JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ERVAND KOGBETLIANTZ

Recherches sur l'unicité des séries ultrasphériques

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 5 (1926), p. 125-196.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1926_9_5__125_0>

Recherches sur l'unicité des séries ultrasphériques;

PAR M. ERVAND KOGBETLIANTZ

(Paris).

INTRODUCTION.

Les polynomes ultrasphériques $P_n^{(\lambda)}(x)$ admettent la fonction génératrice $[T(z)]^{-\lambda} = (1 - 2xz + z^2)^{-\lambda}$ et généralisent les polynomes de Legendre $P_n(x)$ pour lesquels on a $\lambda = \frac{1}{2}$. Ils sont orthogonaux dans $(-1, +1)$:

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} P_m^{(\lambda)}(x) P_n^{(\lambda)}(x)\, dx = \begin{cases} 0 & (m = n), \\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}{\Gamma(\lambda)} \dfrac{A_n^{(2\lambda-1)}}{n+\lambda} & (m \neq n), \end{cases}$$

où $A_n^{(\delta)}$ désigne le coefficient de z^n dans le développement du binome $(1-z)^{-(\delta+1)}$ ou bien

$$A_n^{(\delta)} = \frac{\Gamma(n+\delta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\delta+1)}.$$

Les coefficients $f_n^{(\lambda)}$ du développement formel de $f(x)$, en série ultrasphérique de Fourier dans $(-1, +1)$

$$f(x) \backsim f_0^{(\lambda)} + f_1^{(\lambda)} P_1^{(\lambda)}(x) + \ldots + f_n^{(\lambda)} P_n^{(\lambda)}(x) + \ldots \qquad (-1 \leqq x \leqq +1),$$

s'expriment ainsi :

$$f_n^{(\lambda)} = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \frac{n+\lambda}{A_n^{(2\lambda-1)}} \int_{-1}^{+1} \frac{f(u) P_n^{(\lambda)}(u)\, du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}.$$

La question de l'unicité de ce développement conduit à l'étude des séries ultrasphériques

(1) $$\alpha_0 + \alpha_1 P_1^{(\lambda)}(x) + \alpha_2 P_2^{(\lambda)}(x) + \ldots + \alpha_n P_n^{(\lambda)}(x) + \ldots$$

données par les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ et il s'agit d'établir les conditions sous lesquelles ces nombres sont les coefficients de Fourier de la fonction représentée par la série (1).

Ce problème est plus ou moins large suivant le sens qu'on attribue à l'expression *fonction représentée par la série* (1). Dans le cas des séries trigonométriques par exemple on a commencé par l'étude de l'unicité des séries trigonométriques *convergentes;* ensuite vinrent les séries divergentes sommables par les moyennes arithmétiques d'ordre inférieur à l'unité ([1]) et les séries divergentes sommables par la méthode de Poisson ([2]).

Dans ce travail nous étudions l'unicité des séries ultrasphériques convergentes ou sommables par les moyennes arithmétiques en précisant aussi les résultats de M. Riesz qui se rapportent aux séries trigonométriques divergentes sommables par les moyennes arithmétiques d'ordre inférieur au premier.

Dans le cas de la convergence nous démontrons plus loin (§ 5) les deux théorèmes suivants qui résolvent entièrement le problème de l'unicité dans ce cas et qui sont analogues aux théorèmes classiques de Cantor et de Du Bois Reymond :

Théorème I. — *Si la série ultrasphérique* (1) *converge et a pour somme zéro partout dans* $(-1, +1)$, *sauf peut-être les deux points frontières* $x = \pm 1$ *et un ensemble réductible* E_0 *de points intérieurs* ξ, *où elle diverge ou converge avec une somme différente de zéro, tous ses coefficients* α_n *sont identiquement nuls.*

Théorème II. — *Si la série* (1) *converge vers* $f(x)$ *partout dans* $(-1, +1)$, *sauf les deux points* $x = \pm 1$ *et un ensemble réductible* E_0 *de points intérieurs* ξ, *où elle diverge ou converge mais n'a pas pour somme* $f(\xi)$, *elle est la série ultrasphérique de sa somme* $f(x)$ *pourvu que la dernière soit bornée à l'intérieur de* $(-1, +1)$ *et que le produit* $(1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} . |f(x)|$ *soit intégrable dans cet intervalle* $(-1, +1)$.

([1]) M. Riesz, *Math. Annalen*, Band 71, 1911, p. 64.

([2]) A. Rajchmann, *Prace Matematyczno-Fizyczne*, 30; A. Zygmund, *Mathem. Zeitschrift*, Band 24, Heft 1, 1925; J. Privaloff, *Recueil de la Soc. math. de Moscou*, 1923.

Dans le cas particulier des séries de Legendre $\left(\text{le cas } \lambda = \frac{1}{2}\right)$ le problème résolu par I et II a été étudié par MM. Dini et Plancherel. En 1874 M. U. Dini (¹) a démontré le théorème I pour $\lambda = \frac{1}{2}$ en supposant la série proposée convergente partout dans $(-1, +1)$ sans exception, l'ensemble réductible E_0 de points exceptionnels étant introduit dans ce théorème par M. Plancherel (²). Quant au cas particulier $\lambda = \frac{1}{2}$ du théorème II, M. Plancherel (²) l'a démontré sous l'hypothèse que la fonction $f(x)$ est bornée dans *tout* intervalle $(-1, +1)$ y compris les points frontières $x = \pm 1$, l'hypothèse qui doit être remplacée comme le prouve II par la condition beaucoup moins restrictive : $f(x)$ peut devenir infinie aux extrémités $x = \pm 1$ de l'intervalle $(-1, +1)$ pourvu qu'elle soit bornée à l'intérieur et absolument intégrale dans $(-1, +1)$.

En restant toujours dans le même cas particulier $\lambda = \frac{1}{2}$ supposons maintenant la série

$$\alpha_0 + \alpha_1 P_1^{(\lambda)}(x) + \alpha_2 P_2^{(\lambda)}(x) + \ldots + \alpha_n P_n^{(\lambda)}(x) + \ldots \qquad \left(\lambda = \frac{1}{2}\right) \tag{2}$$

divergente mais sommable par les moyens arithmétiques d'ordre δ, bref sommable (C, δ). Nous avons établi ailleurs (³) l'analogie complète de la *sommabilité* $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ des séries de Laplace à la *convergence* des séries trigonométriques. Or la série (2) à laquelle se réduit la série (1) pour $\lambda = \frac{1}{2}$ est le cas particulier de la série de Laplace et l'on voit que c'est l'unicité des séries de Legendre *sommables* $\left(C, \delta \geqq \frac{1}{2}\right)$ qui doit correspondre à l'unicité de développements trigonométriques convergents mais non celle de séries (2) *convergentes* étudiées par MM. Dini et Plancherel.

(¹) *Annali di Mat.*, 2ᵉ série, t. VI, 1873-1875, p. 216-225.

(²) *Comptes rendus*, t. 155, 1912, p. 897-900; *Annales de l'École Normale*, t. 31, 1914, p. 223-262.

(³) *Annales de l'École Normale*, 1923.

Cependant l'analogie entre l'unicité des séries trigonométriques convergentes et celle des séries de Legendre sommables $\left(C, \delta = \frac{1}{2}\right)$ n'est pas complète vu l'existence dé la série divergente

$$(3) \quad 0 \sim \frac{1}{2} + \frac{3}{2} P_1(\xi) P_1(x) + \ldots + \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(\xi) P_n(x) + \ldots \qquad (x \neq \xi),$$

ξ étant un point fixe intérieur à l'intervalle $(-1, +1)$.

Cette série représente zéro partout dans $(-1, +1)$ sauf le point $x = \xi$, étant sommable $(C, \delta > 0)$ à l'intérieur de l'intervalle et $\left(C, \delta > \frac{1}{2}\right)$ aux extrémités $x = \pm 1$. Au point $x = \xi$ elle diverge essentiellement son terme général $u_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot P_n^2(\xi)$ ayant pour $n \to \infty$ l'expression approchée suivante :

$$u_n = \frac{1 + \sin[(2n+1)\theta]}{\pi \sin\theta} \qquad (\xi = \cos\theta).$$

Sa somme partielle $\sigma_n(\xi)$ est de l'ordre de n :

$$\sigma_n(\xi) = \frac{4(n+1)}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} + O(1),$$

donc

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n(\xi)}{n} = \frac{4}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Le coefficient de $P_n(x)$ dans le terme général est de l'ordre de $\sqrt{n}$ mais non de la forme $o(\sqrt{n})$:

$$\alpha_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(\xi) = O(\sqrt{n}) \qquad (|\xi| < 1).$$

C'est pourquoi l'introduction dans l'énoncé des théorèmes d'unicité d'un ensemble $E_{\frac{1}{2}}$ des points intérieurs ξ tels qu'en ces points la série n'est pas sommable $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ n'est possible que sous réserve que la série oscille pour $x = \xi$, sans diverger essentiellement, ou bien que sa somme partielle $\sigma_n(x)$ est de l'ordre de $o(n)$, si elle diverge essentiellement pour $x = \xi$, ou enfin que le coefficient α_n du terme général est de la forme $o(\sqrt{n})$. L'une de ces conditions supplémentaires exclut la série (3) et garantit l'unicité des séries de Legendre sommables $\left(C, \delta \leq \frac{1}{2}\right)$.

L'étude de la série (2) sommable $\left(C, \delta = \frac{1}{2}\right)$ à laquelle est consacré le paragraphe **7** ne fait que confirmer cette assertion et l'on obtient les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME III. — *Si la série* (2) *est sommable* $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ *avec la somme zéro partout à l'intérieur de l'intervalle* $(-1, +1)$, *sauf un ensemble réductible* $E_{\frac{1}{2}}$ *des points intérieurs* ξ, *où elle oscille sans être sommable* $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ *ou tout en l'étant n'a pas pour somme zéro, ou enfin diverge essentiellement mais avec* $s_n(\xi) = o(n)$, *tous ses coefficients sont identiquement nuls.*

THÉORÈME IV. — *Si la série* (2) *est sommable* $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ *avec la somme* $f(x)$ *partout à l'intérieur de l'intervalle* $(-1, +1)$, *sauf un ensemble réductible* $E_{\frac{1}{2}}$, *des points intérieurs* ξ, *où elle oscille sans être sommable* $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ *ou tout en l'étant n'a pas pour somme* $f(x)$, *ou enfin diverge essentiellement mais avec* $s_n(\xi) = o(n)$, *elle est le développement en série de Legendre de sa somme* $f(x)$ *pourvu que la fonction* $f(x)$ *soit absolument intégrable dans l'intervalle* $(-1, +1)$ *et bornée à l'intérieur de cet intervalle.*

La condition $s_n(\xi) = o(n)$ ou bien l'hypothèse de l'oscillation de la série (2) aux points de l'ensemble $E_{\frac{1}{2}}$ ne sont pas nécessaires pour l'unicité si l'on suppose $\alpha_n = o(\sqrt{n})$.

Si l'on envisage les séries de Legendre sommables $\left(C, \delta > \frac{1}{2}\right)$ la question de l'unicité se complique davantage par le fait de l'existence d'une autre série divergente qui représente zéro partout dans $(-1, +1)$ sauf le point $x = 1$. C'est le cas particulier de (3) pour $\xi = 1$:

$$(3^a) \qquad 0 \sim \frac{1}{2} + \frac{3}{2} P_1(x) + \ldots + \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(x) + \ldots \qquad (x \neq 1)$$

qui est sommable $\left(C, \delta > \frac{1}{2}\right)$ avec la somme nulle partout à l'intérieur de $(-1, +1)$ et l'est $(C, \delta > 1)$ pour $x = -1$.

De même pour la série analogue

$$(3^b) \quad 0 \sim \frac{1}{2} - \frac{3}{2}P_1(x) + \ldots + (-1)^n\left(n + \frac{1}{2}\right)P_n(x) + \ldots \qquad (x \neq -1),$$

qui est un autre cas particulier de (3) pour $\xi = -1$ et qui est sommable $\left(C, \delta > \frac{1}{2}\right)$ à l'intérieur et $(C, \delta > 1)$ pour $x = +1$.

Maintenant l'hypothèse de l'oscillation de la série aux points de E_δ ne suffit pas et il faut en outre supposer $\alpha_n = o(n)$ pour exclure les séries (3^a) et (3^b) ou bien introduire des conditions suffisantes de l'unicité concernant l'allure de la série aux points frontières $x = \pm 1$. Ainsi on obtient les théorèmes III' et IV' du paragraphe **6**.

Le problème de l'unicité de développements ultrasphériques divergents, mais sommables (C, δ) est traité dans le paragraphe **7**. Nous n'avons pas pu démontrer en toute rigueur les deux théorèmes qui paraissent être extrêmement probables et dont nous donnons ici les énoncés, persuadés que tôt ou tard ces deux théorèmes seront démontrés. Voici leurs énoncés :

Théorème A. — *Si la série* (1) *est sommable* (C, λ) *avec la somme zéro partout à l'intérieur de l'intervalle* $(-1, +1)$, *sauf un ensemble réductible* E_λ *des points intérieurs* ξ, *où elle oscille sans être sommable* (C, λ) *ou tout en l'étant n'a pas pour somme zéro, ou enfin diverge essentiellement mais avec* $s_n(\xi) = o(n)$, *tous ses coefficients* α_n *sont identiquement nuls.*

Théorème B. — *Si la série* (1) *est sommable* (C, λ) *avec la somme* $f(x)$ *partout à l'intérieur de l'intervalle* $(-1, +1)$ *sauf un ensemble réductible* E_λ *des points intérieurs* ξ, *où elle oscille sans être sommable* (C, λ) *ou tout en l'étant n'a pas pour somme* $f(\xi)$ *ou enfin diverge essentiellement, mais avec* $s_n(\xi) = o(n)$, *elle est le développement ultrasphérique de la somme* $f(x)$ *pourvu que la fonction* $f(x)$ *soit bornée à l'intérieur de* $(-1, +1)$ *et que le produit* $(1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}. |f(x)|$ *soit intégrable dans* $(-1, +1)$.

L'hypothèse de l'oscillation de la série aux points ξ de l'ensemble E_λ est nécessaire vu l'existence de la série divergente

$$(4)\quad 0 \sim \lambda + \frac{1+\lambda}{2\lambda} P_1^{(\lambda)}(\xi) P_1^{(\lambda)}(x) + \ldots$$
$$+ (n+\lambda) \frac{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2\lambda)} P_n^{(\lambda)}(\xi) P_n^{(\lambda)}(x) + \ldots \qquad (x \neq \xi),$$

qui représente zéro partout dans $(-1, +1)$, sauf le point $x = \xi$, étant sommable $(C, \delta > 0)$ à l'intérieur de l'intervalle et sommable $(C, \delta < \lambda)$ aux points $x = \pm 1$.

On trouve dans le paragraphe **7** ces théorèmes d'unicité démontrés pour les séries ultrasphériques divergentes et sommables (C, λ) mais seulement pour $\lambda < 1$, ce qui n'est que le premier pas vers les théorèmes généraux énoncés plus haut et qui nous semblent être vrais quel que soit λ, étant donné que la sommabilité (C, λ) de développements ultrasphériques dans $(-1, +1)$ est analogue à la convergence des séries trigonométriques.

Les deux premiers paragraphes sont consacrés aux lemmes nécessaires pour la démonstration des théorèmes I-IV et autres.

Le paragraphe **4** traite les séries trigonométriques divergentes et sommables $(C, \delta < 1)$. M. M. Riesz avait étendu les théorèmes classiques de Cantor et de Du Bois Reymond aux séries trigonométriques divergentes et sommables $C, \delta < 1$ en supprimant dans leurs énoncés l'ensemble réductible des points exceptionnels où la série n'est pas sommable $(C, \delta < 1)$ ou n'a pas pour somme $f(x)$. L'existence de la série divergente bien connue :

$$(5)\qquad 0 \backsim \frac{1}{2} + \cos(x-\xi) + \ldots + \cos[n(x-\xi)] + \ldots \qquad (x \neq \xi),$$

sommable $(C, \delta > 0)$ avec la somme zéro partout dans $(0, 2\pi)$ sauf pour $x = \xi$, où elle *diverge essentiellement* $\left(\lim\limits_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = 1\right)$, explique suffisamment cette restriction faite par M. M. Riesz, qui suppose la série trigonométrique sommable $(C, \delta < 1)$ *partout* dans $(0, 2\pi)$ sans exception. Il était intéressant de rechercher si la série (5) est l'unique cause de la non-unicité des séries trigonométriques sommables $(C, \delta < 1)$ et nous démontrons dans le paragraphe **4** que l'unicité n'est pas atteinte par l'introduction d'un ensemble réductible E_δ de points ξ tels qu'en ces points la série *oscille sans être sommable* (C, $\delta < 1$) ou bien est sommable (C, $\delta < 1$) mais vers une somme différente de $f(\xi)$, ou enfin diverge essentiellement, mais avec $s_n(\xi) = o(n)$. L'hypothèse que la série trigonométrique ne diverge essentiellement aux points de l'ensemble E_δ qu'avec $s_n(\xi) = o(n)$ exclut la série (5) et avec elle l'unique cause qui pourrait détruire l'unicité. Nous démontrons aussi (§ 7) qu'il n'existe aucune autre série trigonométrique sommable avec la somme zéro par les moyennes arithmétiques d'ordre $\delta < 1$ partout dans $(0, 2\pi)$, sauf le point $x = \xi$, que la série (5).

