JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

SERGE BERNSTEIN

Sur la distribution des zéros des polynômes tendant vers une fonction continue positive sur un segment donné

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 8 (1929), p. 327-337.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1929_9_8__327_0>

Sur la distribution des zéros des polynomes tendant vers une fonction continue positive sur un segment donné;

Par Serge BERNSTEIN.

Soit $t_h(x)$ un polynome de degré h positif sur le segment $(-1, +1)$

$$(1)\qquad t_h(x) = t_h(0)\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{a_h}\right),$$

dont les racines sont ainsi réelles ou imaginaires conjuguées.

Formons pour chaque racine a_k l'expression

$$\rho_k = a_k + \sqrt{a_k^2 - 1},$$

où le signe devant le radical est tel que $|\rho_k| > 1$; alors

$$(2)\qquad \delta_k = \left|\frac{\rho_k}{2a_k}\right| = \left|\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{a_k^2}}}{2}\right|$$

représente le rapport de la demi-somme des axes de l'ellipse passant par le point a_k, ayant ses foyers en -1 et $+1$, au diamètre correspondant au même point a_k.

D'après un résultat que j'ai établi ailleurs ([1]), si l'on pose

$$(3)\qquad M_h = \delta_1\delta_2\ldots\delta_h,$$

on a

$$(4)\qquad \frac{\lambda_h}{t_h(0)} < M_h < \frac{L_h}{t_h(0)},$$

([1]) *Comptes rendus*, 186, p. 140.

si

(5) $$\lambda_h < t_h(x) < L_h \qquad \text{pour } -1 \leqq x \leqq 1\,;$$

de plus, quels que soient les polynomes $t_h(x)$ tendant uniformément sur $(-1, +1)$ vers la fonction continue positive $t(x)$, telle que

(6) $$\lambda < t(x) < L \qquad \text{sur } (-1, +1),$$

M_h tend vers une même limite M, telle que

(7) $$\frac{\lambda}{t(0)} < M < \frac{L}{t(0)}.$$

Nous allons tirer de là quelques théorèmes relatifs à la distribution des zéros des polynomes $t_h(x)$, qui résulteront essentiellement de la remarque suivante.

Soit

(8) $$a_k = R_k e^{i\theta_k},$$

où nous supposons le module R_k de a_k fixe; si l'argument θ_k de a_k augmente depuis o à $\frac{\pi}{2}$, alors $|\rho_k|$ (qui représente la demi-somme des axes d'ellipses homofocales croissantes) augmente également, et par suite δ_k croît aussi.

Ainsi, lorsque le degré h croissant indéfiniment, $t_h(x)$ reste borné inférieurement et supérieurement, il aura, en général, des racines pour lesquelles $\delta_k \gtrless 1$; donc ce ne serait que pour des classes exceptionnelles de fonction que les polynomes approchés pourraient avoir toutes leurs racines à arguments voisins de o et π seulement ou de $\pm\frac{\pi}{2}$. D'une façon précise, voici le premier théorème que nous avons :

Théorème A. — *Si les racines $a_k = R_k e^{\pm i\theta_k}$ des polynomes $t_h(x)$ tendant vers la fonction continue positive $t(x)$ jouissent de la propriété que*

(9) $$\left|\theta_k \pm \frac{\pi}{2}\right| \leqq \frac{\pi}{4},$$

la fonction $t(x)$ est nécessairement entière d'ordre non supérieur à 3 et de genre non supérieur à 4.

En effet, d'après la remarque faite plus haut, la condition (2) entraîne que

$$\delta_k \geq \left| \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{i}{R_k^2}}}{2} \right| ; \tag{10}$$

et puisque

$$\sqrt{1 + ib} = A + iB,$$

où

$$A^2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + b^2} + 1\right], \qquad B^2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + b^2} - 1\right],$$

donc

$$\delta_k \geq \frac{1}{2}\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{R_k^2}} + \sqrt{2\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{R_k^2}}\right)}} > \sqrt[8]{1 + \frac{1}{256 R_k^4}}. \tag{11}$$

Par conséquent, la somme $\sum_h^1 \frac{1}{R_k^4}$ est bornée. Donc, la somme

$$\log\left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\left(1 - \frac{x}{a_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{a_h}\right) + \sum_h^1 \frac{x}{a_k} + \frac{1}{2}\sum_1^h \frac{x^2}{a_k^2} + \frac{1}{3}\sum_1^h \frac{x^3}{a_k^3}$$

est bornée dans toute région Ω finie du plan.

