial \alpha^k} - \alpha^k \frac{\partial}{\partial \alpha^h}$ et $\upsilon = \sum \alpha_i \frac{\partial}{\partial \alpha^i}$. Par suite G' ne peut avoir d'autres t$^{\text{ons}}$ ∞^{les} d'ordre 1 que les R_{hk} et U. Mais G', contenant $P_i = \frac{\partial}{\partial u^i} + \ldots$ et $U = \sum u^i \frac{\partial}{\partial u^i} + \ldots$ contient aussi $(P_i U) = \frac{\partial}{\partial u^i} + \ldots$ et $(P_i U) - P_i = V_i$ qui est d'ordre $\geqq 1$. Deux cas sont alors à distinguer.

(1) LIE-ENGEL, *Transformationsgruppen*, t. III, p. 316.

8. *Si les V_i sont tous nuls ou d'ordre* 1, G *est semblable au groupe des déplacements euclidiens*. En effet, on a alors

$$(P_i U) - P_i = \alpha_i U + \Sigma \beta_{hk} R_{hk}.$$

Ces relations, jointes à $(U R_{hk}) = 0$, montrent que U, les P_i et les R_{hk} engendrent un groupe G'. D'après un théorème général sur les groupes transitifs contenant U (¹), G' est semblable à

$$G'_1 = \{ p_1, \ldots, p_r ; u ; r_{12}, \ldots, r_{n-1,n} \},$$

où

$$p_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad u = \sum x^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \qquad r_{hk} = x^h \frac{\partial}{\partial x^k} - x^k \frac{\partial}{\partial x^h},$$

dont la structure est

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (p_i\, p_k) = 0, \quad (p_i\, u) = p_i, \quad (p_i\, r_{il}) = p_l, \quad (p_i\, r_{hl}) = 0, \\ \qquad (u\, r_{hk}) = 0, \quad (r_{ih}\, r_{hl}) = r_{il}, \quad (r_{ih}\, r_{kl}) = 0. \end{array} \right.$$

Le groupe G est alors semblable à un diviseur G_1 de G'_1. Comme un changement de variables n'altère ni les ordres des t^ons^ ∞^les^ (²), ni la structure, G_1 doit contenir n t^ons^ ∞^les^ indépendantes d'ordre zéro,

$$\pi_i = \sum_k \lambda_{ik} p_k + \ldots$$

et $n(n-1)/2$ d'ordre 1,

$$\rho_{hk} = \sum_{(\alpha\beta)} \lambda_{hk\alpha\beta}\, r_{\alpha\beta} + \mu_{hk} u,$$

dont aucune n'est permutable à toutes les autres, et dont aucune, par suite, ne peut être u. Cette condition exige $|\lambda_{(hk)(\alpha\beta)}| \neq 0$, et l'indépendance des π_i exige $|\lambda_{ik}| \neq 0$. On peut donc prendre $\pi_i = p_i + \ldots$, $\rho_{hk} = r_{hk} + \alpha_{hk} u$. Mais $(\rho_{hk}\, \rho_{kl}) - \rho_l = -\alpha_{hl} u$; donc

$$\alpha_{hl} = 0 \qquad \text{et} \qquad \rho_{hk} = r_{hk}.$$

On peut alors prendre $\pi_i = p_i + \alpha_i u$. Mais $(\pi_i\, r_{il}) - \pi_l = -\alpha_l u$; donc

$$\alpha_l = 0 \qquad \text{et} \qquad \pi_i = p_i.$$

(¹) LIE-ENGEL, *Transformationsgruppen*, t. I, p. 618.

(²) BIANCHI, *Teoria...*, p. 136.

Donc le seul diviseur de G'_1 qui soit semblable à G est le groupe $D_0 = \{p_1, \ldots, p_n, r_{12}, \ldots, r_{n-1,n}\}$ des déplacements euclidiens.

9. Supposons maintenant $(P_i U) - P_i$ d'ordre $q \geqq 2$. Si $q > 2$, G' contient $(P_h V_i)$ d'ordre $q - 1$; en formant les alternées successives, on arrivera à une t^{on} ∞^{le} W d'ordre 2. On sait (¹) que W a nécessairement la forme

$$W = \sum c_k v_k + \ldots, \qquad v_k = 2x^k \sum_i x^i p_i - \sum_i (x^i)^2 p_k,$$

que G' contient alors les n t^{ons} ∞^{les} indépendantes d'ordre 2, $T'_k = v_k + \ldots$, et n'en contient aucune d'ordre > 2.