La même question se pose pour la série ultrasphérique divergente (4). Cette question est étudiée dans le paragraphe 7, où nous établissons pour $\lambda < 1$ l'unicité de la série (4). La série (3) qui est le cas particulier de la série (4) pour $\lambda = \frac{1}{2}$ est l'unique série de Legendre sommable $\left(C, \delta > \frac{1}{2}\right)$ à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$ avec zéro pour somme, sauf le point $x = \xi$.

Les résultats exposés dans ce Mémoire ont été publiés en partie dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (¹).

1. — Formule d'approximation pour le polynome ultrasphérique.

Le polynome $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ satisfait aux équations suivantes :

$$\frac{d^2 P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)}{d\theta^2} + 2\lambda \cot\theta \, \frac{d P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)}{d\theta} + n(n + 2\lambda) P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = 0$$

et

$$\frac{d P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)}{d\theta} = -2\lambda \sin\theta \, P_{n-1}^{(\lambda+1)}(\cos\theta),$$

d'où l'on déduit la formule suivante :

$$(6) \quad \begin{aligned} &4\lambda(\lambda+1)\sin^2\theta \, P_n^{(\lambda+2)}(\cos\theta) \\ &\quad = 2\lambda(2\lambda+1)\cos\theta \, P_{n+1}^{(\lambda+1)}(\cos\theta) - (n+2)(n+2+2\lambda) P_{n+2}^{(\lambda)}(\cos\theta). \end{aligned}$$

(¹) T. 169, 1919, p. 769-771, p. 950-952; t. 177, 1923, p. 674-677.

La formule d'approximation en question s'écrit ainsi :

$$(7)\quad P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \frac{2A_n^{(\lambda-1)}}{(2\sin\theta)^\lambda}\left\{\cos\left[(n+\lambda)\theta - \frac{\lambda\pi}{2}\right]\right.$$
$$+\sum_{m=1}^{N-1}\frac{(-1)^m\Gamma(m+\lambda)}{\Gamma(\lambda-m)\Gamma(m+1)}$$
$$\times\frac{\cos\left[(n+\lambda-m)\theta - \frac{\lambda+m}{2}\pi\right]}{(2\sin\theta)^m(n+\lambda-1)(n+\lambda-2)\dots(n+\lambda-m)}$$
$$\left.+\frac{\rho_N^{(\lambda)}(n,\theta)}{[(n+1)\sin\theta]^N}\right\},$$

où $N = 2, 3, \dots, \infty$, avec $|\rho_N^{(\lambda)}(n, \theta)| < C_0$ quels que soient $0 \leqq \theta < \pi$ et $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$.

On la démontre par la méthode de Stieltjes ([1]) à l'aide de la relation (6). Pour $N = 2$ elle se réduit à la formule

$$(8)\quad P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \frac{2A_n^{(\lambda-1)}}{(2\sin\theta)^\lambda}\left\{\cos\left[(n+\lambda)\theta - \frac{\lambda\pi}{2}\right]\right.$$
$$\left. - \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\frac{\sin\left[(n+\lambda-1)\theta - \frac{\lambda\pi}{2}\right]}{(n+\lambda-1)\sin\theta} + \frac{\omega_n(\theta)}{[(n+\lambda)\sin\theta]^2}\right\},$$

où l'on a

$$A_n^{(\lambda-1)} = \frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\lambda)} = O[(n+1)^{\lambda-1}].$$

Vu que pour $\frac{\pi}{n+1} \leqq \theta \leqq \frac{n\pi}{n+1}$ la somme de deux derniers termes du second membre de (8) est de l'ordre de $(n+1)^{\lambda-2}.(\sin\theta)^{-(\lambda+1)}$ on déduit de (8) la formule plus simple

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \frac{2A_n^{(\lambda-1)}}{(2\sin\theta)^\lambda}\left\{\cos\left[(n+\lambda)\theta - \frac{\lambda\pi}{2}\right] + \frac{\omega_n(\theta)}{(n+1)\sin\theta}\right\}.$$

On a aussi

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \frac{(n+1)^{\lambda-1}H_n^{(\lambda)}(\theta)}{(\sin\theta)^\lambda},$$

([1]) *Annales de Toulouse*, 1re série, t. 4, 1890, p. G-1 à G-17.

où

$$|H_n^{(\lambda)}(\theta)| < c_1,$$

quel que soit $0 \leq \theta \leq \pi$.

Nous appliquerons la formule (8) sous la forme suivante :

$$(9) \quad P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \frac{2 A_n^{(\lambda-1)}}{(2 \sin\theta)^{\lambda+1}} \left[2 \sin\theta \cos\omega_n - \frac{\lambda(\lambda-1)\sin\omega_{n-1}}{n+\lambda-1} + \frac{r_n(\theta)}{(n+\lambda)^2} \right],$$

où

$$\omega_n = (n+\lambda)\theta - \frac{\lambda\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad |r_n(\theta)| < \frac{c_2}{\sin\theta}.$$

On démontre facilement que les deux dérivées premières des fonctions $n^{-2}.r_n(\theta)$ sont bornées dans leur ensemble à l'intérieur de l'intervalle $(0, \pi)$, c'est-à-dire pour

$$\varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon \qquad \text{et} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \infty \qquad (\varepsilon > 0).$$

2. — Généralisation du lemme classique de Riemann.

On a vu que le polynome ultrasphérique s'exprime en fonctions trigonométriques à n^{-N} près pour $n \to \infty$. C'est pourquoi les lemmes nécessaires pour la suite s'appuient sur le lemme qui se rapporte aux séries trigonométriques et qui généralise le lemme classique de Riemann. Le lemme de Riemann concerne les séries trigonométriques convergentes et peut être formulé sous sa forme générale ainsi : *soient*

$$(10) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

une série convergente de somme s et $\varphi(t)$ une fonction bornée ainsi que $\varphi'(t)$ et telle que $\varphi(0) = 1$: si $\varphi(t)$ satisfait pour $t \to \infty$ aux conditions suivantes :

$$t^{1+\varepsilon}\varphi(t) = O(1) \qquad \text{et} \qquad t^{1+\varepsilon}\varphi'(t) = O(1) \qquad (\varepsilon > 0),$$

quelque petit que soit ε fixe et positif, on aura

$$\lim_{h=0} \sum_0^\infty u_n \varphi(nh) = s = \lim_{m=\infty} s_m.$$

L'énoncé donné par Riemann s'obtient en posant

$$u_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad \text{et} \qquad \varphi(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2.$$

M. L. Féjèr a démontré [1] le lemme analogue suivant : *soient la série* (10) *sommable* (C, 1) *avec la somme* $s = \lim\limits_{m=\infty} s'_m$ et $\varphi(t)$ *une fonction bornée ainsi que sa dérivée seconde* $\varphi''(t)$ *et telle que* $\varphi(0) = 1$; *si* $\varphi(t)$ *satisfait pour* $t \to \infty$ *aux conditions suivantes*

$$t^{2+\varepsilon}\varphi(t) = O(1) \quad \text{et} \quad t^{2+\varepsilon}\varphi''(t) = O(1) \quad (\varepsilon > 0),$$

quelque petit que soit ε *fixe et positif, on aura*

$$\lim_{h=0} \sum_{n=}^{\infty} u_n \varphi(nh) = s = \lim_{m=\infty} s'_m.$$

En posant

$$u_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad \text{et} \quad \varphi(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^4,$$

on a le cas particulier qui a servi à M. M. Riesz comme point de départ dans ses belles recherches sur l'unicité des séries trigonométriques sommables (C, δ) pour $\delta \leqq 1$.

Les deux lemmes précédents de Riemann et de M. L. Féjèr ne sont que des cas particuliers du lemme général dont voici l'énoncé :

LEMME. — *Soient la série* (10) *sommable* (C, δ) *avec la somme* $s = \lim\limits_{m=\infty} s_m^{(\delta)}$ *et* $\varphi(t)$ *une fonction bornée ainsi que sa dérivée* $\varphi^{(\delta+1)}(t)$ *d'ordre* $\delta + 1$ *et telle que* $\varphi(0) = 1$; *si* $\varphi(t)$ *satisfait pour* $t \to \infty$ *aux conditions suivantes*

$$t^{\delta+1+\varepsilon}\varphi^{(t)} = O(1) \quad \text{et} \quad t^{\delta+1+\varepsilon}\varphi^{(\delta+1)}(t) = O(1) \quad (\varepsilon > 0),$$

quel que soit ε *fixe et positif, on aura*

$$\lim_{n=0} \sum_{0}^{\infty} u_n \varphi(nh) = s = \lim_{m=\infty} s_m^{(\delta)}.$$

Étant donné qu'une série convergente est sommable (C, 0) on voit que les lemmes de Riemann et de M. Féjèr correspondent aux valeurs $\delta = 0$ et $\delta = 1$.

---

[1] *Math. Annalen*, Band 58, 1904, p. 68-69.

La série (10) étant supposée sommable (C, δ), on a

$$\lim_{n=\infty} n^{-\delta} u_n = 0,$$

et d'autre part $n^{\delta+1+\varepsilon}\varphi(nh) = O(1)$ d'après l'hypothèse. Dans ces conditions la série

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \varphi(nt),$$

pour t fixe et positif converge absolument comme

$$\sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \qquad (\varepsilon > 0)$$

et la convergence est uniforme pour $t \geqq \eta > 0$.

Les dérivées d'ordre non entier qu'on rencontre dans l'énoncé sont définies (Liouville) ainsi : posons pour $\alpha < 0$

$$\Delta_h^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(-\alpha+1)} f\left(x - \frac{\alpha h}{2} + kh\right);$$

on a par définition

$$f^{(\alpha)}(x) = \frac{d^\alpha f}{dx^\alpha} = \lim_{h=0} \frac{\Delta_h^\alpha f(x)}{h^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_x^{\infty} \frac{f(u)\,du}{(u-x)^{1+\alpha}} \qquad (\alpha < 0),$$

en supposant bien entendu $f(x) = O(x^{\alpha-\varepsilon})$ pour $x \to \infty$.

On peut transformer cette expression, en intégrant n fois par parties, en

$$f^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^{\infty} \frac{f^{(n)}(u)\,du}{(u-x)^{\alpha-n+1}}.$$

Le résultat est valable aussi pour $0 < \alpha < n$ sous l'hypothèse $f^{(n)}(x) = O(x^{\alpha-n-\varepsilon})$ et les dérivées d'ordre positif β sont définies ainsi : soit $n - 1 = E(\beta)$, où l'entier n est non inférieur à l'unité; on a par définition en posant $\gamma = \beta - n < 0$:

$$f^{(\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(-\gamma)} \int_x^{\infty} \frac{f^{(n)}(u)\,du}{(u-x)^{1+\gamma}},$$

cette expression représente $f^{(\beta)}(x)$ sous l'hypothèse

$$f^{(n)}(x) = O(x^{\gamma-\varepsilon}) = O(x^{\beta-n-\varepsilon}) \qquad \text{pour} \qquad x \to \infty.$$

Par définition on a

$$s_n^{(\delta)} = \frac{1}{A_n^{(\delta)}} \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta)} u_m = \frac{\sigma_n^{(\delta)}}{A_n^{(\delta)}},$$

où

$$A_n^{(\delta)} = \frac{\Gamma(n+\delta+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\delta+1)},$$

comme toujours et les sigma-sommes $\sigma_n^{(\delta)}$ sont définies par

$$\sigma_n^{(\delta)} = \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta)} u_m = \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta-1)} s_m.$$

Inversement

$$u_n = \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{[-(\delta+2)]} \sigma_n^{(\delta)} = \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{[-(\delta+2)]} A_m^{(\delta)} s_m^{(\delta)}.$$

Pour démontrer le lemme, c'est-à-dire pour établir que

$$\lim_{t \succ +0} F(t) = \lim_{m=\infty} s_m^{(\delta)},$$

transformons d'abord l'expression suivante :

$$\begin{aligned} F_N(t) &= \sum_{n=0}^{N} u_n \varphi(nt) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{[-(\delta+2)]} \sigma_m^{(\delta)} \varphi(nt) \\ &= \sum_{m=0}^{N} \sigma_m^{(\delta)} \sum_{n=m}^{N} A_{n-m}^{[-(\delta+2)]} \varphi(nt) \\ &= \sum_{m=0}^{N} \sigma_m^{(\delta)} \sum_{n=0}^{N-m} A_n^{[-(\delta+2)]} \varphi(mt+nt) \\ &= \sum_{m=0}^{N} \sigma_m^{(\delta)} \Delta_t^{(\delta+1)} \varphi\left(mt + t\,\frac{\delta+1}{2}\right) - R_N(t), \end{aligned}$$

où

$$R_N(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(\delta)} s_m^{(\delta)} \sum_{n=N-m+1}^{N} A_n^{[-(\delta+2)]} \varphi(mt+nt).$$

L'hypothèse $t^{\delta+1+\varepsilon}\varphi(t) = O(1)$ suffit largement [on pourrait la remplacer par $t^{\delta+\varepsilon}\varphi(t) = O(1)$] pour établir que l'on a

$$\lim_{N=\infty} R_N(t) = 0.$$

En effet on a, pour t fixe et $n \geqq N - m + 1$,

$$|s_m^{(\delta)} \varphi(\overline{m+n}\, t)| = O\left\{\frac{1}{[(m+n)t]^{\delta+1+\varepsilon}}\right\} = O\left\{\frac{1}{N^{\delta+1+\varepsilon}}\right\}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} |R_N(t)| &< \frac{c_2}{N^{\delta+1+\varepsilon}} \sum_{m=0}^{N} A_m^{(\delta)} \sum_{n=N-m+1}^{\infty} |A_n^{[-(\delta+2)]}| \\ &< \frac{c_2}{N^{\delta+1+\varepsilon}} \sum_{m=0}^{N} A_m^{(\delta)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_3}{n^{2+\delta}} \\ &< \frac{c_4}{N^{\delta+1+\varepsilon}} A_N^{(\delta+1)} < \frac{c_5}{N^{\varepsilon}} \qquad (\varepsilon > 0). \end{aligned}$$

On en déduit

$$F(t) = \lim_{N=\infty} F_N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\delta)} s_n^{(\delta)} \Delta_t^{(\delta+1)} \varphi\left(nt + \frac{\delta+1}{2} t\right).$$

Or

$$s_n^{(\delta)} = s + \varepsilon_n, \qquad \text{où} \qquad \varepsilon_n \to 0 \qquad \text{pour} \qquad n \to \infty.$$

Donc

$$F(t) = s\psi(t) + R(t)$$

avec

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\delta)} \Delta_t^{(\delta+1)} \varphi\left(nt + \frac{\delta+1}{2} t\right)$$

et

$$R(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n A_n^{(\delta)} \Delta_t^{(\delta+1)} \varphi\left(nt + \frac{\delta+1}{2} t\right),$$

et il nous reste à démontrer que $\psi(t) \equiv 1$ et

$$\lim_{t=0} R(t) = 0.$$

L'hypothèse $t^{\delta+1+\varepsilon}\varphi(t) = O(1)$ assure la convergence absolue de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\delta)} \varphi\left(nt + \frac{\delta+1}{2} t\right) = \Delta_t^{[-(\delta+1)]} \varphi(0),$$

par conséquent on peut écrire

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \Delta_t^{(\delta+1)}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\delta)}\varphi\left(nt+\frac{\delta+1}{2}t\right)\right\} \\ &= \Delta_t^{(\delta+1)}\left\{\Delta_t^{-(\delta+1)}\varphi(0)\right\} = \varphi(0) = 1.\end{aligned}$$

L'hypothèse beaucoup plus large $t^{\delta+s}\varphi(t) = O(1)$ permettrait d'établir l'équation limite

$$\lim_{t=0}\psi(t) = 1,$$

qui suffirait pour notre but. Passons maintenant au calcul de la limite $\lim\limits_{t=0} R(t)$. Posons $r = E\left(\frac{1}{t}\right)$ et décomposons $R(t)$ ainsi :

$$\begin{aligned}R(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n A_n^{(\delta)}\Delta_t^{(\delta+1)}\varphi\left(nt+\frac{\delta+1}{2}t\right) \\ &= \sum_{n=0}^{N} + \sum_{N+1}^{r} + \sum_{r+1}^{\infty} \\ &= R_1(t) + R_2(t) + R_3(t),\end{aligned}$$

l'entier N étant suffisamment grand pour avoir $|\varepsilon_n| < \varepsilon$ pour $n > N$ et t suffisamment petit pour $r > N$.