Comme, d'autre part, $\log\left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{a_h}\right)$ reste bornée sur le segment $(-1, +1)$, il en résulte que les polynomes du troisième degré

$$A_1^{(h)} x + A_2^{(h)} x^2 + A_3^{(h)} x^3,$$

où

$$A_1^{(h)} = \sum_1^h \frac{1}{a_k}, \qquad A_2^{(h)} = \frac{1}{2}\sum_1^h \frac{1}{a_k^2}, \qquad A_3^{(h)} = \frac{1}{3}\sum_1^h \frac{1}{a_k^3},$$

restent bornés sur ce segment. Or, cela exige que tous les trois coefficients $A_1^{(h)}$, $A_2^{(h)}$, $A_3^{(h)}$ soient aussi bornés. On peut par suite choisir les polynomes $t_h(x)$ de telle sorte que les sommes $A_1^{(h)}$, $A_2^{(h)}$, $A_3^{(h)}$ tendent respectivement vers des limites déterminées A_1, A_2, A_3.

Alors les produits correspondants

$$\varphi_h(x) = \prod_1^h \left(1 - \frac{x}{a_k}\right) e^{\frac{x}{a_k} + \frac{x^2}{2a_k^2} + \frac{x^3}{3a_k^3}} \tag{12}$$

tendront uniformément sur le segment $(-1, +1)$ vers la fonction

$$\varphi(x) = l(x)\, e^{A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3}. \tag{13}$$

De plus, puisque les fonctions $\varphi_n(x)$ restent bornées dans toute région finie du plan, elles tendent, d'après le théorème de Stieltjes, vers une fonction entière $\varphi(x)$ dans tout le plan, et la fonction $\varphi(x)$ ne peut avoir d'autres racines que les points limites de a_k. Donc, l'ordre de $\varphi(x)$ n'est pas supérieur à 3.

Montrons encore que son genre ne peut dépasser 4, c'est-à-dire que le facteur exponentiel $e^{\mu(x)}$, accompagnant le produit canonique de Weierstrass, ne peut avoir son exposant de degré supérieur à 4. A cet effet, observons que le produit

$$(1-z)\, e^{z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}} = e^{-\frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{5} - \cdots}$$

est inférieur en module à

$$e^{\left|\frac{z^4}{2}\right|}, \qquad \text{si } |z| \leq \frac{1}{2},$$

et inférieur à

$$e^{|2z| + \left|\frac{z^2}{2}\right| + \left|\frac{z^3}{3}\right|} < e^{\frac{36}{2}|z^4|}, \qquad \text{si } |z| > \frac{1}{2};$$

on peut donc fixer un nombre k, tel que $\varphi(x)$ ne croît pas plus vite que $e^{k|x^4|}$. Par conséquent.

$$l(x) = \varphi(x)\, e^{-A_1 x - A_2 x^2 - A_3 x^3}$$

est également une fonction entière de genre non supérieur à 4 et d'ordre non supérieur à 3.

Remarque. — Comme le prouve l'exemple de la fonction

$$e^{x^4} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x^4}{n}\right)^n,$$

qui satisfait aux conditions du théorème, le genre 4 peut effectivement se présenter.

Complément au théorème A. — *Si les racines a_k jouissent de la propriété que les arguments θ_k satisfont aux inégalités*

$$\left|\theta_k \pm \frac{\pi}{2}\right| \leq \omega < \frac{\pi}{4},$$

la fonction $t(x)$ est entière d'ordre non supérieur à 1 et de genre non supérieur à 2.

En effet, dans ce cas,

$$\delta_k \geqq \left| \frac{1 + \sqrt{1 + \dfrac{e^{2i\omega}}{R_k^2}}}{2} \right| \geqq \frac{1 + \sqrt{1 + \dfrac{\cos 2\omega}{R_k^2}}}{2} > \sqrt{1 + \frac{\cos 2\omega}{4 R_k^2}}.$$

Par conséquent, comme précédemment, nous constatons que

$$(12\ bis) \qquad \varphi_h(x) = \prod_1^h \left(1 - \frac{x}{a_k}\right) e^{\frac{x}{a_k}}$$

tend vers la fonction entière

$$(13\ bis) \qquad \varphi(x) = t(x)\, e^{A_1 x},$$

qui est d'ordre non supérieur à 1 à cause du fait que $\sum_1^h \frac{1}{R_k^2}$ est bornée.