Ce groupe G', transitif et contenant U, est (²) semblable à

$$G'_1 = \{p_1, \ldots, p_n;\ u;\ r_{12}, \ldots, r_{n-1,n};\ v_1, \ldots, v_n\},$$

dont la structure est donnée par (1) et

$$(2) \qquad \begin{cases} (p_h v_h) = 2u, & (p_h v_k) = 2r_{kh}, & (u v_h) = v_h, \\ (r_{hl} v_l) = v_h, & (r_{hk} v_l) = 0, & (v_h v_k) = 0. \end{cases}$$

Ce groupe G' est (³) le groupe des transformations conformes de l'espace euclidien, groupe total (⁴) de $\Sigma(dx^i)^2$.

Comme au n° **8**, G est semblable à un diviseur G_1 de G'_1 engendré par

$$\pi_i = p_i + \alpha_i u + \sum_l \beta_{il} v_l \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$\rho_{hk} = r_{hk} + \gamma_{hk} u + \sum_l \delta_{hkl} v_l \qquad (h = 1, \ldots, n;\ k = h+1, \ldots, n).$$

En convenant que $\gamma_{kh} + \gamma_{hk} = \delta_{khl} + \delta_{hkl} = 0$, donc $\rho_{kh} + \rho_{hk} = 0$, on peut supprimer la restriction $k > h$.

(¹) LIE-ENGEL, *Transformationsgruppen*, t. III, p. 318.

(²) LIE-ENGEL, *ibid.*, t. I, p. 618.

(³) LIE-ENGEL, *ibid.*, t. III, p. 347.

(⁴) Le groupe *propre* de F conserve l'*expression* F ; le groupe *total* conserve seulement l'*équation* F = 0. *Cf.* DE SÉGUIER, *Groupes à invariant bilinéaire ou quadratique* (*Journ. de Math.*, 7ᵉ série, t. II, 1916, p. 283).

Le groupe G_1 n'ayant aucune t^{elle} ∞^{le} d'ordre > 1, les $(\rho_{ih}\,\rho_{hl}) - \rho_{il}$ et $(\rho_{ih}\,\rho_{kl})$, qui n'ont que des termes de degré 2, doivent être nulles. Ces conditions donnent

$$\gamma_{hk} = 0, \quad \delta_{ikl} = 0 \quad (\text{trois indices différents}), \quad \delta_{hlh} = \delta_{ili}, \quad \delta_{ihh} = \delta_{ill}.$$

Si donc on pose

$$\delta_{1i1} = \delta_i,$$

on a, quel que soit l,

$$\delta_{lil} = -\delta_{ill} = \delta_i$$

et

$$(3) \qquad \rho_{hk} = r_{hk} + \delta_k v_h - \delta_h v_k.$$

De même, les $(\pi_p\,\rho_{hl}) - \pi_l - 2\delta_k\,\rho_{hl}$ et $(\pi_h\,\rho_{kl}) - 2\delta_l\,\rho_{kh} - 2\delta_k\,\rho_{hl}$, qui n'ont que des termes de degré 2, doivent être nulles. Ces conditions donnent

$$\beta_{hl} = 0 \quad (l \neq h), \quad \beta_{hh} = \beta_{ll}, \quad \alpha_l = 2\delta_l.$$

Si donc on pose

$$\beta_{11} = \beta,$$

on a

$$(4) \qquad \pi_i = p_i + 2\delta_i u + \beta v_i.$$

La structure de G_1, que l'on vérifie directement, est donnée par

$$(5) \qquad \begin{cases} (\pi_h\,\pi_k) = 2\delta_k\pi_h - 2\delta_h\pi_k + 4\beta\rho_{kh}, \\ (\pi_h\,\rho_{hl}) = \pi_l + 2\delta_h\rho_{hl}, \qquad (\pi_h\,\rho_{kl}) = 2\delta_k\rho_{hl} - 2\delta_l\rho_{hk}, \end{cases}$$

$$(6) \qquad (\rho_{ih}\,\rho_{hl}) = \rho_{il}, \qquad (\rho_{ih}\,\rho_{kl}) = 0.$$