Il est clair que N étant fixe on a immédiatement

$$\lim_{t=0} R_1(t) = 0.$$

Vu que pour $x \to \infty$ et $t \to 0$ on a

$$\Delta_t^{(\delta+1)}\varphi(x) = t^{\delta+1}\varphi^{(\delta+1)}(x+\theta_t) = O\left(\frac{t^{\delta+1}}{x^{\delta+1+\varepsilon}}\right),$$

on en conclut

$$\left|\Delta_t^{(\delta+1)}\varphi\left(nt+t\,\frac{\delta+1}{2}\right)\right| < \frac{c_6}{n^{\delta+1+\varepsilon}t^{\varepsilon}},$$

ce qui donne pour t suffisamment petit

$$\begin{aligned}|R_3(t)| &< \frac{\varepsilon c_6}{t^{\varepsilon}}\sum_{n=r+1}^{\infty}\frac{A^{(\delta)}}{n^{\delta+1+\varepsilon}} < \frac{\varepsilon c_7}{t^{\varepsilon}}\sum_{r+1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \\ &< \frac{\varepsilon c_8}{t^{\varepsilon}}\,\frac{1}{r^{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon c_8}{\left[t\,E\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{\varepsilon}} < \varepsilon c_9.\end{aligned}$$

Reste le terme $R_2(t)$ pour lequel on a aussi $|\varepsilon_n| < \varepsilon$, donc en désignant par M la borne supérieure de la dérivée $\varphi^{(\delta+1)}(x)$ dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$:

$$|R_2(t)| < M\varepsilon \sum_{N+1}^{r} A_n^{(\delta)} t^{\delta+1} < M\varepsilon t^{\delta+1} \sum_{0}^{r} A_n^{(\delta)}$$
$$= M\varepsilon t^{\delta+1} A_r^{(\delta+1)} < \varepsilon c_{10} (rt)^{\delta+1} < \varepsilon c_{10}.$$

Tout ceci permet de conclure

$$\lim_{t=0} R(t) = 0,$$

ce qui achève la preuve du lemme énoncé plus haut.

Appliquons le lemme démontré à la fonction

$$\varphi(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^p \qquad [p = E(p)],$$

où p est un entier positif. Cette fonction satisfait aux conditions du lemme pour $p > \delta + 1$. En effet

$$\varphi(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad t^p \varphi(t) = O(1) \qquad (t \to \infty).$$

Quant aux dérivées d'ordre entier on a, pour $t \to \infty$,

$$t^p \varphi^{(k)}(t) = O(1) \qquad (k \leqq p),$$

pour $k \leqq p$, mais non pour $k > p$. Vérifions la condition relative à $\varphi^{(\delta+1)}(t)$. Posons

$$q = 1 + E(\delta + 1) \leqq p,$$

alors

$$\varphi^{(\delta+1)}(x) = \frac{(-1)^q}{\Gamma(q-\delta-1)} \int_x^{\infty} \frac{\varphi^{(q)}(u)\, du}{(u-x)^{2+\delta-q}}$$
$$= \frac{(-1)^q}{\Gamma(q-\delta-1)} \int_x^{x+a} + \frac{(-1)^q}{\Gamma(q-\delta-1)} \int_{x+a}^{\infty} = i_1 + i_2.$$

Or

$$x^p |i_1| = O\left\{ \int_x^{x+a} (u-x)^{q-\delta-2}\, du \right\} = O(1),$$

puisque

$$u^p |\varphi^{(q)}(u)| = O(1),$$

vu que $q \leqq p$. D'autre part l'intégration par parties donne pour i_2 :

$$(-1)^q \Gamma(q-\delta-1) x^p i_2 = x^p \left| \frac{\varphi^{(q-1)}(u)}{(u-x)^{2+\delta-q}} \right|_{x+a}^{\infty}$$
$$+ (2+\delta-q) x^p \int_{x+a}^{\infty} \frac{\varphi^{(q-1)}(u)\,du}{(u-x)^{3+\delta-q}}$$
$$= -\frac{x^p \varphi^{(q-1)}(x+a)}{a^{2+\delta-q}} + O\left\{ x^p \int_{x+a}^{\infty} \frac{du}{u^p (u-x)^{3+\delta-q}} \right\}$$
$$= O\left\{ \left(\frac{x}{x+a} \right)^p \right\} + O\left\{ \int_{x+a}^{\infty} \frac{du}{(u-x)^{3+\delta-q}} \right\} = O(1).$$

Par conséquent pour $\delta + 1 < p$ on a

$$t^{\delta+1+\varepsilon} |\varphi^{(\delta+1)}(t)| < t^p |\varphi^{(\delta+1)}(t)| = O(1) \qquad (\varepsilon > 0).$$

et l'on a droit de formuler le cas particulier suivant de notre lemme : *soit* $\sum_0^{\infty} u_n$ *sommable* (C, δ) *avec la somme* s, *on a*

$$\lim_{t=0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n \left(\frac{\sin nt}{nt} \right)^p = \lim_{m=\infty} s_m^{\delta} = S,$$

pour chaque entier $p > \delta + 1$. On pourrait appeler le procédé de sommation des séries divergentes à l'aide des facteurs de convergence du type $\left(\frac{\sin nt}{nt} \right)^p$ le procédé de Riemann puisque c'est Riemann qui a envisagé le cas particulier $p = 2$.

Si l'on veut envisager les ordres non entiers on pourrait remplacer cette définition par la définition suivante : *une série* $\sum_0^{\infty} u_n$, *pour laquelle on a*

$$\lim_{t=0} \sum_0^{\infty} u_n \left(\frac{\sin nt}{nt} \right)^{\gamma} = S,$$

est dite sommable par le procédé de Riemann d'ordre γ, *bref sommable* (R, γ) *avec la somme* S.

Notre corollaire peut être à présent formulé ainsi : *une série sommable par les moyennes arithmétiques d'ordre* δ *l'est aussi et avec la même somme par le procédé de Riemann d'ordre entier* $p > \delta + 1$.

Il est très probable — et nous posons ici ce problème — que la restriction concernant l'ordre p qui doit être entier est inutile et qu'une série sommable (C, δ) l'est aussi et avec la même somme (R, γ) pourvu que $\gamma > p + 1$.

La définition du procédé de sommation (R, γ) se laisse transposer facilement dans le domaine des intégrales divergentes : *une intégrale divergente*

$$\int_0^\infty f(x)\,dx$$

est dite sommable (R, γ) *avec la somme* S, *si l'on a*

$$\lim_{t=0} t^{-\gamma} \int_0^\infty x^{-\gamma} f(x)(\sin xt)^\gamma\,dx = S.$$

On démontre que *chaque intégrale convergente — ainsi que chaque série convergente — sont sommables* $(R, 1)$, ce qui suggère l'idée que l'inégalité $\gamma > \delta + 1$ pourrait être remplacée aussi dans le cas général $\delta \neq 0$ par l'égalité $\gamma = \delta + 1$ en ramenant ainsi l'énoncé du problème posé plus haut à la forme suivante :

Problème. — *Est-il vrai qu'une série (intégrale) sommable* (C, δ) *l'est aussi* (R, γ) *pour* $\gamma = \delta + 1$?

Quant aux intégrales divergentes on démontre facilement la proposition suivante qui est entièrement analogue au corollaire de notre lemme : *une intégrale sommable* (C, δ) *l'est aussi* (R, p), *si l'entier* $p > \delta + 1$.

Donnons un exemple de sommation (R, γ) des intégrales divergentes. Soit $0 < \alpha < 1$ et envisageons l'intégrale

$$\int_0^\infty x^{1-\alpha} \cos x\,dx \qquad (0 < \alpha < 1).$$

Grâce au facteur $\cos x$ l'intégrale essentiellement divergente

$$\int_0^\infty x^{1-\alpha}\,dx \qquad (0 < \alpha < 1)$$

devient sommable et en appliquant le procédé (C, δ) avec $\delta > 1 - \alpha$

on a pour $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\infty x^{1-\alpha}\cos x\,dx \sim \lim_{\omega=\infty}\int_0^\omega\left(1-\frac{x}{\omega}\right)^{1-\alpha+\varepsilon} x^{1-\alpha}\cos x\,dx = -\Gamma(2-\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}.$$

Appliquons maintenant le procédé (R, γ) avec $\gamma = 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{1-\alpha}\cos x\,dx &\sim \lim_{t=0}\int_0^\infty x^{1-\alpha}\cos x\frac{\sin xt}{xt}\,dx\\ &= \lim_{t=0}\frac{1}{2t}\int_0^\infty\frac{\sin[(1+t)x]-\sin[(1-t)x]}{x^\alpha}\,dx\\ &= \lim_{t=0}\frac{1}{2t}\left\{(1+t)^{\alpha-1}\int_0^\infty\frac{\sin u\,du}{u^\alpha}-(1-t)^{\alpha-1}\int_0^\infty\frac{\sin u\,du}{u^\alpha}\right\}\\ &= \left[\lim_{t=0}\frac{(1+t)^{\alpha-1}-(1-t)^{\alpha-1}}{2t}\right]\times\int_0^\infty\frac{\sin u\,du}{u^\alpha}\\ &= \left[\frac{d(x^{\alpha-1})}{dx}\right]_{x=1}\times\int_0^\infty\frac{\sin u\,du}{u^\alpha} = (\alpha-1)\cos\frac{\pi\alpha}{2}\Gamma(1-\alpha),\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^\infty x^{1-\alpha}\cos x\,dx \sim -\cos\frac{\alpha\pi}{2}\Gamma(2-\alpha)$$

et en particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$\int_0^\infty \sqrt{x}\cos x\,dx \sim -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

L'intérêt que présente cet exemple consiste dans le fait qu'une intégrale sommable (C, $\delta > 1-\alpha$) et non sommable (C, $\delta \leqq 1-\alpha$) l'est aussi (R, 1) : donc ici γ est non seulement inférieur à $\delta + 1$ mais, pour α très petit, aussi voisin de δ qu'on veut en restant toujours supérieur à δ : $1 = \gamma > \delta > 1-\alpha$. Cet exemple suggère l'idée qu'une intégrale (série) sommable (C, δ) l'est (R, γ) *peut-être déjà pour* $\gamma > \delta$.

En revenant à notre corollaire nous l'appliquons aux séries trigonométriques. Soit donc

$$u_n = a_n\cos nx + b_n\sin nx.$$

Si la série

$$a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx + \ldots$$

est sommable (C, δ), avec la somme $f(x)$ on a aussi

$$\lim_{t=0} \Psi_p(x, t) = \lim_{t=0} \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \left[\frac{\sin nt}{nt}\right]^p \right\} = f(x),$$

pour $p = \mathrm{E}(p) > \delta = 1$. Or l'expression $\Psi_p\left(x, \frac{t}{2}\right)$ n'est autre chose que le quotient $t^{-p}\Delta_t^{(p)}[\mathrm{F}_p(x)]$, où la fonction $\mathrm{F}_p(x)$ est le résultat de p intégrations consécutives terme à terme de la série envisagée

$$\mathrm{F}_p(x) = a_0 \frac{x^p}{p!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos\left(nx - \frac{p\pi}{2}\right) + b_n \sin\left(nx - \frac{p\pi}{2}\right)}{n^p}.$$

En effet on vérifie facilement que l'on a

$$\Delta_t^{(p)}\left[e^{i\left(nx - \frac{p\pi}{2}\right)}\right] = e^{inx}\left(2 \sin \frac{nt}{2}\right)^p,$$

donc

$$t^{-p}\Delta_t^{(p)}[\mathrm{F}_p(x)] = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \left[\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\frac{nt}{2}}\right]^p = \Psi_p\left(x, \frac{t}{2}\right).$$

Ainsi *la somme $f(x)$ d'une série trigonométrique sommable* (C, δ) *est la $p^{\text{ième}}$ dérivée généralisée de l'intégrale p-uple de la série, si $p = \mathrm{E}(p) > \delta + 1$* :

$$\lim_{t=0} \{ t^{-p}\Delta_t^{(p)}[\mathrm{F}_p(x)] \} = \lim_{m=\infty} s_m^{\delta}(x) = f(x).$$

On voit que *le lemme classique de Riemann* (qui correspond au cas $p = 2$) *est applicable non seulement aux séries trigonométriques convergentes* (cas signalé par Riemann lui-même), *mais aussi aux séries trigonométriques divergentes sommables* (C, δ) *pour* $\delta < 1$.

Il est bien possible que la restriction $\delta < 1$ n'est pas nécessaire et que l'on pourrait étendre le résultat obtenu aux séries sommables (C, 1) ou même (C, $\delta < 2$), mais ce résultat suffit pour notre but.

Dans son célèbre Mémoire ([1]) M. L. Féjèr a démontré qu'on a pour

([1]) *Math. Annalen*, Band 58, 1904.

les séries trigonométriques sommables (C, $\delta = 1$) avec la somme s,

$$\lim_{t=0} \left\{ a_0 + \sum_{\infty}^{n=1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \left[\frac{\sin nt}{nt}\right]^4 \right\} = s.$$

Notre lemme a permis d'établir que dans ce cas particulier $p = 4$ le même résultat a lieu aussi pour les séries trigonométriques sommables (C, $\delta > 1$) pourvu que l'on ait $\delta < 3$. On a par exemple

$$\lim_{t=0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \left(\frac{\sin nt}{t}\right)^4 = 0 \qquad (0 < x < 2\pi),$$

vu que la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cos nx$ est sommable (C, $\delta > 2$) avec la somme zéro à l'intérieur de l'intervalle $(0, 2\pi)$.

Dans ce cas particulier de la série $\sum n^2 \cos nx$, on a aussi

$$\lim_{t=0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \left(\frac{\sin nt}{t}\right)^3 = 0 \qquad (0 < x < 2\pi),$$

comme on le vérifie facilement vu que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}.$$

Un autre exemple particulier, celui de la série divergente

$$0 \sim \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx + \ldots, \tag{4}$$

sommable (C, $\delta > 0$) pour $x \not\equiv 0, 2\pi$ avec zéro pour somme, donne pour $p = 2$ le résultat

$$\lim_{t=0} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \left(\frac{\sin nt}{t}\right)^2 \right\} = 0 \qquad (0 < x < 2\pi),$$

qu'on peut du reste vérifier par le calcul direct.

La sommabilité (C, $\delta > 0$) de la série (4) étant uniforme dans l'intervalle $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$ quelque petit que soit ε, ce résultat est uniformément valable dans $(\varepsilon, 2\pi-\varepsilon)$, ce qui permet de prouver par un raisonnement direct la sommabilité (R, 2) de la série de Fourier au point de continuité de la fonction développée. Vu que la sommabilité $(C, \delta>0)$ de la série de Fourier d'une fonction intégrable φ a lieu presque partout nous en concluons à l'aide de notre corollaire que *la série de Fourier d'une fonction sommable est sommable presque partout dans* $(0, 2\pi)$ *par le procédé de Riemann*.

3. — Lemmes concernant les séries ultrasphériques.

On trouve dans ce paragraphe quatre lemmes nécessaires pour la démonstration des théorèmes énoncés dans l'Introduction. Ils se rapportent aux séries ultrasphériques données par leurs coefficients

$$(1) \qquad \alpha_0+\alpha_1 P_1^{\lambda}(\cos\theta)+\ldots+\alpha_n P_n^{\lambda}(\cos\theta)+\ldots \qquad (x=\cos\theta,\ 0\leq\theta\leq\pi)$$

et à la série associée suivante :

$$(11) \qquad F(\cos\theta)\sim\alpha_0\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}\left(\frac{\sin\psi}{\sin\varphi}\right)^{2\lambda}d\psi\,d\varphi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n P_n^{\lambda}(\cos\theta)}{n(n+2\lambda)}.$$

Avant d'énoncer les lemmes en question nous définissons l'opération Ω_t^{λ} suivante :

$$\Omega_t^{\lambda}[f(\theta)]=\frac{\Delta^2 f(\theta)}{t^2}+2\lambda\cot\theta\,\frac{\Delta f(\theta)}{2t},$$

où

$$\Delta^2 f(\theta)=f(\theta+t)-2f(\theta)+f(\theta-t)$$

et

$$\Delta f(\theta)=f(\theta+t)-f(\theta-t).$$

Cette opération est liée à l'équation différentielle du polynome $P_n^{\lambda}(\cos\theta)$, qu'on peut transcrire ainsi :

$$(12) \qquad \lim_{t=0}\Omega_t^{\lambda}[P_n^{\lambda}(\cos\theta)]=-n(n+2\lambda)P_n^{\lambda}(\cos\theta),$$

de même que la seconde dérivée généralisée est liée à l'équation différentielle des fonctions trigonométriques

$$\lim_{t=0}\frac{\Delta^2(\cos n\theta)}{t^2}=-n^2\cos\theta.$$

En faisant tendre λ vers zéro on réduit le quotient du polynome ultrasphérique $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ par λ à la fonction $\cos n\theta$ et l'opération $\Omega_t^{(\lambda)}$ à l'opération $t^{-2}\Delta^2$.