Pour voir que $t(x)$ et $\varphi(x)$ sont de genre non supérieur à 2, il suffit d'observer que $|(1 - z)e^z| < e^{|z|^2}$ dans tout le plan.

D'une façon tout analogue on démontre aussi que *si toutes les racines a_k sont réelles* (¹), *la fonction $t(x)$ est entière d'ordre non supérieur à 1 et de genre non supérieur à 2.*

Cependant on ne peut donner de propositions entièrement analogues aux précédentes, où les angles verticaux, ayant comme bissectrice l'axe imaginaire, seraient remplacés par ceux ayant pour bissectrice l'axe réel. Cela tient au fait que, $R_k = |a_k|$ étant assez petit, on a $\delta_k > 1$, quelque petit que soit l'argument. Donc pour avoir des propositions correspondantes, il faut d'une façon ou d'une autre faire intervenir une condition concernant R_k. On sera amené, comme nous le verrons de suite, à remplacer les angles par des branches d'hyperboles. En effet, on a, en général,

$$(14) \qquad \delta_k^2 = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \sqrt{1 - \frac{2\cos 2\theta_k}{R_k^2} + \frac{1}{R_k^4}} \right.$$
$$\left. + \sqrt{2\left[1 - \frac{\cos 2\theta_k}{R_k^2} + \sqrt{1 - \frac{2\cos 2\theta_k}{R_k^2} + \frac{1}{R_k^4}}\right]} \right\}.$$

(¹) Pour le cas où la convergence uniforme a lieu à l'intérieur d'un cercle (c'est-à-dire sous la restriction implicite que $t(x)$ est analytique) cette proposition a été donnée par M. Polya : *Ueber Annäherung durch Polynome mit lauter reellen Wurzeln* (*Rend. del Circolo Matematico di Palermo*, 1913).

Donc, si nous supposons que l'on a

$$\left|\theta_k \pm \frac{\pi}{2}\right| \geqq \omega > \frac{\pi}{4}. \tag{15}$$

c'est-à-dire que les racines a_k se trouvent à l'intérieur des angles verbicaux de grandeur 2ω, ayant l'axe réel pour bissectrice, on a

$$\delta_k^2 < \frac{1}{4}\left[1 + \sqrt[4]{1 - \frac{2\cos 2\omega}{R_k^2} + \frac{1}{R_k^4}}\right]^2. \tag{16}$$

Donc, si l'on peut fixer un nombre positif α, tel que l'on ait

$$\cos 2\omega > \frac{1+\alpha}{2R_k^2}, \tag{17}$$

on aura

$$\delta_k < \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt[4]{1 - \frac{\alpha}{R_k^2}}\right] < 1 - \frac{\alpha}{8R_k^2}, \tag{18}$$

La condition (17) exprime que les racines $a_k = x + iy$ se trouvent à l'intérieur de l'une ou l'autre des deux branches de l'hyperbole

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{2}(1+\alpha), \tag{19}$$

ou bien encore, que les parties réelles des carrés a_k^2 de toutes les racines sont supérieures à $\frac{1}{2}(1+\alpha)$. Par conséquent, par les mêmes raisonnements que plus haut nous arrivons au

Théorème B. — *Si les racines des polynomes approchés $t_n(x)$ d'une fonction continue positive $t(x)$ se trouvent à l'intérieur de l'hyperbole*

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{2}(1+\alpha) \qquad (\alpha > 0), \tag{19}$$

la fonction $t(x)$ est entière, d'ordre non supérieur à 3 et de genre non supérieur à 4.

Complément au théorème B. — *Si les racines a_k se trouvent à l'intérieur de l'hyperbole*

$$(1-\alpha)x^2 - (1+\alpha)y^2 = \frac{1}{2} \qquad (\alpha > 0) \tag{20}$$

la fonction $t(x)$ est entière d'ordre non supérieur à 1 *et de genre non supérieur à* 2.

En effet, la condition indiquée équivaut à

$$2\mathrm{R}_k^2 \cos 2\omega > 1 + 2\alpha \mathrm{R}_k^2$$

qui entraîne, d'après (16), que

$$\delta_k < \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\mathrm{R}_k^2}}\right] < 1 - \frac{\alpha}{4\mathrm{R}_k^2},$$

d'où la conclusion annoncée.