10. Mais, si l'on remplace π_i par $\pi'_i = \pi_i - 2\sum_k \delta_k\,\rho_{ik}$, on voit que les relations (5) sont remplacées par

$$(7) \qquad \begin{cases} (\pi'_h\,\pi'_k) = 4c\rho_{kh}, \qquad c = \beta - \Sigma\delta_k^2, \\ (\pi'_h\,\rho_{hl}) = \pi'_l, \qquad (\pi'_h\,\rho_{kl}) = 0. \end{cases}$$

Si $c = 0$, G_1 a la structure du groupe D_n des déplacements euclidiens. Si $c \neq 0$, posons

$$K^2 = \frac{\varepsilon}{4c}, \qquad \varepsilon = \pm 1, \qquad \varepsilon c > 0 \qquad \text{et} \qquad \pi''_i = K\pi'_i.$$

Les relatious (7) sont remplacées par

$$(8)\qquad (\pi''_h\, \pi''_k) = \varepsilon\rho_{kh}, \qquad (\pi''_h\, \rho_{hl}) = \pi''_l, \qquad (\pi''_h\, \rho_{kl}) = 0.$$

Or la structure (6)-(8) est celle du groupe

$$D_\varepsilon = \{ \varpi_1, \ldots, \varpi_n ; r_{12}, \ldots, r_{n-1,n} \},$$

où

$$\varpi_i = p_i + \frac{\varepsilon}{4} v_i.$$

Les groupes G_1, D_0, D_ε sont transitifs. Dans l'isomorphisme de G_1 à D_0, ou à D_ε, les stabilisateurs de l'origine se correspondent. Si donc $c = 0$, G_1 et G sont semblables (1) à D_0. Le ds^2 conservé par G est équivalent à $\Sigma(dx^i)^2$, conservé par D_0. Si $c \neq 0$, G_1 et G sont semblables à D_ε. Le $ds^2 = \Sigma g_{ik} du^i du^k$, conservé par G, est équivalent au $ds^2 = \Sigma h_{ik} dx^i dx^k$, conservé par D_ε, que je vais déterminer.

11. Si l'on désigne par ξ_{li} ($l = 1, \ldots, n(n+1)/2$; $i = 1, \ldots, n$) les coefficients des t$^{\text{ons}}$ ∞^{les} génératrices de D_ε, les h_{ik} doivent vérifier les équations de Killing

$$(9)\qquad \sum_\lambda \left(\xi_{l\lambda} \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^\lambda} + h_{i\lambda} \frac{\partial \xi_{l\lambda}}{\partial x^k} + h_{k\lambda} \frac{\partial \xi_{l\lambda}}{\partial x_i} \right) = 0.$$

On sait (2) que les h_{ik}, solutions de ce système, sont complètement déterminés par leurs valeurs initiales h^0_{ik} (en o), assujetties aux conditions suivantes : la forme quadratique $F = \sum h^0_{il} \alpha^i \alpha^l$ doit être définie positive, et invariante par chacune des t$^{\text{ons}}$ ∞^{les} ρ_{ij} du groupe Γ (n° **2**). Or la condition

$$0 = \rho_{ij} F = 2 \left(\sum_\lambda h^0_{j\lambda} \alpha^i \alpha^\lambda - \sum_\mu h^0_{i\mu} \alpha^j \alpha^\lambda \right)$$

donne

$$h^0_{ii} = h^0_{jj}, \qquad h^0_{ij} = 0 \qquad (j \neq i).$$

On a donc en o, à un facteur constant près,

$$ds_0^2 = \Sigma (dx^i)^2.$$

---

(1) Bianchi, *Teoria...*, p. 395; Lie-Engel, *Transformationsgruppen*, t. I, p. 425.

(2) Bianchi, *Teoria...*, p. 522-529.

Par suite, le ds^2 conservé par D_ε est, à un facteur constant près, complètement déterminé.

Or, si l'on prend ([1])

$$h_{ij} = 0 \quad (j \neq i), \qquad h_{ii} = \frac{1}{U^2}, \qquad U = 1 + \frac{\varepsilon}{4}\sum (x^j)^2,$$

le ds^2 est évidemment invariant par les ρ_{hk}. Pour ϖ_h, on a

$$\xi_{hi} = \frac{\varepsilon}{2} x^h x^i \quad (i \neq h), \qquad \xi_{hh} = 1 + \frac{\varepsilon}{4}\left[2(x^h)^2 - \sum (x^j)^2\right].$$

Si $k \neq i$, l'équation (9) se réduit à

$$\frac{\partial \xi_{hi}}{\partial x^k} + \frac{\partial \xi_{hk}}{\partial x^i} = 0.$$

Si $k = i$, elle devient

$$2\varpi_h U - \varepsilon x^h U = 0.$$

Ces relations sont toujours vérifiées.