La série associée $F(\cos\theta)$ a été obtenue par l'opération inverse à l'opération $\lim\limits_{t=0}\Omega_t^{(\lambda)}$, et l'on a en appliquant ces deux opérations successivement

$$(13) \qquad \lim_{t=0}\Omega_t^{(\lambda)}\left[\int_{\theta_0}^{\theta}\int_{\theta_0}^{\varphi}\left(\frac{\sin\psi}{\sin\varphi}\right)^{2\lambda} f(\psi)\,d\psi\,d\varphi\right] = f(\theta).$$

Nous énonçons maintenant les quatre lemmes I-IV :

Lemme I. — *Soit $f(\theta)$ continue dans un intervalle (α, β) intérieur à l'intervalle $(0, \pi)$: si elle satisfait partout dans (α, β) à la condition*

$$\lim_{t=0}\Omega_t^{(\lambda)}[f(\cos\theta)] = 0 \qquad (\alpha \leq \theta \leq \beta),$$

elle s'y réduit à

$$f(\cos\theta) = A\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{d\varphi}{\sin^{2\lambda}\varphi} + B \qquad (\alpha \leq \theta \leq \beta),$$

où A *et* B *sont des constantes.*

Lemme II. — *Si la série* (1) *est sommable* $(C, \delta < 1)$ *en un point intérieur* θ — $(0 < \theta < \pi)$ — *avec la somme* $f(\cos\theta)$ *on a en ce point*

$$\lim_{t=0}\Omega_t^{(\lambda)}[F(\cos\theta)] = f(\cos\theta).$$

Lemme III. — *Si le coefficient α_n du terme général de la série* (1) *satisfait à la condition* $\alpha_n = o(n^{1-\lambda})$, *alors on a*

$$\lim_{t=0}\frac{\Delta^2[F(\cos\theta)]}{t^2} = 0$$

partout à l'intérieur de l'intervalle $(0, \pi)$.

Lemme IV. — *Soit $f(x)$ une fonction bornée à l'intérieur de l'intervalle* $(-1, +1)$ *et telle que le produit* $(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}|f(x)|$ *est intégrable dans* $(-1, +1)$. *Les coefficients ultrasphériques de Fourier de cette fonction $a_n^{(\lambda)}$ sont de l'ordre de* $o(n)$:

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_n^{(\lambda)}}{n+1} = 0.$$

Les lemmes I-III généralisent les lemmes classiques de Schwarz et de Riemann concernant les séries trigonométriques et qui sont du reste leurs cas limites pour $\lambda \to 0$, vu que l'opération $\lim\limits_{t=0} \Omega_t^{(\lambda)}$ donne à la limite pour $\lambda = 0$ la dérivée seconde généralisée.

Pour démontrer le lemme I il suffit de considérer la fonction auxiliaire

$$\psi(\theta) = f(\theta) + 2\lambda \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} f(\varphi) \cot\varphi \, d\varphi + 2\lambda \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{f(\psi)\, d\psi}{\sin^2\psi}$$

pour laquelle l'hypothèse

$$\lim_{t=0} \Omega_t^{(\lambda)}[f(\theta)] = 0$$

entraîne, comme il est facile de vérifier,

$$\lim_{t=0} \frac{\Delta^2 \psi(\theta)}{t^2} = 0.$$

En appliquant à la fonction $\psi(\theta)$ le lemme de Schwarz on voit qu'elle possède dans (α, β) les deux dérivées premières continues; $\psi'(\theta)$ est constante pour $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ et $\psi''(\theta)$ est identiquement nulle. On en conclut la continuité de $f'(\theta)$ et $f''(\theta)$ dans (α, β), ce qui entraîne

$$\lim_{t=0} \Omega_t^{(\lambda)}[f(\theta)] = f''(\theta) + 2\lambda \cot\theta \, f'(\theta) = 0.$$

L'intégration de cette équation différentielle prouve le lemme I.

La démonstration du lemme II est basée sur la formule approximative (9) du paragraphe I. Les différences du produit de deux fonctions $\Delta(f\varphi)$ et $\Delta^2(f\varphi)$ qui entrent dans l'opération $\Omega^{(\lambda)}$ peuvent être écrites ainsi :

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta(f\varphi) &= \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \Delta\varphi + \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{2} \Delta f, \\ \Delta^2(f\varphi) &= \frac{f(x+2t) + 2f(x) + f(x-2t)}{4} \Delta^2\varphi \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta f \Delta\varphi + \frac{\varphi(x+2t) + 2\varphi(x) + \varphi(x-2t)}{4} \Delta^2 f. \end{aligned} \right.$$

Avant d'appliquer l'opération $\Omega_t^{(\lambda)}$ à la somme $F(\cos\theta)$ de la série (11), qui converge absolument à l'intérieur de l'intervalle $(0, \pi)$

et uniformément pour $\varepsilon \leqq \theta \leqq \pi - \varepsilon$, $(\varepsilon > 0)$, si la série (11) est supposée sommable $(C, \delta < 1)$, nous allons indiquer une relation entre

$$\overline{\Omega}_t[(2\sin\theta)^{\lambda+1}\Phi(\theta)] \quad \text{et} \quad \Omega_t^{(\lambda)}[\Phi(\theta)],$$

où l'opération $\overline{\Omega}_t$ est le cas particulier pour $\lambda = -1$ de l'opération $\Omega^{(\lambda)}$:

$$\overline{\Omega}_t[f(\theta)] \equiv \frac{\Delta^2 f(\theta)}{t^2} - 2\cot\theta\,\frac{\Delta f(\theta)}{2t}.$$

On vérifie facilement à l'aide de (14) que l'on a, pour une fonction $\Phi(\theta)$ possédant la dérivée $\Phi'(\theta)$,

$$(15)\quad \lim_{t=0}\overline{\Omega}_t[(2\sin\theta)^{\lambda+1}\Phi(\theta)]$$
$$= (2\sin\theta)^{\lambda+1}\lim_{t=0}\Omega_t^{(\lambda)}[\Phi(\theta)] - \frac{\lambda+1}{\sin^2\theta}[1+(1-\lambda)\cos^2\theta](2\sin\theta)^{\lambda+1}\Phi(\theta).$$

La sommabilité $(C, \delta < 1)$ de (1) entraîne

$$\alpha_n P_n^{(\lambda)}(\cos\theta_0) = o(n^\delta)$$

ou bien, vu que

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta_0) = O(n^{\lambda-1}):$$
$$\alpha_n = o(n^{\delta+1-\lambda}),$$

ce qui assure la convergence de la série (11) dérivée terme à terme, donc l'existence de la dérivée $\frac{dF}{d\theta}$ aux points de la sommabilité $(C, \delta < 1)$ de (1). On peut par conséquent y appliquer la relation (15), d'où

$$(16)\quad \lim_{t=0}\overline{\Omega}_t[(2\sin\theta)^{\lambda+1}F(\cos\theta)]$$
$$= (2\sin\theta)^{\lambda+1}\lim_{t=0}\Omega_t^{(\lambda)}[F(\cos\theta)] - \frac{\lambda+1}{\sin^2\theta}[1+(1-\lambda)\cos^2\theta](2\sin\theta)^{\lambda+1}F(\cos\theta).$$

On voit qu'il suffit de calculer

$$\lim_{t=0}\overline{\Omega}_t[(2\sin\theta)^{\lambda+1}F(\cos\theta)]$$

pour connaître $\lim_{t=0}\Omega_t^{(\lambda)}[F(\cos\theta)]$, donc pour prouver le lemme II.

Or la formule (9) donne

$$(2\sin\theta)^{\lambda+1}P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = 2A_n^{(\lambda-1)}\left[Q_n^{(\lambda)}(\theta) + \frac{r_n(\theta)}{(n+\lambda)^2}\right],$$

où

$$Q_n^{(\lambda)}(\theta) = 2\sin\theta\cos\omega_n - \frac{\lambda(\lambda-1)}{n+\lambda-1}\sin\omega_{n-1}$$

avec $\omega_n = (n+\lambda)\theta - \frac{\lambda\pi}{2}$. La fonction $\sin\theta . r_n(\theta)$ est bornée dans $(0, \pi)$, donc $r_n(\theta)$ bornée à l'intérieur de l'intervalle.

Posons pour simplifier l'écriture

$$2\alpha_n A_n^{(\lambda-1)} = \beta_n = o(n^\delta) \qquad (\delta < 1)$$

ainsi que

$$A_0(\theta) = (2\sin\theta)^{\lambda+1}\alpha_0 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}\left(\frac{\sin\psi}{\sin\varphi}\right)^{2\lambda} d\psi\, d\varphi.$$

Avec ces notations on a, $f(\cos\theta)$ désignant la somme de la série (1) sommable $(C, \delta < 1)$,

$$(2\sin\theta)^{\lambda+1} f(\cos\theta) \sim (2\sin\theta)^{\lambda+1}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n Q_n^{(\lambda)}(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n r_n(\theta)}{(n+\lambda)^2},$$

ainsi que

$$\begin{aligned}(2\sin\theta)^{\lambda+1} F(\cos\theta) &= A_0(\theta) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n Q_n^{(\lambda)}(\theta)}{n(n+2\lambda)} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{n(n+2\lambda)}\,\frac{r_n(\theta)}{(n+\lambda)^2}\\ &= A_0(\theta) - S_1(\theta) - S_2(\theta).\end{aligned}$$

En appliquant (15) à la fonction $A_0(\theta)$ on obtient eu égard à (13)

$$(17) \qquad \lim_{t=0}\overline{\Omega}_t[A_0(\theta)] = (2\sin\theta)^{\lambda+1}\alpha_0 - \frac{\lambda+1}{\sin^2\theta}[1 + (1-\lambda)\cos^2\theta]A_0(\theta).$$

La série $S_2(\theta)$ converge absolument et uniformément dans tout intervalle intérieur à $(0, \pi)$ et, vu que

$$\frac{r_n(\theta)}{(n+\lambda)^2} = \frac{(2\sin\theta)^{\lambda+1}P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)}{2A_n^{(\lambda-1)}} - Q_n^{(\lambda)}(\theta),$$

on obtient, en appliquant à la fonction $(2\sin\theta)^{\lambda+1}. P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ la relation (15)

$$\begin{aligned}\lim_{t=0}\overline{\Omega}_t&\left[\frac{r_n(\theta)}{(n+\lambda)^2}\right]\\ &= \frac{(2\sin\theta)^{\lambda+1}}{2A_n^{(\lambda-1)}}\left\{\lim_{t=0}\Omega_t^{(\lambda)}[P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)] - \frac{\lambda+1}{\sin^2\theta}[1 + (1-\lambda)\cos^2\theta]\,P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)\right\}\\ &\quad - \frac{d^2Q_n^{(\lambda)}}{d\theta^2} + 2\cot\theta\frac{dQ_n^{(\lambda)}}{d\theta}.\end{aligned}$$

On en déduit, après des réductions évidentes et en s'appuyant sur (12),

$$(18)\quad \lim_{t=0}\overline{\Omega}_t\left[\frac{r_n(\theta)}{(n+\lambda)^2}\right]$$
$$= -n(n+2\lambda)\frac{r_n(\theta)}{(n+\lambda)^2}+(\lambda^2-1)\,Q_n^{(\lambda)}(\theta)$$
$$-\frac{\lambda+1}{\sin^2\theta}[1+(1-\lambda)\cos^2\theta]\frac{(2\sin\theta)^{\lambda+1}P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)}{2A_n^{\lambda-1}}+\frac{2(2+\lambda-\lambda^2)}{\sin\theta}\cos\omega_n.$$

Ce résultat nous montre que la série, qu'on obtient en appliquant à la série $S_2(\theta)$ l'opération $\overline{\Omega}_t$ terme à terme et en passant ensuite à la limite pour $t=0$, converge aussi absolument dans tout intervalle intérieur à l'intervalle $(0,\pi)$. Donc, étant donné que dans l'énoncé du lemme le point θ est intérieur à l'intervalle $(0,\pi)$, on en déduit la possibilité d'intervertir les signes $\sum_{n=1}^{\infty}$ et $\lim_{t=0}$ dans le calcul de la limite

$$\lim \overline{\Omega}_t[S_2(\theta)].$$

Par conséquent on obtient en multipliant les deux membres de (18) par $\frac{\beta_n}{n(n+2\lambda)}$ et en sommant de $n=1$ jusqu'à $n=\infty$:

$$(19)\quad \lim_{t=0}\overline{\Omega}_t[S_2(\theta)]=(\lambda^2-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n Q_n^{(\lambda)}(\theta)}{n(n+2\lambda)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n r_n(\theta)}{(n+\lambda)^2}$$
$$+\frac{2(2+\lambda-\lambda^2)}{\sin\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n\cos\omega_n}{n(n+2\lambda)}$$
$$+\frac{\lambda+1}{\sin^2\theta}[1+(1-\lambda)\cos^2\theta]\,[(2\sin\theta)^{\lambda+1}F(\cos\theta)-A_0(\theta)].$$

Passons maintenant à la série

$$S_1(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n Q_n^{(\lambda)}(\theta)}{n(n+2\lambda)}.$$

On a, pour $\delta\neq 0$,

$$\overline{\Omega}_t[S_1(\theta)]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{n(n+2\lambda)}\overline{\Omega}_t[2\sin\theta\cos\omega_n]$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{n(n+2\lambda)}\,\frac{\lambda(\lambda-1)}{n+\lambda-1}\,\overline{\Omega}_t[\sin\omega_{n-1}]$$
$$=\sigma_1(t)-\sigma_2(t).$$

En appliquant (14) on calcule facilement l'expression suivante de $\overline{\Omega}_t[2\sin\theta\cos\omega_n]$:

$$(20)\quad \overline{\Omega}_t[2\sin\theta\cos\omega_n]$$
$$= -n(n+2\lambda)\,2\sin\theta\cos\omega_n\cos^2\frac{t}{2}\left[\frac{\sin(n+\lambda)\frac{t}{2}}{(n+\lambda)\frac{t}{2}}\right]^2$$
$$2\sin\theta\cos\omega_n\left\{\lambda^2\cos^2\frac{t}{2}\left[\frac{\sin(n+\lambda)\frac{t}{2}}{(n+\lambda)\frac{t}{2}}\right]^2\right.$$
$$\left.+\cos^2(n+\lambda)\frac{t}{2}\left[\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right]^2-2\cos[(n+\lambda)t]\frac{\sin t}{t}\right\}$$
$$-\frac{4}{\sin\theta}\cos\omega_n\cos[n+\lambda)t]\frac{\sin t}{t}$$
$$+4\cos\theta\sin\omega_n\sin[(n+\lambda).t]\frac{t\cos t-\sin t}{t^2},$$

ainsi que

$$(21)\quad \overline{\Omega}_t[\sin\omega_{n-1}] = -n(n+2\lambda)\sin\omega_{n-1}\left[\frac{\sin\frac{n+\lambda-1}{2}t}{\frac{n+\lambda-1}{2}t}\right]^2$$
$$-(\lambda^2-1)\sin\omega_{n-1}\left[\frac{\sin\frac{n+\lambda-1}{2}t}{\frac{n+\lambda-1}{2}t}\right]^2$$
$$-2(n+\lambda-1)\left\{\cot\theta\cos\omega_{n-1}\frac{\sin[(n+\lambda-1)t]}{(n+\lambda-1)t}\right.$$
$$\left.-\sin\omega_{n-1}\left[\frac{\sin\frac{n+\lambda-1}{2}t}{\frac{n+\lambda-1}{2}t}\right]^2\right\}.$$

En multipliant les deux membres de (20) par $\frac{\beta_n}{n(n+2\lambda)}$ et en sommant de $n=1$ jusqu'à $n=\infty$, on obtient $\sigma_1(t)$ sous la forme de quatre séries qui correspondent aux quatre termes du second membre.