Remarque. — Dans toutes les propositions qui précèdent nous n'avons fait aucune restriction au sujet du *signe* des parties réelles des racines a_k. Dans le cas où l'on introduirait une telle restriction, la considération seule des produits $\left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\ldots\left(1 - \frac{x}{a_h}\right)$ suffit pour arriver à des conclusions analogues. Ainsi, par exemple, si l'on suppose que les parties réelles de tous les a_k sont positives, on a

$$\left|\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{a_h}\right)\right| \geqq \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\mathrm{R}_1^2}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{\mathrm{R}_h^2}\right)},$$

de sorte que $\sum_1^h \frac{1}{|a_k^2|}$ est bornée, et il en résultera (¹) que la fonction $t(x)$ est au plus du premier ordre et de genre 2.

Passons à présent à une question un peu différente. Dans ce qui précède nous avons toujours utilisé la remarque que la fonction $t(x)$ est une fonction entière de genre fini, s'il existe deux nombres positifs p et M (indépendants de h), tels que

$$\sum_1^h \frac{1}{|a_k|^p} < \mathrm{M}.$$

On serait tenté de croire que si les racines des polynomes $t_h(x)$

(¹) Voir E. Lindwart et G. Polya, *Ueber einen Zusammenhang zwischen der Konwergenz von Polynomfolgen und der Verteilung ihrer Wurzeln* (*Rend. del Circ. Mathematico di Palermo*, 1914).

n'ont qu'un nombre fini de points limites intérieurs à un cercle fixe, la fonction $t(x)$ serait entière. Si l'on supposait que

$$t(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_h x^h + c_{h+1} x^{h+1} + \ldots$$

est une fonction analytique et que

$$t_h(x) = c_0 + c_1 + \ldots + c_h x^h,$$

cette affirmation serait bien exacte. En effet, la moyenne géométrique $\sqrt[h]{\frac{c_0}{c_h}}$ des racines de $t_h(x)$ ne pourrait avoir de limite inférieure finie; donc

$$\lim \sqrt[h]{c_h} = 0.$$

Cependant, sans restrictions, cette présomption est fausse, car, quelle que soit la fonction continue et positive $t(x)$, il est toujours possible de construire des polynomes $t_h(x)$ tendant uniformément vers $t(x)$ sur $(-1, +1)$ et tels que, pour h assez grand, $t_h(x)$ n'admette aucune racine de module inférieur à un nombre fixe R aussi grand qu'on veut.

En effet, construisons des polynomes $P_n(x)$ de degré n, tendant vers $\log t(x)$ sur le segment $(-1, +1)$; soit

$$(21) \qquad |P_n(x)| < b, \qquad \text{pour } -1 \leqq x \leqq 1.$$

On pourra prendre q_n assez grand pour que

$$(22) \qquad t_h(x) = 1 + P_n(x) + \ldots + \frac{[P_n(x)]^{q_n}}{q_n!},$$

où $h = nq_n$, soient des polynomes de degré h tendant uniformément vers $t(x)$ sur le même segment.

De plus, M étant un nombre positif fixé d'avance, la somme

$$f(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^{4M}}{4M!}$$

ne peut s'annuler pour $|z| \leqq M$, car alors

$$|f(z)| > e^{-|z|} - \frac{5}{4}\frac{|z|^{4M+1}}{(4M+1)!} > e^{-M}\left[1 - \frac{5}{16}\left(\frac{e^5}{256}\right)^M\right] > 0.$$

Donc, en prenant

$$q_n \geqq 4M,$$

on sera certain que

$$|P_n(a_k)| > M,$$

si $t_h(a_k) = 0$.

Or, d'après un théorème connu, on doit avoir, à cause de (21),

$$|P_n(a_k)| < b\,|a_k + \sqrt{a_k^2 - 1}|^n;$$

d'où

$$|a_k + \sqrt{a_k^2 - 1}| > \left(\frac{M}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

ou bien

$$|a_k| > \frac{1}{2}\left[\left(\frac{M}{b}\right)^{\frac{1}{n}} - \left(\frac{b}{M}\right)^{\frac{1}{n}}\right].$$

Par conséquent, pour avoir $|a_k| > R$, il suffira de poser

$$M = b\,[R + \sqrt{R^2+1}]^n,$$

et la propriété voulue pourra donc certainement être réalisée pour les polynomes $t_h(x)$ de degré $h \geqq 4bn(R + \sqrt{R^2+1})^n$. Il est donc toujours possible d'éloigner autant qu'on veut les racines des polynomes approchés, seulement cela ne pourra se faire, en général, qu'au prix d'une augmentation excessive de leur degré.