Ainsi, *le ds^2 conservé par G est à un facteur constant près, équivalent à*

$$(10) \qquad ds^2 = \frac{\sum (dx^j)^2}{\left[1 + \varepsilon/4 \sum (x^j)^2\right]} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

C'est une des formes canoniques de l'élément linéaire d'un espace de Riemann, dont la courbure riemannienne a la valeur constante ε.

12. La forme canonique du ds^2 cayleyen déduit de la définition projective de la métrique cayleyenne est ([2])

$$(11) \qquad ds^2 = \varepsilon \frac{\left[\sum (x^i)^2 + \varepsilon\right]\sum (dx^i)^2 - \left(\sum x^i\, dx^i\right)^2}{\left[\sum x_i^2 + \varepsilon\right]^2}.$$

l'absolu étant la $(n-1)$-sphère $\Sigma(x^i)^2 + \varepsilon = 0$. On obtient la forme (10) en cherchant une représentation conforme de l'espace cayleyen sur l'espace euclidien ([3]).

([1]) *Cf.* BIANCHI, *Geometria*.... seconde édition, t. II.

([2]) LIE-ENGEL, *Transformationsgruppen*, p. 354.

([3]) CARTAN, *Leçons*.... p. 146; BIANCHI, *Geometria*..., p. 402–419.

Les constructions géométriques qui conduisent à cette représentation sont, en apparence, différentes pour l'espace elliptique et pour l'espace hyperbolique. On peut cependant les réunir dans un énoncé commun.

Considérons les points $(x_1, \ldots, x_n)$ de l'espace cayleyen, où la métrique est définie en prenant pour absolu la $(n-1)$-sphère

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 + 1 = 0, \tag{12}$$

comme appartenant au n-plan $x_{n+1} = 0$ de l'espace euclidien à $n+1$ dimensions. Faisons une projection conique de ce n-plan sur la n-sphère d'équation

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^{n+1})^2 - 2x^{n+1} = 0, \tag{13}$$

le centre C de projection étant tel que le n-cône, défini par ce point et la $(n-1)$-sphère (12) du n-plan $x_{n+1} = 0$, soit circonscrit à la n-sphère (13). On peut prendre pour C le point $x^1 = \ldots = x^n = 0$, $x^{n+1} = 2\varepsilon/(1+\varepsilon)$.

A un point (x) du n-plan $x_{n+1} = 0$ correspondra celui des deux points (y) de la n-sphère (13) alignés sur (x) et C pour lequel y^{n+1} est > 1 (point sur le n-hémisphère supérieur); et l'on aura

$$x^i = \frac{2y^i}{2 - (1+\varepsilon)y^{n+1}} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{14}$$

On fera ensuite correspondre au point (y) son inverse par rapport au point (o), la puissance d'inversion étant 4. Si

$$Z = (z^1)^2 + \ldots + (z^n)^2,$$

on aura

$$y^k = \frac{4z^k}{Z+4} \qquad (k = 1, \ldots, n+1;\ z_{n+1} = 2). \tag{15}$$

La correspondance $(x)-(z)$ est donc

$$x^i = \frac{4z^i}{Z - 4\varepsilon}. \tag{16}$$

On obtient ainsi, dans l'espace à n dimensions, une transformation étudiée par Darboux dans l'espace à trois dimensions [1].

---

[1] Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. III, p. 492.

Si l'on fait ce changement de variables dans (11), que l'on peut écrire, en posant $X = (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2$,

$$(17) \qquad ds^2 = \varepsilon \frac{(X+\varepsilon)\sum(dx^i)^2 - \dfrac{dX^2}{4}}{(X+\varepsilon)^2},$$

on obtient immédiatement

$$ds^2 = \frac{\sum(dz^i)^2}{\left(1+\varepsilon\dfrac{Z}{4}\right)^2};$$

c'est bien la forme (10)