Pour t fixe toutes ces séries convergent absolument et uniformément dans (α, β), mais on s'aperçoit que l'hypothèse de la sommabilité $(C, \delta < 1)$ de la série (1), qui entraîne $\beta_n = o(n^\delta)$, assure cette convergence absolue et uniforme pour les deux de ces quatre séries même à la limite $t = 0$. Quant aux deux autres qui correspondent au premier et au dernier terme du second membre de (20), à savoir

$$-2\sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos\omega_n \left[\frac{\sin\frac{n+\lambda}{2}t}{\frac{n+\lambda}{2}t}\right]^2$$

et

$$4\frac{t\cos t - \sin t}{t^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \sin\omega_n \sin(n+\lambda)t}{n(n+2\lambda)},$$

la dernière converge aussi absolument et uniformément et sa somme est nulle pour $t = 0$ puisque le facteur $\frac{t\cos t - \sin t}{t^2}$ tend vers zéro avec t et à l'autre nous appliquons le corollaire de notre lemme du paragraphe 2 en y posant $p = 2$.

En effet la sommabilité $(C, \delta < 1)$ de la série

$$\mathfrak{S}_1(\theta) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos\omega_n,$$

dont nous désignons la somme par $\mathfrak{S}_1(\theta)$, est la condition nécessaire de la sommabilité $(C, \delta < 1)$ de la série (1), ce qui permet de conclure

$$\lim_{t=0} \left\{ -2\sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos\omega_n \left[\frac{\sin\frac{n+\lambda}{2}t}{\frac{n+\lambda}{2}t}\right]^2 \right\} = -2\sin\theta\, \mathfrak{S}_1(\theta)$$

pour tout point intérieur θ, où la série (1) est sommable $(C, \delta < 1)$.

En passant à la limite $t = 0$ dans l'expression en question de la fonction $\sigma_1(t)$, on obtient par conséquent

$$(22) \qquad \lim_{t=0} \sigma_1(t) = -2\sin\theta\, \mathfrak{S}_1(\theta) - \frac{4}{\sin\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \cos\omega_n}{n(n+2\lambda)} - (\lambda^2 - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n(n+2\lambda)} 2\sin\theta\cos\omega_n.$$

Passons maintenant au calcul de la limite $\lim\limits_{t=0} \sigma_2(t)$. En multipliant les deux membres de (21) par

$$\frac{\lambda(\lambda-1)}{n+\lambda-1}\,\frac{\beta_n}{n(n+2\lambda)}$$

et en sommant de $n=1$ jusqu'à $n=\infty$, on obtient $\sigma_2(t)$ sous la forme de trois séries qui correspondent aux trois termes du second membre de (21). La somme de la première

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \sin\omega_{n-1}}{n+\lambda-1}\left[\frac{\sin\dfrac{n+\lambda-1}{2}t}{\dfrac{n+\lambda-1}{2}t}\right]^2$$

en vertu de notre lemme du paragraphe 2 tend pour $t \to 0$ vers la somme $\mathfrak{S}_2(\theta)$ de la série

$$\mathfrak{S}_2(\theta) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \sin\omega_{n-1}}{n+\lambda-1},$$

qui est sommable $(C, \delta<1)$ grâce à la sommabilité $(C, \delta<1)$ de la série (1) :

$$\lim_{t=0}\left\{-\lambda(\lambda-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n \sin\omega_{n-1}}{n+\lambda-1}\left[\frac{\sin(n+\lambda-1)\dfrac{t}{2}}{(n+\lambda-1)\dfrac{t}{2}}\right]^2\right\} = -\lambda(\lambda-1)\mathfrak{S}_2(\theta).$$

Les deux autres séries qui entrent dans $\sigma_2(t)$ convergent absolument et uniformément aussi à la limite $t=0$. Donc on a

$$\begin{aligned}(23)\quad \lim_{t=0}\sigma_2(t) = -\lambda(\lambda-1)\mathfrak{S}_2(\theta) &- (\lambda^2-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{n(n+2\lambda)}\,\frac{\lambda(\lambda-1)\sin\omega_{n-1}}{n+\lambda-1}\\ &- 2\lambda(\lambda-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{n(n+2\lambda)}[\cot\theta\cos\omega_{n-1} - \sin\omega_{n-1}].\end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{t=0}\overline{\Omega}_t[S_1(\theta)] = \lim_{t=0}\sigma_1(t) - \lim_{t=0}\sigma_2(t)$$

et (22) et (23) nous donnent

$$\begin{aligned}\lim\overline{\Omega}_t[S_1(\theta)] = &-[2\sin\theta\,\mathfrak{S}_1(\theta) - \lambda(\lambda-1)\mathfrak{S}_2(\theta)]\\ &-(\lambda^2-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n Q_n^{(\lambda)}(\theta)}{n(n+2\lambda)} - \frac{2(2+\lambda-\lambda^2)}{\sin\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n\cos\omega_n}{n(n+2\lambda)}.\end{aligned}$$

Le premier terme du second membre est la somme de la série sommable $(C, \delta < 1)$

$$2\sin\theta\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\cos\omega_n - \lambda(\lambda-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n\sin\omega_{n-1}}{n+\lambda-1} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n Q_n^{\lambda}(\theta).$$

Désignons cette somme par $Q(\theta)$

$$Q(\theta) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n Q_n^{\lambda}(\theta).$$

Plus haut on a vu que

$$(2\sin\theta)^{\lambda+1}f(\cos\theta) = (2\sin\theta)^{\lambda+1}\alpha_0 + Q(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n r_n(\theta)}{(n+\lambda)^2},$$

$f(\cos\theta)$ désignant la somme de la série (1), sommable $(C, \delta < 1)$. Par conséquent on a définitivement

$$(24)\quad \lim_{t=0}\overline{\Omega}_t[S_1(\theta)] = (2\sin\theta)^{\lambda+1}[\alpha_0 - f(\cos\theta)] + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n r_n(\theta)}{(n+\lambda)^2}$$
$$- (\lambda^2-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n Q_n^{\lambda}(\theta)}{n(n+2\lambda)} - \frac{2(2+\lambda-\lambda^2)}{\sin\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n\cos\omega_n}{n(n+2\lambda)}.$$

Vu que

$$\lim_{t=0}\overline{\Omega}_t[(2\sin\theta)^{\lambda+1}F(\cos\theta)] = \lim_{t=0}\overline{\Omega}_t[A_0(\theta)] - \lim_{t=0}\overline{\Omega}_t[S_1(\theta)] - \lim_{t=0}\overline{\Omega}_t[S_2(\theta)],$$

on obtient, en retranchant (19) et (24) de (17),

$$\lim_{t=0}\overline{\Omega}_t[(2\sin\theta)^{\lambda+1}F(\cos\theta)]$$
$$= (2\sin\theta)^{\lambda+1}f(\cos\theta) - \frac{\lambda+1}{\sin^2\theta}[1+(1-\lambda)\cos^2\theta](2\sin\theta)^{\lambda+1}F(\cos\theta),$$

ce qui prouve le lemme II eu égard à (16).

Passons maintenant à la démonstration du lemme III qui suppose $\alpha_n = o(n^{1-\lambda})$, donc $\beta_n = o(1)$. Les calculs sont les mêmes que dans la démonstration du lemme II et l'on s'appuie sur le second lemme de Riemann relatif aux séries trigonométriques à coefficients tendant vers zéro. Vu que $\beta_n = o(1)$ on établit facilement à l'aide de (14) la relation

$$(2\sin\theta)^{\lambda+1}\lim_{t=0}\frac{\Delta_t^2 F(\cos\theta)}{t} = \lim_{t=0}\frac{\Delta^2[(2\sin\theta)^{\lambda+1}F(\cos\theta)]}{t}.$$

Ensuite grâce à la continuité de $F(\cos\theta)$, on a

$$\lim_{t=0} \frac{\Delta^2[(2\sin\theta)^{\lambda+1}F(\cos\theta)]}{t} = \lim_{t=0} \left\{ t\,\overline{\Omega}_t[(2\sin\theta)^{\lambda+1}F(\cos\theta)] \right\};$$

par conséquent pour démontrer le lemme III il suffit de prouver que l'on a

$$\lim_{t=0} \left\{ t\,\overline{\Omega}_t[(2\sin\theta)^{\lambda+1}F(\cos\theta)] \right\} = 0.$$

On a décomposé plus haut la fonction sous le signe $\overline{\Omega}_t$ en trois parties

$$(2\sin\theta)^{\lambda+1}F(\cos\theta) = A_0(\theta) + S_1(\theta) + S_2(\theta),$$

dont la première $A_0(\theta)$ possède la dérivée seconde partout à l'intérieur de $(0, \pi)$: donc il suffit d'établir que l'on ait

$$\lim_{t=0} \left\{ t\,\overline{\Omega}_t[S_1(\theta)] \right\} = \lim_{t=0} \left\{ t\,\overline{\Omega}_t[S_2(\theta)] \right\} = 0$$

pour prouver le lemme III. L'hypothèse que la série (1) est sommable $(C, \delta < 1)$ n'intervient dans la preuve du lemme II que pour $\lim\limits_{t=0}\overline{\Omega}_t[S_1(\theta)]$ et l'existence de la limite $\lim\limits_{t=0}\overline{\Omega}_t[S_2(\theta)]$ est déduite uniquement de la condition $\beta_n = o(n^\delta)$. Donc pour $\beta_n = o(1)$ cette limite existe *a fortiori* et l'on a par conséquent

$$\lim_{t=0} \left\{ t\,\overline{\Omega}_t[S_2(\theta)] \right\} = 0.$$

Avant de calculer $\lim\limits_{t=0}\{t.\overline{\Omega}_t[S_1(\theta)]\}$ nous observons que l'hypothèse $\beta_n = o(1)$ permet d'appliquer le second lemme de Riemann aux séries trigonométriques

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+\lambda}\right)^2 \beta_n \cos\omega_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+\lambda-1}\right)^2 \frac{\beta_n \sin\omega_{n-1}}{n+\lambda-1},$$

ce qui nous donne

$$(25) \qquad \lim_{t=0} \left\{ t \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos\omega_n \left[\frac{\sin\frac{n+\lambda}{2}t}{\frac{n+\lambda}{2}t} \right]^2 \right\} = 0,$$

ainsi que

$$\lim_{t\to 0}\left\{t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n \sin\omega_{n-1}}{n+\lambda-1}\left[\frac{\sin\frac{n+\lambda-1}{2}t}{\frac{n+\lambda-1}{2}t}\right]^2\right\}=0. \tag{26}$$

On a

$$t\Omega_t[S_1(\theta)] = t\sigma_1(t) - t\sigma_2(t)$$

et l'expression de $t.\sigma_1(t)$ déduite de (20) tend vers zéro avec t, vu que l'hypothèse $\beta_n = o(n^\delta)$ — et $\beta_n = o(1)$ *a fortiori* — assure la convergence absolue et uniforme aussi à la limite $t = 0$ de trois des quatre séries formant l'expression de $\sigma_1(t)$; quant à la première, on a pour elle le résultat (25), si $\beta_n = o(1)$. Donc

$$\lim_{t=0}[t\sigma_1(t)] = 0.$$

De même pour $t\sigma_2(t)$: de trois séries formant l'expression de $\sigma_2(t)$, on a pour la première le résultat (26) et les deux autres convergent absolument et uniformément aussi pour $t = 0$. Donc

$$\lim_{t=0}[t\sigma_2(t)] = 0$$

et la preuve du lemme III est achevée.

Il nous reste à démontrer le lemme IV. Le coefficient ultrasphérique de Fourier de la fonction $f(x)$ — $a_n^{(\lambda)}$ — s'exprime ainsi :

$$\frac{a_n^{\lambda}}{n+\lambda} = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\frac{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2\lambda)}\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\, P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)\sin^{2\lambda}\theta\, d\theta,$$

et l'on a à démontrer

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{A_n^{(2\lambda-1)}}\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\, P_n^{\lambda}(\cos\theta)\sin^{2\lambda}\theta\, d\theta = 0.$$

La fonction $f(\cos\theta)$ est supposée être bornée à l'intérieur de $(0, \pi)$ et le produit $f(\cos\theta).\sin^{2\lambda}\theta$ absolument intégrable dans cet intervalle. Par conséquent étant donnée une quantité ε positive et fixe mais arbitrairement petite, on peut choisir un η assez petit pour avoir

$$\int_0^{\eta}|f(\cos\theta)|\sin^{2\lambda}\theta\, d\theta < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{et} \qquad \int_{\pi-\eta}^{\pi}|f(\cos\theta)|\sin^{2\lambda}\theta\, d\theta < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On a pour $0 \leqq \theta \leqq \pi$

$$|P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)| < A_n^{(2\lambda-1)},$$

et dans l'expression

$$\frac{1}{A_n^{(2\lambda-1)}}\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\, P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)\sin^{2\lambda}\theta\, d\theta = \frac{1}{A_n^{(2\lambda-1)}}\left\{\int_0^{\eta} + \int_{\eta}^{\pi-\eta} + \int_{\pi-\eta}^{\pi}\right\}$$
$$= i_1 \qquad + i_2 \qquad + i_3;$$

$$|i_1| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{ainsi que} \qquad |i_3| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dans l'intervalle $(\eta, \pi - \eta)$ la fonction $f(\cos\theta)$ est bornée. Soit M la borne supérieure de sa valeur absolue $|f(\cos\theta)|$ pour $\eta \leqq \theta \leqq \pi - \eta$. L'inégalité de Schwarz nous donne

$$|i_2| \leqq \frac{1}{A_n^{(2\lambda-1)}}\int_{\eta}^{\pi-\eta} |f(\cos\theta)|\sin^{\lambda}\theta\, |P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)|\sin^{\lambda}\theta\, d\theta$$
$$\leqq \frac{1}{A_n^{(2\lambda-1)}}\left\{\int_{\eta}^{\pi-\eta} |f(\cos\theta)|^2\sin^{2\lambda}\theta\, d\theta \times \int_{\eta}^{\pi-\eta} [P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)]^2\sin^{2\lambda}\theta\, d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqq \frac{M\sqrt{\pi}}{A_n^{(2\lambda-1)}}\left\{\int_{\eta}^{\pi-\eta}(n+1)^{2\lambda-2}[H_n^{(\lambda)}(\theta)]^2\, d\theta\right\}^{\frac{1}{2}} \leqq \frac{M\pi(n+1)^{\lambda-1}C_1}{A_n^{(2\lambda-1)}},$$

vu que d'après le paragraphe **1** $\sin^{\lambda}\theta . P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = (n+1)^{\lambda-1} . H_n^{(\lambda)}(\theta)$, où la fonction $H_n^{(\lambda)}(\theta)$ est bornée dans $(\eta, \pi - \eta)$ quelque petit que soit η fixe. Donc définitivement

$$|i_2| < \frac{K(\eta)}{(n+1)^{\lambda}} < \frac{\varepsilon}{3} \qquad [n > N(\eta)]$$

pour n suffisamment grand et le lemme IV est démontré.

Les lemmes démontrés suffisent pour notre but qui est l'étude de l'unicité des séries ultrasphériques convergentes ou sommables $(C, \delta < 1)$, mais si l'on voulait étendre l'étude de l'unicité sur les séries ultrasphériques sommables $(C, \delta \geqq 1)$, on pourrait se servir de la même méthode que celle employée dans ce Mémoire en s'appuyant sur les séries auxiliaires obtenues en partant de la série (11) par le même procédé que celui par lequel on l'a déduite de la série (1). On aurait ainsi à s'appuyer sur le corollaire de notre lemme du paragraphe **2** qui dit que la somme $f(x)$ d'une série trigonométrique sommable (C, δ) est la $p^{\text{ième}}$ dérivée généralisée de l'intégrale p-uple de la série trigonométrique si $p = E(p) > \delta + 1$, p étant pair — $p = 2p_1$. La même opération $\Omega_t^{(\lambda)}$ interviendrait mais répétée p_1 fois de suite, si δ est compris entre $2p_1 - 1$ et $2p_1 + 1$.