Il est aussi possible de rendre les racines a_k aussi voisines qu'on veut du segment $(-1, +1)$, quelle que soit la nature de la fonction $t(x)$, car il suffit de remarquer que $t(x) = 1$ admet comme polynomes approchés

$$t_h(x) = 1 + \frac{(x + \sqrt{x^2-1})^h + (x - \sqrt{x^2-1})^h}{2h},$$

dont les racines tendent vers les points du segment $(-1, +1)$, lorsque h croît indéfiniment.

La distribution des racines des polynomes approchés se précise, si l'on exige qu'ils fournissent une approximation M_h du même ordre que la meilleure approximation L_h (nous entendons par là que $L_h = M_h^{1+\varepsilon_h}$, où ε_h tend vers zéro, lorsque h croît indéfiniment). On démontre facilement le théorème suivant :

Théorème. — *Les polynomes $t_h(x)$ fournissant sur le segment $(-1, +1)$ l'approximation de l'ordre de la meilleure approximation de* *la fonction $t(x)$ n'ont qu'un nombre borné de racines à l'intérieur d l'ellipse E, ayant $(-1, +1)$ pour foyers, si $t(x)$ (supposée analytique) est régulière sur l'ellipse E et à son intérieur.*

En effet, on a sur $(-1, +1)$

$$|t(x) - t_h(x)| = o\left(\frac{1}{R_1}\right)^h,$$

où R_1 est la demi-somme des axes de l'ellipse E; donc, la série

$$t(x) = t_0(x) + \sum_0^{\infty} [t_{n+1}(x) - t_n(x)]$$

est uniformément convergente à l'intérieur et sur l'ellipse E, de sorte que les points limites des racines de $t_h(x)$ seraient aussi des racines de $t(x)$.

La réciproque, qui est certainement vraie, est moins facile a démontrer :

Si les racines des polynomes $t_h(x)$, fournissant sur le segment $(-1, +1)$ l'approximation de l'ordre de la meilleure, n'ont qu'un nombre fini de points limites à l'intérieur de l'ellipse E, la fonction $t(x)$ est analytique et régulière à l'intérieur de cette ellipse.

Pour abréger, nous nous bornerons à démontrer cette proposition, en faisant la restriction suivante au sujet des polynomes $t_h(x)$; nous supposerons qu'ils fournissent le minimum de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [t(x) - t_h(x)]^2 q(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\, dx,$$

où $q(x)$ est une fonction quelconque continue et positive sur $(-1, +1)$ et α et β des nombres réels.

En effet, soient $R_h(x)$ les polynomes orthogonaux relatifs au poids $q(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$.

Donc,

$$t_h(x) = A_0 + A_1 R_1(x) + \ldots + A_h R_h(x), \tag{23}$$

où

$$A_h = \int_{-1}^{+1} t(x) R_h(x) q(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \, dx.$$

En tenant compte de la valeur asymptotique du coefficient de x^h dans $R_h(x)$, qui est égale à $C 2^{h+\frac{\alpha+\beta}{2}}$, où C est une constante [dépendant de $q(x)$], nous voyons que le produit des racines de $t_h(x)$ est

$$a_1 a_2 \ldots a_h \sim \pm \frac{t_h(0)}{A_h C 2^{h+\frac{\alpha+\beta}{2}}}.$$

Donc,

$$2 \sqrt[h]{|a_1 a_2 \ldots a_h|} \sim \frac{1}{\sqrt[h]{|A_h|}}.$$

pour h croissant infiniment. D'où il résulte, d'après (4), que l'on a également

$$\sqrt[h]{|\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_h|} \sim \frac{1}{\sqrt[h]{|A_h|}}. \tag{24}$$

Par conséquent, R désignant la demi-somme des axes de l'ellipse E, puisque, par hypothèse, il n'y a qu'un nombre borné de ρ_k tels que $|\rho_k| < R$, nous en concluons que pour h assez grand on aura

$$R < \frac{1+\varepsilon}{\sqrt[h]{|A_h|}}, \tag{25}$$

quelque petit que soit le nombre positif donné ε. Il en résulte que la somme (22) converge à l'intérieur de l'ellipse E, et par conséquent $t(x)$ est analytique à l'intérieur de cette ellipse.