L'élément linéaire de la n-sphère (13), considérée comme plongée dans un espace enclidien à $(n+1)$ dimensions, est

$$d\sigma^2 = (dy^1)^2 + \ldots + (dy^n)^2 + (dy^{n+1})^2,$$

où il faut tenir compte de (13) et de sa première conséquence différentielle

$$(18) \qquad y^1\,dy^1 + \ldots + y^n\,dy^n + (y^{n+1} - 1)\,dy^{n+1} = 0.$$

Si l'on pose

$$Y = (y^1)^2 + \ldots + (y^n)^2,$$

on a, en tenant compte de (13) et (18),

$$(19) \qquad d\sigma^2 = \sum (dy^i)^2 + \frac{dY^2}{4(1-Y)}.$$

D'après (13), on a

$$(1 - y^{n+1})^2 = 1 - Y$$

et, comme y^{n+1} est > 1,

$$1 - y^{n+1} = -(1-Y)^{\frac{1}{2}}.$$

Si, dans (14) on fait $\varepsilon = 1$, il vient

$$(20) \qquad y^i = -\frac{x^i}{(1-Y)^{\frac{1}{2}}}, \qquad Y = \frac{X}{1+X}, \qquad y^i = -\frac{x^i}{(1+X)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si l'on transforme (19) par (20), on obtient (17) où $\varepsilon = 1$. On vérifie ainsi que *l'élément linéaire du n-plan elliptique est equivalent à celui d'une n-sphère plongée dans l'espace euclidien à n + 1 dimensions* (¹).

(¹) *Cf.* CARTAN, *Leçons...*, p. 134-141.

Si, dans (14), on fait $\varepsilon = -1$, il vient $y^i = x^i$. On a alors, d'après (17) où $\varepsilon = -1$, et (19),

$$ds^2 = \frac{d\sigma^2}{1 - X}.$$

On vérifie ainsi que *la construction indiquée réalise une représentation conforme du n-plan hyperbolique sur la n-sphère plongée dans l'espace euclidien à $n+1$ dimensions* (¹).

Ainsi la n-sphère plongée dans l'espace euclidien à $n+1$ dimensions est toujours une représentation conforme de l'espace cayleyen, elliptique ou hyperbolique. Une inversion de cette n-phère ayant pour pôle un de ses points devait donc fournir une représentation conforme de l'espace cayleyen, elliptique ou hyperbolique, sur l'espace euclidien. C'est en effet ce que donne la forme (10) de l'élément linéaire.

15. La transformation (17) de Darboux s'obtient d'ailleurs immédiatement par l'application du théorème sur la similitude des groupes rappelé au n° **9** (²).

Les transformations infinitésimales du groupe G_x du ds^2 (11) (groupe projectif conservant la n-sphère $\Sigma x_i^2 + \varepsilon = 0$) sont

$$X_i = p_i + \varepsilon x_i \sum x_j p_j, \qquad p_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$
$$X_{hk} = x_h p_k - x_k p_h \qquad (h, k = 1, \ldots, n).$$

Celles du groupe G_y du ds^2 (10) sont

$$Y_i = q_i + \frac{\varepsilon}{4}\left(2 y_i \sum y_j q_j - q_i \sum y_j^2\right),$$
$$Y_{hk} = y_h q_k - y_k q_h, \qquad q_i = \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Les deux groupes ont la même structure

$$(Z_h Z_k) = Z_{kh}, \qquad (Z_h Z_{hk}) = Z_k, \qquad (Z_i Z_{hk}) = 0,$$
$$(Z_{ih} Z_{hk}) = Z_{ik}, \qquad (Z_{ij} Z_{hk}) = 0.$$

(¹) *Cf.* CARTAN, *Leçons*..., p. 149-152.

(²) BIANCHI, *Lezioni*..., p. 395, ou LIE-ENGEL, *Transformationsgruppen*, t. I, p. 425.

Ils sont transitifs, les $n\,X_i$ et les $n\,Y_i$ étant divergentes en o. Les stabilisateurs de o, respectivement engendrés par les X_{hk} et les Y_{hk}, se correspondent dans l'isomorphisme résultant de l'identité de structure. On a d'ailleurs immédiatement les relations

$$X_{hk} = x_h X_k - x_k X_h, \tag{21}$$

$$\left(1 - \frac{\varepsilon \sum y_j^2}{4}\right) Y_{hk} = y_h Y_k - y_k Y_h. \tag{22}$$

D'après le théorème rappelé ci-dessus, les deux groupes G_x et G_y sont semblables; le changement de variables qui transforme G_x en G_y s'obtient en égalant les coefficients des relations (21) et (22), d'où la transformation de Darboux,

$$x_i = \frac{y_i}{\left(1 - \frac{\varepsilon \sum y_j^2}{4}\right)}.$$