Supposons par exemple la série (1) sommable (C, δ), où δ est compris entre 1 et 3 : $1 \leqq \delta < 3$. On s'appuie alors sur les lemmes suivants, dont la démonstration suit les mêmes lignes que celles des lemmes I et II, la formule approximative (8) étant remplacée par la formule plus précise (7) avec $N = 4$:

Lemme II *bis*. — *Si la série* (1) *est sommable* (C, $\delta < 3$) *en un point intérieur* $\theta = \theta_0$ ($0 < \theta_0 < \pi$) *avec la somme* $f(\cos\theta_0)$ on a

$$\lim_{t \to 0} G_t^{(\lambda)}[\psi(\cos\theta_0)] = f(\cos\theta_0),$$

où

$$\psi(\cos\theta) = \alpha_0 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\psi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{v} \left(\frac{\sin u \sin\psi}{\sin v \sin\varphi}\right)^{2\lambda} du\, dv\, d\psi\, d\varphi + \sum^{\infty} \frac{\alpha_n P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)}{n^2(n+2\lambda)^2}$$

et

$$G_t^{(\lambda)}[\mathfrak{F}(\theta)] \equiv \Omega_t^{(\lambda)}\{\Omega_t^{(\lambda)}[\mathfrak{F}(\theta)]\}.$$

Lemme I *bis*. — *Si une fonction $f(\theta)$ dont la dérivée seconde $f''(\theta)$ est continue dans un intervalle* (α, β) *intérieur à l'intervalle* $(0, \pi)$, *satisfait partout dans* (α, β) *à la condition*

$$\lim_{t \to 0} G_t^{(\lambda)}[f(\theta)] = 0 \qquad (\alpha \leqq \theta \leqq \beta),$$

elle s'y réduit à

$$f(\theta) = A \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\psi} \left(\frac{\sin\psi}{\sin v \sin\varphi}\right)^{2\lambda} dv\, d\psi\, d\varphi + B \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \left(\frac{\sin\psi}{\sin\varphi}\right)^{2\lambda} d\psi\, d\varphi$$
$$+ C \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{d\varphi}{\sin^{2\lambda}\varphi} + D,$$

où A, B, C *et* D *sont des constantes.*

Le dernier lemme I *bis* généralise le lemme de M. M. Riesz [1] qui est du reste le cas particulier de I *bis* pour $\lambda = 0$.

A la fin de ce paragraphe nous démontrerons une formule générale qui est le corollaire des lemmes I-III et qui est fondamentale pour l'étude de l'unicité des séries ultrasphériques.

---

[1] *Math. Annalen*, Band 71, 1911, p. 65.

Envisageons d'abord le cas de la sommabilité $(C, \delta < 1)$ de la série (1) avec la somme $f(\cos\theta)$ partout dans l'intervalle (α, β), intérieur à l'ntervalle $(0, \pi)$. Appliquons à la série (1) le lemme II qui donne

$$\lim_{t=0} \Omega_t^{\lambda}[F(\cos\theta)] = f(\cos\theta) \qquad (\alpha \leqq \theta \leqq \beta).$$

Or

$$(13) \qquad \lim_{t=0} \Omega_t^{\lambda}\left\{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} f(\cos\psi)\left(\frac{\sin\psi}{\sin\varphi}\right)^{2\lambda} d\psi\, d\varphi\right\} = f(\cos\theta)$$

aussi et par conséquent l'hypothèse de la sommabilité $(C, \delta < 1)$ de la série (1) avec la somme $f(\cos\theta)$ partout dans (α, β) entraîne

$$\lim_{t=0} \Omega_t^{\lambda}\left\{F(\cos\theta) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} f(\cos\psi)\left(\frac{\sin\psi}{\sin\varphi}\right)^{2\lambda} d\psi\, d\varphi\right\} = 0.$$

En appliquant maintenant le lemme I nous en concluons

$$F(\cos\theta) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} f(\cos\psi)\left(\frac{\sin\psi}{\sin\varphi}\right)^{2\lambda} d\psi\, d\varphi + A\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{d\varphi}{\sin^{2\lambda}\varphi} + B,$$

où A et B sont constantes dans (α, β). Si la série (1) est sommable $(C, \delta < 1)$ *partout* à l'intérieur de l'intervalle $(0, \pi)$ les deux nombres A et B sont constants pour $0 < \theta < \pi$.

Supposons maintenant que la série (1) *converge* dans $(0, \pi)$ sauf les points frontières $\theta = 0, \pi$ et un ensemble réductible E_0 des points intérieurs ξ. Dans chacun des intervalles partiels séparant deux points de l'ensemble E_0 qui lui servent de points frontières la fonction $F(\cos\theta)$ est de la même forme :

$$(27) \quad F(\cos\theta) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} f(\cos\psi)\left(\frac{\sin\psi}{\sin\varphi}\right)^{2\lambda} d\psi\, d\varphi + A\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{d\varphi}{\sin^{2\lambda}\varphi} + B,$$

mais les constantes A et B peuvent être différentes de deux côtés du point ξ. Or on démontre qu'il n'en est rien et que dans l'hypothèse de la *convergence* de la série (1) A et B sont constants dans tout l'intervalle $(0, \pi)$ malgré la présence de l'ensemble des points ξ. En effet la condition nécessaire de la convergence de la série (1) en un point intérieur $\theta = \theta_0$

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n P_n^{(\lambda)}(\cos\theta_0) = 0$$

entraîne $\alpha_n = o(n^{1-\lambda})$, vu que $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta_0) = O[A_n^{(\lambda-1)}]$. Donc le lemme III est applicable et la fonction continue $F(\cos\theta)$ satisfait au point ξ à la condition

$$\lim_{t=0} \frac{\Delta^2[F(\cos\xi)]}{t} = 0.$$

Appliquons cette conclusion à la forme (27) de $F(\cos\xi)$ en supposant que les constantes A et B sont différentes pour $\theta \leqq \xi$ et $\theta \geqq \xi$. Soient A' et B' ces constantes pour $\theta \geqq \xi$ et A'' et B'' pour $\theta \leqq \xi$. Un calcul facile donne

$$\lim_{t=0} \frac{\Delta^2 F(\cos\xi)}{t} = \frac{A'' - A'}{(\sin\xi)^{2\lambda}},$$

donc $A'' = A'$. Maintenant les deux expressions de $F(\cos\xi)$ donnent, vu que $F(\cos\theta)$ est continue au point $\theta = \xi$, aussi $B' = B''$. Ainsi l'ensemble E_0 ne change rien et la formule (27) reste valable avec les mêmes constantes A et B dans tout intervalle $(0, \pi)$. En posant $x = \cos\theta$, $v = \cos\varphi$ et $u = \cos\psi$, nous l'écrivons ainsi :

$$(28) \qquad F(x) = \int_0^x \int_0^v \frac{f(u)\, du\, dv}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}(1-v^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}} + A\int_0^x \frac{du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} + B.$$

4. — Séries trigonométriques sommables $(C, \delta < 1)$.

Supposons que la série trigonométrique

$$(29) \qquad \alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \ldots + \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx + \ldots$$

soit sommable $(C, \delta < 1)$ avec la somme $f(x)$ partout dans $(0, 2\pi)$, sauf un seul point ξ, où elle *oscille* sans être sommable $(C, \delta < 1)$ ou bien n'a pas pour somme $f(\xi)$, en étant sommable $(C, \delta < 1)$, ou enfin diverge essentiellement, mais avec $s_n(\xi) = o(n)$. Notre lemme du paragraphe **2** permet de conclure

$$\lim_{t=0} \frac{\Delta^2 F(x)}{t^2} = f(x)$$

partout dans $(0, 2\pi)$, sauf le point $x = \xi$, $F(x)$ étant la somme de la série

$$F(x) = \frac{\alpha_0 x^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx}{n^2}$$

qui converge absolument et uniformément dans $(0, 2\pi)$, vu que $\alpha_n = o(n^\delta)$, ainsi que $\beta_n = o(n^\delta)$ avec $\delta < 1$. Donc on a

$$F(x) = \int_0^x \int_0^t f(u)\,du\,dt + \begin{cases} A'x + B' & \text{pour } 0 \leq x \leq \xi, \\ A''x + B'' & \text{pour } \xi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Voyons quelles conclusions nous pouvons en tirer pour l'unicité des séries trigonométriques sommables $(C, \delta < 1)$. Nous avons

$$-\frac{\alpha_n}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[F(x) - \alpha_0 \frac{x^2}{2} \right] \cos nx\,dx,$$

ainsi que

$$-\frac{\beta_n}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[F(x) - \alpha_0 \frac{x^2}{2} \right] \sin nx\,dx;$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
\pi(\alpha_n + i\beta_n) &= \int_0^{2\pi} \left[F(x) - \alpha_0 \frac{x^2}{2} \right] (in)^2 e^{inx}\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} \left[F(x) - \alpha_0 \frac{x^2}{2} \right] \frac{d^2 e^{inx}}{dx^2}\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} d\left(\frac{de^{inx}}{dx}\right) \int_0^x \int_0^t [f(u) - \alpha_0]\,du\,dt \\
&\quad + \int_0^{\xi} (A'x + B')\, d\left(\frac{de^{inx}}{dx}\right) + \int_{\xi}^{2\pi} (A''x + B'')\, d\left(\frac{de^{inx}}{dx}\right)
\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
\pi(\alpha_n + i\beta_n) &= \left| in\, e^{inx} \int_0^x \int_0^t [f(u) - \alpha_0]\,du\,dt \right|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} d(e^{inx}) \int_0^x [f(u) - \alpha_0]\,du \\
&\quad + \left| in\, e^{inx}(A'x + B') \right|_0^{\xi} - A' \int_0^{\xi} d(e^{inx}) \\
&\quad + \left| in\, e^{inx}(A''x + B'') \right|_{\xi}^{2\pi} - A'' \int_{\xi}^{2\pi} d(e^{inx}) \\
&= in\, e^{in\xi}(A'\xi + B') - in B' - A'(e^{in\xi} - 1) \\
&\quad + in(2\pi A'' + B'') - in\, e^{in\xi}(A''\xi + B'') - A''(1 - e^{in\xi}) \\
&\quad + in \int_0^{2\pi} \int_0^t [f(u) - \alpha_0]\,du\,dt - \int_0^{2\pi} [f(u) - \alpha_0]\,du + \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{inx}\,dx.
\end{aligned}$$

Or, vu que $F(x)$ est continue pour $x=\xi$, on a

$$A'\xi+B'=A''\xi+B'',$$

et d'autre part, la fonction $F(x)-\alpha_0\frac{x^2}{2}$ étant la somme d'une série convergente absolument et uniformément dans $(0, 2\pi)$ extrémités comprises, on doit avoir

$$B'=F(0)=F(2\pi)-2\alpha_0\pi^2=\int_0^{2\pi}\int_0^t[f(u)-\alpha_0]\,du\,dt+2\pi A''+B''.$$

En vertu de ces deux relations le terme en iu dans l'expression de $\pi(\alpha_n+i\beta_n)$ disparaît de lui-même et l'on aboutit à la formule suivante :

$$\pi(\alpha_n+i\beta_n)=2\pi\alpha_0-\int_0^{2\pi}f(u)\,du+A'-A''+(A''-A')e^{in\xi}+\int_0^{2\pi}f(x)e^{inx}\,dx$$

qui donne

$$(30)\quad\left\{\begin{aligned}\pi\alpha_n&=2\pi\left[\alpha_0-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(u)\,du\right]+A'-A''+(A''-A')\cos n\xi+\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx,\\ \pi\beta_n&=(A''-A')\sin n\xi+\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx.\end{aligned}\right.$$

Supposons que la série (29) est sommable $(C, \delta<1)$ avec la somme $f(x)=0$, alors la condition que pour $x=\xi$ elle ne doit diverger essentiellement qu'avec $s_n(\xi)=o(n)$ n'est pas satisfaite, si $A'\neq A''$. Donc, si la série (29) pour $x=\xi$ oscille ou diverge essentiellement avec $s_n(\xi)=o(n)$, on a nécessairement $A'=A''$ et $B'=B''$ aussi, vu que $A'\xi+B'=A''\xi+B''$. En outre $\alpha_0=0$ puisque autrement on aurait eu $\alpha_n=2\alpha_0$ et la série $2\alpha_0\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx\right\}$ ne serait pas sommable $(C, \delta<1)$ avec la somme zéro pour $x=0$ ou bien $x=2\pi$. Par conséquent l'existence d'un point exceptionnel ξ ne détruit pas l'unicité sous les conditions formulées plus haut et le théorème suivant est démontré :

Si la série trigonométrique (29) *est sommable* $(C, \delta<1)$ *avec la somme zéro partout dans* $(0, 2\pi)$ *sauf un ensemble réductible de* *points* ξ, *où elle oscille sans être sommable* (C, $\delta < 1$) *ou bien n'a pas pour somme zéro, ou enfin diverge essentiellement avec* $s_n(\xi) = o(n)$, *tous ses coefficients sont identiquement nuls.*

Si $f(x) \not\equiv 0$ les formules (30) démontrent que la différence de la série (29) et de la série Fourier de sa somme $f(x)$ — la série (29) étant sommable (C, $\delta < 1$) — se réduit nécessairement aux séries du type

$$(A_i'' - A_i')\sum_{n=1}^{\infty} \cos n(x - \xi_i) \qquad (0 < \xi_i < 2\pi)$$

et à la série

$$\left\{2\pi\left[\alpha_0 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\,du\right] + \sum_i (A_i'' - A_i')\right\}\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx,$$

qui divergent essentiellement avec $\lim\limits_{n=\infty}\frac{s_n}{n} > 0$ aux points $x = \xi_i$ et $x = 0,\ 2\pi$ respectivement.

Supposons maintenant $f(x)$ absolument intégrable dans $(0, 2\pi)$. Il est facile de démontrer que la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de sa série de Fourier — $s_n^{(f)}(x)$ — est au plus de l'ordre de $o(n)$

$$S_n^{(f)}(x) = o(n),$$

quel que soit le point x. En effet

$$S_n^{(f)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-u)}{\sin\frac{x-u}{2}}\,du = \frac{1}{\pi}\int_0^{x-2\varepsilon} + \frac{1}{\pi}\int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} + \frac{1}{\pi}\int_{x+2\varepsilon}^{2\pi}$$
$$= i_1 + i_2 + i_3.$$

On a

$$|i_1| = O\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{x-2\varepsilon} |f(u)|\,du\right] = O(1),$$

ainsi que

$$|i_3| = O(1),$$

tandis que

$$|i_2| = O\left\{(n+1)\int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} |f(u)|\,du\right\} = o(n),$$

d'où le résultat cherché.

D'après l'hypothèse, la somme partielle $\sigma_n(\xi_i)$ de la série (29) en un point $x = \xi_i$ de l'ensemble E_δ est aussi au plus de l'ordre de $o(n)$, tandis que les $n^{\text{ièmes}}$ sommes partielles des séries du type

$$(A''_k - A'_k)\sum_{n=1}^{\infty} \cos n(x - \xi_k) \qquad (k \neq i)$$

ainsi que celle de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n x$$

sont toutes finies pour $x = \xi_i$, si $k \neq i$. Au contraire celle de la série

$$(A''_i - A'_i)\sum_{n=1}^{\infty} \cos n(x - \xi_i)$$

est égale à $n(A''_i - A'_i)$ pour $x = \xi_i$ et l'on aboutit à l'égalité suivante:

$$\sigma_n(\xi_i) = s_n^{(f)}(\xi_i) + n(A''_i - A'_i) + O(1).$$

Vu que $\sigma_n(\xi_i) = o(n)$ et $s_n^{(f)}(\xi_i) = o(n)$, on en déduit que l'on a nécessairement $A''_i = A'_i$; et cela a lieu pour chaque point ξ_i de l'ensemble E_δ.

Par conséquent malgré la présence de l'ensemble E_δ la fonction $F(x)$ s'exprime par la formule

$$F(x) = \int_0^x \int_0^t f(u)\,du\,dt + Ax + B,$$

où A et B sont constants dans $(0, 2\pi)$ et les coefficients α_n et β_n s'expriment ainsi :

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\cos nu\,du + 2\left[\alpha_0 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\,du\right],$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\sin u\,du.$$

Envisageons enfin la série (29) pour $x = 0$. On a dans ce cas

$$\sigma_n(0) = s_n^{(f)}(0) + (2n+1)\left[\alpha_0 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\,du\right].$$

Vu que $\sigma_n(0) = o(n)$ ainsi que $s_n^{(f)}(0) = o(n)$, on en déduit que la constante que multiplie $2n+1$ est nulle et

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\,du,$$

ce qui achève la preuve du théorème suivant :

Si la série trigonométrique (29) *est sommable* (C, $\delta < 1$) *avec la somme $f(x)$ partout dans* $(0, 2\pi)$ *sauf un ensemble réductible* E_δ *des points* ξ, *où elle n'a pas pour somme* $f(\xi)$ *ou bien oscille sans être sommable* (C, δ) *ou enfin diverge essentiellement mais avec* $\lim\limits_{n=\infty} \frac{s_n(\xi)}{n} = 0$, *elle est la série trigonométrique de Fourier de sa somme $f(x)$ pourvu que la fonction $f(x)$ soit absolument intégrable dans* $(0, 2\pi)$.

L'existence des séries divergentes bien connues

$$0 \sim \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx + \ldots \qquad (x \neq 0, 2\pi)$$

et

$$0 \sim \frac{1}{2} + \cos(x-\xi) + \cos 2(x-\xi) + \ldots + \cos n(x-\xi) + \ldots \qquad (x \neq \xi)$$

explique la nécessité de l'hypothèse que la série (29) *oscille* aux points $x = \xi_i$ ou bien que, si elle diverge essentiellement, $\lim\limits_{n=\infty} \frac{s_n(\xi)}{n} = 0$ dans les énoncés de deux théorèmes démontrés.

5. — Séries ultrasphériques convergentes.

Dans ce paragraphe nous démontrons les deux théorèmes I et II qui établissent l'unicité des développements ultrasphériques convergents partout à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$ sauf un ensemble réductible des points intérieurs ξ.

Soit donc

$$(1) \qquad \alpha_0 + \alpha_1 P_1^{(\lambda)}(x) + \alpha_2 P_2^{(\lambda)}(x) + \ldots + \alpha_n P_n^{(\lambda)}(x) + \ldots$$

une série ultrasphérique convergente pour $-1 < x < +1$ sauf les points d'un ensemble réductible E_0. Supposons que sa somme $f(x)$

est identiquement nulle : $f(x) \equiv 0$. Formons la série auxiliaire

$$(11)\qquad F(x) = \alpha_0 \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}} \int_0^t \frac{du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n P_n^{(\lambda)}(x)}{n(n+2\lambda)},$$

qui converge uniformément dans l'intervalle $(\varepsilon - 1,\ 1-\varepsilon)$. D'après la formule (28) du paragraphe **3** on a pour $-1 < x < 1$

$$F(x) = A \int_0^x \frac{du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}} + B$$

et

$$\frac{dF}{dx} = \frac{A}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}}.$$

Grâce à la convergence de la série (1) on a $\alpha_n = o(n^{1-\lambda})$ et d'autre part on sait que pour $-1 \leqq x \leqq 1$ on a

$$(1-x^2)^{\frac{\lambda}{2}} P_n^{(\lambda)}(x) = O(1);$$

donc la série

$$(31)\qquad (1-x^2)^{\frac{\lambda}{2}} \left\{ F(x) - \alpha_0 \int_0^x \int_0^t \frac{du\, dt}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}(1-t^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}} \right\}$$
$$= -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m (1-x^2)^{\frac{\lambda}{2}} P_m^{(\lambda)}(x)}{m(m+2\lambda)}$$

converge uniformément pour $-1 \leqq x \leqq 1$. En la multipliant par

$$(1-x^2)^{\frac{\lambda-1}{2}} P_n^{(\lambda)}(x)\, dx$$

et en intégrant de -1 à $+1$, on trouve le résultat suivant :

$$(32)\qquad -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}{\Gamma(\lambda)} \frac{\alpha_n A_n^{2\lambda-1}}{n(n+2\lambda)(n+\lambda)} = \int_{-1}^{+1} \frac{\psi(x) P_n^{(\lambda)}(x)\, dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}},$$

où nous avons posé

$$F(x) - \alpha_0 \int_0^x \int_0^t \frac{du\, dt}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}(1-t^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}} = \psi(x).$$

L'équation différentielle du polynome ultrasphérique $P_n^{(\lambda)}(x)$ s'écrit :

$$-n(n+2\lambda)(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}P_n^{(\lambda)}(x)=\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}\frac{dP_n^{(\lambda)}}{dx}\right\}.$$

Elle permet de simplifier la formule (32) et de la mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}{\Gamma(\lambda)}\frac{\alpha_n}{n+\lambda}A_n^{(2\lambda-1)},\\
&=\int_{-1}^{+1}\psi(x)\,d\left\{(1-x^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}\frac{dP_n^{(\lambda)}}{dx}\right\}\\
&=\left|\psi(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}\frac{dP_n^{(\lambda)}}{dx}\right|_{-1}^{+1}-\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}\frac{d\psi}{dx}\,dP_n^{(\lambda)}.
\end{aligned}$$

La partie intégrée est nulle puisque la fonction

$$(1-x^2)^{\frac{\lambda}{2}}\psi(x)$$

est finie pour $x=\pm 1$, étant la somme de la série (31) qui converge uniformément dans $(-1, +1)$. Ensuite

$$\begin{aligned}
(1-x^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}\frac{d\psi}{dx}&=(1-x^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}\frac{dF}{dx}-\alpha_0\int_0^x\frac{du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}\\
&=A-\alpha_0\int_0^x\frac{du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}
\end{aligned}$$

et l'on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}{\Gamma(\lambda)}\frac{\alpha_n}{n+\lambda}A_n^{(2\lambda-1)}\\
&=\int_{-1}^{+1}\left[\alpha_0\int_0^x\frac{du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}-A\right]dP_n^{(\lambda)}(x)\\
&=\left|P_n^{(\lambda)}(x)\left\{\alpha_0\int_0^x\frac{du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}-A\right\}\right|_{-1}^{+1}-\alpha_0\int_{-1}^{+1}\frac{P_n^{(\lambda)}(x)\,dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}.
\end{aligned}$$

La partie non intégrée est nulle, vu que $n\geqq 1$, et l'on a, eu égard à

$$P_n^{(\lambda)}(1)=(-1)^n P_n^{(\lambda)}(-1)=A_n^{(2\lambda-1)}$$

et à

$$\int_{-1}^{0}\frac{du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}=\int_{0}^{1}\frac{du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}{\Gamma(\lambda)},$$

le résultat définitif suivant :

$$\alpha_n=(n+\lambda)\left\{\alpha_0\frac{1+(-1)^n}{2\lambda}-A\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}[1-(-1)^n]\right\}\qquad(n\geqq 1).$$

Or on doit avoir $\alpha_n=o(n^{1-\lambda})$, ce qui exige que le coefficient de $n+\lambda$ dans le second membre s'annule quelle que soit la parité de n. Donc il est nécessaire que l'on ait

$$A=\alpha_0=0,$$

ce qui entraîne

$$\alpha_n=0\qquad(n=1,2,3,\ldots,\infty).$$

Ainsi la preuve du théorème I est achevée :

Théorème I. — *Si la série* (1) *converge avec zéro pour somme partout dans* $(-1,+1)$ *sauf peut-être un ensemble réductible* E_0 *aux points duquel elle diverge ou converge avec une somme différente de zéro, tous ses coefficients sont identiquement nuls.*

Supposons maintenant la somme $f(x)$ de la série (1) différente de zéro. D'après la formule (28) on a, pour $-1<x<+1$,

$$F(x)=\int_0^x\int_0^t\frac{f(u)\,du\,dt}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}(1-t^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}}+A\int_0^x\frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}}+B.$$

Tout le raisonnement précédent est applicable, la fonction $\psi(x)$ désignant cette fois l'expression

$$\psi(x)=\int_0^x\int_0^t\frac{[f(u)-\alpha_0]\,du\,dt}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}(1-t^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}}+A\int_0^x\frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}}+B;$$

donc

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}\frac{d\psi}{dx}=\int_0^x\frac{f(u)-\alpha_0}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}du+A.$$

Nous omettons les détails de calcul qui sont les mêmes que pour le théorème I et nous écrivons le résultat

$$\alpha_n = a_n + (n+\lambda)\left\{\alpha_0 \frac{1+(-1)^n}{2\lambda} - \frac{A\,\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}[1-(-1)^n] - \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\int_0^1 \frac{f(u)+(-1)^n f(-u)}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}du\right\}$$

où a_n désigne le coefficient ultrasphérique de Fourier de la fonction $f(x)$,

$$a_n = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\,\frac{n+\lambda}{A_n^{(2\lambda-1)}}\int_{-1}^{+1}\frac{f(x)\,P_n^{(\lambda)}(x)\,dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}.$$

D'après le lemme IV du paragraphe 5 on a $a_n = o(n)$, pourvu que la fonction $f(x)$ satisfasse à certaines conditions précisées dans l'énoncé.

Vu la convergence de la série (1) on doit avoir $\alpha_n = o(n^{1-\lambda})$, donc

$$\lim_{n=\infty}\frac{\alpha_n}{n+\lambda} = 0$$

a fortiori. Mais ceci exige que le coefficient de $n+\lambda$ dans le second membre de (33) soit nul quelle que soit la parité de n, ce qui entraîne d'abord pour $n \geq 1$

$$\alpha_n = a_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$$

et ensuite les deux équations

$$\frac{\alpha_0}{\lambda} = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\int_0^1\frac{f(u)+f(-u)}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}du$$

et

$$\frac{2A\,\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} + \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\int_0^1\frac{f(u)-f(-u)}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}du = 0.$$

La seconde détermine la valeur de la constante A et la première achève la preuve du théorème II en montrant que

$$\alpha_0 = \frac{\lambda\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\int_{-1}^{+1}\frac{f(u)\,du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}\,du = a_0.$$

Ainsi le théorème suivant est démontré :

Théorème II. — *Si la série* (1) *converge vers* $f(x)$ *partout dans* $(-1, +1)$ *sauf peut-être les points* ξ *d'un ensemble réductible, où elle diverge ou converge mais n'a pas pour somme* $f(\xi)$, *elle est la série ultrasphérique de Fourier de sa somme* $f(x)$, *pourvu que la dernière soit bornée à l'intérieur de l'intervalle* $(-1, +1)$ *et que le produit* $(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}|f(x)|$ *soit intégrable dans cet intervalle* $(-1, +1)$.

Le cas particulier $\lambda = \frac{1}{2}$ du théorème constitue un nouveau résultat dans la théorie des séries de Legendre : on a mentionné dans l'Introduction que le dernier résultat connu jusqu'ici dans cet ordre d'idées était l'unicité des séries convergentes de Legendre dont la somme $f(x)$ *est bornée dans tout l'intervalle* $(-1, +1)$. On voit qu'il suffit de supposer la somme $f(x)$ bornée *à l'intérieur* de l'intervalle $(-1, +1)$ et absolument intégrable de -1 à $+1$ pour assurer l'unicité.

6. — Séries de Legendre sommables $(C, \delta < 1)$.

Soit la série

(34) $$\alpha_0 + \alpha_1 P_1(x) + \alpha_2 P_2(x) + \ldots + \alpha_n P_n(x) + \ldots$$

sommable $\left(C, \delta \leq \frac{1}{2}\right)$, ce qui entraîne $\alpha_n = o\left(n^{\delta+\frac{1}{2}}\right)$, partout dans $(-1, +1)$, sauf le point $x = \xi$ et peut-être les deux points frontières $x = \pm 1$. Nous n'envisageons pas la sommabilité en ces points $x = \pm 1$ comme admise par hypothèse, puisque alors on aurait eu $\alpha_n = o(n^\delta)$ seulement. Soit aussi $f(x)$ sa somme.

D'après nos lemmes du paragraphe **5** la fonction $F(x)$, définie par la série (11) avec $\lambda = \frac{1}{2}$,

$$(11)\quad F(x) = \frac{\alpha_0}{2}\operatorname{Log}\frac{1}{1-x^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n P_n(x)}{n(n+1)} = \alpha_0\int_0^x\int_0^t \frac{du\,dt}{1-t^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n P_n(x)}{n(n+1)},$$

s'exprime ainsi

$$(35)\quad F(x) = \int_0^x\int_0^t \frac{f(u)\,du\,dt}{1-t^2} + \begin{cases} A'\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t^2} + B' & (-1 < x \leqq \xi), \\ A''\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t^2} + B'' & (\xi \leqq x < 1). \end{cases}$$

La fonction

$$(1-x^2)^{\frac{1}{4}}\psi(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{4}}\left\{F(x) - \frac{\alpha_0}{2}\operatorname{Log}\frac{1}{1-x^2}\right\}$$

est la somme de la série (11), convergente absolument et uniformément dans tout l'intervalle $(-1, +1)$.

En effet on a $\delta < 1$,

$$(1-x^2)^{\frac{1}{4}} P_n(x) = O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right) \quad \text{pour } -1 \leqq x \leqq 1 \quad \text{et } \alpha_n = o\left(n^{\delta+\frac{1}{2}}\right);$$

donc le terme général de cette série est de la forme $o(n^{\delta-2})$.

En multipliant la série (11) par $(1-x^2)^{-\frac{1}{4}} P_n(x)\,dx$ et en l'intégrant de -1 à $+1$, nous obtenons

$$\frac{\alpha_n}{n+\frac{1}{2}} = -n(n+1)\int_{-1}^{+1}\psi(x)P_n(x)\,dx \qquad (n \geqq 1).$$

Or

$$-n(n+1)P_n(x) = \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right]$$

ainsi que

$$\psi(x) = F(x) - \int_0^x\int_0^t \frac{\alpha_0\,du\,dt}{1-t^2}$$

$$= \int_0^x\int_0^t \frac{[f(u)-\alpha_0]\,du\,dt}{1-t^2} + \begin{cases} A'\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t^2} + B' & (-1 < x \leqq \xi), \\ A''\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t^2} + B'' & (\xi \leqq x < 1) \end{cases}$$

et l'expression du coefficient α_n devient :

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha_n}{n+\frac{1}{2}} = {} & \int_{-1}^{+1} d\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right]\int_0^x\int_0^t \frac{[f(u)-\alpha_0]\,du\,dt}{1-t^2} \\
& + \int_{-1}^{\xi}\left\{A'\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}+B'\right\} d\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right] + \int_{\xi}^{1}\left\{A''\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}+B''\right\} d\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right] \\
= {} & \left|(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\int_0^x\int_0^t \frac{[f(u)-\alpha_0]\,du\,dt}{1-t^2}\right|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} dP_n(x)\int_0^x [f(u)-\alpha_0]\,du \\
& + \left|(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\left\{A'\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}+B'\right\}\right|_{-1}^{\xi} - A'\int_{-1}^{\xi} dP_n(x) \\
& + \left|(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\left\{A''\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}+B''\right\}\right|_{\xi}^{1} - A''\int_{\xi}^{1} dP_n(x) \\
= {} & -\left|P_n(x)\int_0^x [f(u)-\alpha_0]\,du\right|_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1}[f(x)-\alpha_0]\,P_n(x)\,dx \\
& + (1-\xi^2)\,P'_n(\xi)\left\{A'\int_0^{\xi}\frac{dt}{1-t^2}+B'\right\} - A'[P_n(\xi)-(-1)^n] \\
& - (1-\xi^2)\,P'_n(\xi)\left\{A''\int_0^{\xi}\frac{dt}{1-t^2}+B''\right\} - A''[1-P_n(\xi)].
\end{aligned}
$$

Le terme en $(1-\xi^2).P'_n(\xi)$ disparait puisque, la fonction $F(x)$ étant continue pour $x=\xi$, on a

$$A'\int_0^{\xi}\frac{dt}{1-t^2}+B' = A''\int_0^{\xi}\frac{dt}{1-t^2}+B''$$

et l'on obtient ainsi l'expression

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha_n}{n+\frac{1}{2}} = {} & \int_{-1}^{+1} f(x)\,P_n(x)\,dx + (A''-A')\,P_n(\xi) + (-1)^n A' - A'' \\
& + \alpha_0[1+(-1)^n] - \int_0^1 f(u)\,du - (-1)^n\int_{-1}^{0} f(u)\,du.
\end{aligned}
$$

Supposons $f(x)$ bornée à l'intérieur de $(-1, +1)$ et absolument intégrable dans cet intervalle. Alors on a d'après le lemme IV

$$\lim_{n=\infty}\int_{-1}^{+1} f(x)\,P_n(x)\,dx = 0,$$

et la condition nécessaire de la sommabilité $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ de la série (34)

$$\alpha_n = o(n)$$

exige que l'on ait, quelle que soit la parité de n,

$$(-1)^n A' - A'' + \alpha_0[1 + (-1)^n] = \int_0^1 f(u)\,du + (-1)^n \int_{-1}^0 f(u)\,du.$$

c'est-à-dire

$$A' - A'' + 2\alpha_0 = \int_{-1}^{+1} f(u)\,du$$

et

$$A' + A'' = -\int_0^1 f(u)\,du + \int_{-1}^0 f(u)\,du.$$

Ainsi l'expression du coefficient α_n se réduit à

$$\alpha_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{+1} f(x)\,P_n(x)\,dx + (A'' - A')\left(n + \frac{1}{2}\right)P_n(\xi).$$

On voit que la série (34) ne diffère de la série de Fourier de $f(x)$ que par la série

$$(3) \qquad (A'' - A')\sum_{n=0}^{\infty}\left(n + \frac{1}{2}\right)P_n(\xi)\,P_n(x),$$

qui diverge essentiellement au point $x = \xi$.

Par conséquent la somme partielle $\sigma_n(x)$ de la série (34) est égale à la somme partielle $s_n^{(f)}(x)$ de la série de Fourier de $f(x)$

$$f(x) \sim \sum_{h=0}^{\infty}\left(n + \frac{1}{2}\right)P_n(x)\int_{-1}^{+1} f(u)\,P_n(u)\,du,$$

augmentée de la somme partielle $(A'' - A')\,S_n(x, \xi)$ de la série (3), et au point $x = \xi$ on devrait avoir

$$\sigma_n(\xi) = s_n^{f}(\xi) + (A'' - A')\,S_n(\xi, \xi).$$

Si $A' \neq A''$, cette égalité est incompatible avec les hypothèses faites dans l'énoncé du théorème IV :

$\sigma_n(\xi)$ est au plus de l'ordre de $o(n)$ et $s_n^{(f)}(\xi) = o(\sqrt{n})$ tandis que

$$\begin{aligned}
S_n(\xi, \xi) &= \sum_{0}^{n} \left(m + \frac{1}{2}\right) P_m^2(\xi) \\
&= \frac{n+1}{2} \left\{ P'_{n+1}(\xi)\, P_n(\xi) - P'_n(\xi)\, P_{n+1}(\xi) \right\} \\
&= \frac{n+1}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} + O(1).
\end{aligned}$$

Donc l'égalité

$$o(n) = o(\sqrt{n}) + \frac{n+1}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}(A'' - A') + O(1)$$

entraîne nécessairement $A' = A''$. Cette conclusion subsiste aussi pour $f(x) = 0$ puisque alors $s_n^{(f)}(\xi) = 0$ identiquement.

Il reste à démontrer que l'hypothèse faite sur $f(x)$ qui est supposée bornée à l'intérieur de $(-1, +1)$ et absolument intégrable dans cet intervalle entraîne

$$s_n^{(f)}(x) = o(\sqrt{n}) \qquad (-1 < x < 1),$$

quel que soit le point intérieur x.

En effet la formule de Christoffel

$$S_n(u, \xi) = \frac{n+1}{2} \, \frac{P_{n+1}(u)\, P_n(\xi) - P_{n+1}(\xi)\, P_n(u)}{u - \xi},$$

permet de conclure pour $-1 < u < 1$ et $-1 < \xi < 1$

$$|S_n(u, \xi)| \leqq \frac{n+1}{2} \, \frac{|P_n(\xi)| + |P_{n+1}(\xi)|}{|u - \xi|} = O\left\{ \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{1-\xi^2}\,|u - \xi|} \right\},$$

et d'autre part on a la formule approximative

$$S_n(u, \xi) = \frac{2 \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)(\theta - \varphi)\right]}{\pi \sin\frac{\theta - \varphi}{2} \sqrt{\sin\theta \sin\varphi}} + O(1)$$

$$\left(\xi = \cos\theta,\ u = \cos\varphi,\ \varepsilon \leqq \begin{matrix}\theta \\ \varphi\end{matrix} \leqq \pi - \varepsilon\right),$$

On a par conséquent dans

$$s_n^f(\xi) = \int_0^\pi f(\cos\varphi)\,S_n(\cos\theta, \cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$$

$$= \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} + \int_{\pi-\varepsilon}^\pi = i_1 + i_2 + i_3.$$

$$|i_1| = O\left\{\sqrt{n+1}\int_0^\varepsilon |f(\cos\varphi)|\sin\varphi\,d\varphi\right\} = o(\sqrt{n}),$$

ainsi que

$$|i_3| = o(\sqrt{n}).$$

Ensuite

$$|i_2| = O\left\{\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}\left|\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(\theta-\varphi)\right]}{\sin\frac{\theta-\varphi}{2}}\right| d\varphi\right\} + O(1) = O(\log n) + O(1),$$

et enfin

$$|s_n^f(\xi)| = o(\sqrt{n}).$$

Ainsi on voit que les hypothèses faites dans l'énoncé prouvent que malgré la présence du point exceptionnel ξ les constantes A' et A'' dans (35) sont égales. Donc grâce à

$$A'\xi + B' = B''\xi + B'',$$

sont égales aussi les constantes B' et B'' et la formule (28) est applicable dans tout l'intervalle $(-1, +1)$ avec les mêmes constantes A et B, malgré la présence de l'ensemble réductible E_ξ des points intérieurs ξ.

L'application de cette formule pour $F(x)$ donne l'expression définitive suivante du coefficient α_n :

$$\frac{\alpha_n}{n+\frac{1}{2}} = \alpha_0[1+(-1)^n] + A[(-1)^n - 1] - \int_0^1 f(u)\,du$$

$$-(-1)^n\int_{-1}^0 f(u)\,du + \int_{-1}^{+1} f(u)\,P_n(u)\,du.$$

La sommabilité $\left(C, \delta = \frac{1}{2}\right)$ de la série (34) entraîne $\alpha_n = o(n)$.

D'autre part le lemme IV du paragraphe 3 prouve que l'on a

$$\lim_{n=\infty}\int_{-1}^{+1} f(u)\,\mathrm{P}_n(u)\,du = 0,$$

vu que la fonction $f(u)$ est bornée à l'intérieur de $(-1, +1)$ et absolument intégrable dans cet intervalle. On a par conséquent

$$\lim_{n=\infty}\left\{\alpha_0[1+(-1)^n] - \int_0^1 f(u)\,du - (-1)^n\int_{-1}^0 f(u)\,du + \mathrm{A}[(-1)^n - 1]\right\} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(u)\,du,$$

ainsi que

$$\int_0^1 f(u)\,du - \int_{-1}^0 f(u)\,du = 2\mathrm{A}.$$

On a par conséquent

$$\alpha_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{+1} f(u)\,\mathrm{P}_n(u)\,du \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty),$$

ce qui démontre les théorèmes III et IV énoncés dans l'Introduction :

THÉORÈME III. — *Si la série* (34) *est sommable* $\left(\mathrm{C}, \delta \leqq \frac{1}{2}\right)$ *avec la somme zéro partout dans l'intervalle* $(-1, +1)$ *sauf les deux points frontières* $x = \pm 1$ *et un ensemble réductible* E_δ *des points intérieurs* ξ, *où elle oscille sans être sommable* $\left(\mathrm{C}, \frac{1}{2}\right)$ *ou, tout en l'étant, n'a pas pour somme zéro ou enfin diverge essentiellement, mais avec* $\lim\limits_{n=\infty}\frac{\sigma_n(\xi)}{n} = 0$, *tous ses coefficients sont identiquement nuls.*

THÉORÈME IV. — *Si la série* (34) *est sommable* $\left(\mathrm{C}, \delta \leqq \frac{1}{2}\right)$ *avec la somme* $f(x)$ *partout dans l'intervalle* $(-1, +1)$ *sauf peut-être les deux points frontières* $x = \pm 1$ *et un ensemble réductible* E_δ *des points intérieurs* ξ, *où elle oscille sans être sommable* $\left(\mathrm{C}, \frac{1}{2}\right)$ *ou, tout en l'étant, n'a pas pour somme* $f(x)$ *ou enfin diverge essen-*

tiellement, mais avec $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\sigma_n(\xi)}{n} = 0$, *elle est le développement en série de Legendre de sa somme* $f(x)$ *pourvu que la fonction* $f(x)$ *soit absolument intégrable dans* $(-1, +1)$ *et bornée à l'intérieur de cet intervalle.*

Supposons maintenant la série (34) sommable (C, δ) pour $\frac{1}{2} < \delta < 1$. Les séries divergentes bien connues

$$(3^a) \qquad 0 \sim \frac{1}{2} + \frac{3}{2}P_1(x) + \ldots + \left(n + \frac{1}{2}\right)P_n(x) + \ldots \qquad (x \neq 1)$$

et

$$(3^b) \qquad 0 \sim \frac{1}{2} - \frac{3}{2}P_1(x) + \ldots + (-1)^n\left(n + \frac{1}{2}\right)P_n(x) + \ldots \qquad (x \neq -1),$$

qui sont sommables $\left(C, \delta > \frac{1}{2}\right)$ avec zéro pour somme partout à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$, peuvent détruire l'unicité de développement de Legendre sommables $\left(C, \delta > \frac{1}{2}\right)$ et pour les exclure il suffit de supposer la série (34) sommable (C, δ) pour $\frac{1}{2} < \delta < 1$ aussi aux points frontières $x = \pm 1$. En effet les séries (3^a) et (3^b) ne sont sommables (C, δ) que pour $\delta > 1$ aux points $x = -1$ et $x = +1$ respectivement et divergent essentiellement aux points $x = +1$ et $x = -1$ respectivement.

L'hypothèse de la sommabilité $(C, \delta < 1)$ de la série (34) aux points $x = \pm 1$, où $|P_n(\pm 1)| = 1$, entraîne $\alpha_n = o(n^\delta)$, donc, vu que $\delta < 1$, *a fortiori* $\alpha_n = o(n)$ et tous nos calculs faits pour le cas $\delta > \frac{1}{2}$ restent applicables. Ainsi *l'exclusion des points frontières* $x = \pm 1$ *de l'ensemble* E_δ *des points exceptionnels* ξ *permet d'étendre nos théorèmes d'unicité III et IV aux séries de Legendre sommables* $(C, \delta < 1)$. Le même effet aurait l'hypothèse $\alpha_n = o(n)$. Mais on a davantage : il suffit de supposer que la série (34) pour $x = \pm 1$ oscille sans être sommable $(C, \delta < 1)$ ou bien diverge essentiellement mais avec $\lim\limits_{n=\infty} \frac{s_n}{n^2} = 0$ pour éliminer les séries (3^a) et (3^b), seules causes possibles de la non-unicité, et l'on obtient ainsi les théorèmes suivants :

THÉORÈME III'. — *Si la série* (34) *est sommable* (C, δ) *pour* $\frac{1}{2} < \delta < 1$ *avec la somme zéro partout à l'intérieur de l'intervalle* $(-1, +1)$ *sauf un ensemble réductible* E_δ *des points intérieurs* ξ, *où elle oscille ou bien diverge essentiellement avec* $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\sigma_n(\xi)}{n} = 0$, *tous ses coefficients sont identiquement nuls, pourvu qu'elle oscille aux points frontières* $x = \pm 1$ *de l'intervalle ou bien qu'on ait, si elle y diverge essentiellement*, $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\sigma_n(\pm 1)}{n^2} = 0$.

THÉORÈME IV'. — *Si la série* (34) *est sommable* (C, δ) *pour* $\frac{1}{2} < \delta < 1$ *avec la somme* $f(x)$ *partout à l'intérieur de l'intervalle* $(-1, +1)$ *sauf un ensemble réductible* E_δ *des points intérieurs* ξ, *où elle oscille ou bien diverge essentiellement avec* $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\sigma_n(\xi)}{n} = 0$, *elle est le développement en série de Legendre de sa somme* $f(x)$ *supposée absolument intégrable dans* $(-1, +1)$ *et bornée à l'intérieur de cet intervalle pourvu que la série oscille aux points frontières* $x = \pm 1$ *de l'intervalle ou bien qu'on ait, si elle y diverge essentiellement*, $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\sigma_n(\pm 1)}{n^2} = 0$.

Le raisonnement de ce paragraphe est applicable jusqu'au point où l'on parvient à l'expression du coefficient α_n.

Envisageons le point $x = \xi$: en ce point la somme partielle $\sigma_n(\xi)$ de la série (34) s'exprime ainsi

$$\begin{aligned} \sigma_n(\xi) = {} & s_n^{(a)}(\xi) + (A'' - A')\, S_n(\xi, \xi) \\ & + \left[\alpha_0 - \int_0^{1} f(u)\, du - A'' \right] \sum_{m=0}^{n} \left(m + \frac{1}{2} \right) P_m(\xi) \\ & + \left[\alpha_0 - \int_1^{0} f(u)\, du - A' \right] \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \left(m + \frac{1}{2} \right) P_m(\xi). \end{aligned}$$

Vu que le point ξ est à l'intérieur de $(-1, +1)$ les séries (3^a) et (3^b) pour $x = \xi$ sont sommables $\left(C, \delta > \frac{1}{2} \right)$, donc leurs sommes partielles sont de l'ordre de $o\left(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$ et l'on a *a fortiori*

$$\sum_{m=0}^{n}(\pm 1)^m\left(m+\frac{1}{2}\right)P_m(\xi)=o(n).$$

D'autre part

$$S_n(\xi,\xi)=\frac{n+1}{\pi\sin\vartheta}+O(1) \qquad (\xi=\cos\vartheta),$$

et l'on obtient par conséquent

$$o(n)=(A''-A')\frac{n+1}{\pi\sin\vartheta}+o(n),$$

d'où la conclusion nécessaire

$$A''=A'.$$

Ainsi l'ensemble E_δ des points intérieurs ξ n'altère pas les constantes A et B dans la formule

$$F(x)=\int_0^x\int_0^t\frac{f(u)\,du\,dt}{1-t^2}+A\int_0^x\frac{dt}{1-t^2}+B,$$

et ces deux nombres sont constants dans $(-1,+1)$.

L'expression du coefficient α_n prend la forme suivante:

$$\frac{\alpha_n}{n+\frac{1}{2}}=\int_{-1}^{+1}f(u)P_n(u)\,du+\left[\alpha_0-\int_0^1 f(u)\,du-A\right]$$
$$+(-1)^n\left[\alpha_0-\int_{-1}^0 f(u)\,du+A\right].$$

Envisageons maintenant un point frontière $x=\pm 1$, soit $x=+1$ pour fixer les idées. En ce point nous avons

$$\sum_0^n\alpha_m=\sigma_n(+1)=s_n^{(f)}(+1)+\left[\alpha_0-\int_0^1 f(u)\,du-A\right]\sum_0^n\left(m+\frac{1}{2}\right)$$
$$+\left[\alpha_0-\int_{-1}^0 f(u)\,du+A\right]\sum_0^n(-1)^m\left(m+\frac{1}{2}\right).$$

Or, vu que, comme on le vérifie facilement,

$$s_n^{(f)}(+1)=o(n^2)$$

et

$$\sum_0^n (-1)^m \left(m+\frac{1}{2}\right) = (-1)^n \frac{n+1}{2},$$

tandis que

$$\sum_0^n \left(m+\frac{1}{2}\right) = \frac{(n+1)^2}{2},$$

on voit que cette égalité qui peut être écrite

$$o(n^2) = o(n^2) + \frac{1}{2}\left[\alpha_0 - \int_0^1 f(u)\,du - A\right](n+1)^2 + O(n)$$

entraîne nécessairement

$$\alpha_0 - \int_0^1 f(u)\,du - A = 0.$$

De même, la considération de la série (34) à l'autre point frontière $x = -1$ donne

$$\sum_0^n (-1)^m \alpha_m = \sigma_n(-1) = s_n^{(f)}(-1) + \left[\alpha_0 - \int_0^1 f(u)\,du - A\right]\sum_0^n (-1)^m \left(m+\frac{1}{2}\right)$$
$$+ \left[\alpha_0 - \int_{-1}^0 f(u)\,du + A\right]\sum_0^n \left(m+\frac{1}{2}\right),$$

d'où l'on conclut

$$\alpha_0 - \int_{-1}^0 f(u)\,du + A = 0.$$

Ces deux équations donnent d'abord

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(u)\,du$$

et ramènent ensuite l'expression du coefficient α_n à la forme définitive

$$\alpha_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{+1} f(u)\,P_n(u)\,du,$$

ce qui achève la preuve des théorèmes III' et IV'.

7. — Séries ultrasphériques sommables (C, $\delta < 1$).

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que les cas des séries de Legendre sommables $\left(C, \delta \leqq \frac{1}{2}\right)$ et sommables $\left(C, \delta > \frac{1}{2}\right)$ sont différents étant donné que la série

$$(3^a) \qquad 0 \sim \frac{1}{2} + \frac{3}{2} P_1(x) + \ldots + \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(x) + \ldots \qquad (|x| < 1)$$

est sommable avec zéro pour somme (C, δ) seulement si $\delta > \frac{1}{2}$.

De même pour les séries ultrasphériques sommables (C, δ) : on connaît deux séries ultrasphériques qui représentent zéro; l'une, la série

$$(5) \qquad 0 \sim \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(n+2\lambda)} P_n^{\lambda}(\xi) P_n^{\lambda}(x) \qquad \left(\begin{matrix} x \neq \xi \\ -1 < \xi < 1 \end{matrix}\right),$$

où ξ est fixe, ($-1 < \xi < 1$), est sommable (C, $\delta > 0$) partout dans $(-1, +1)$, sauf le point $x = \xi$ où elle diverge essentiellement avec

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n(\xi)}{n} = \frac{\Gamma(2\lambda)\, 2^{1-2\lambda}}{(1-\xi^2)^{\lambda}\, \Gamma^2(\lambda)};$$

l'autre, qui est le cas particulier pour $\xi = 1$ de la précédente

$$(5^a) \qquad 0 \sim \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) P_n^{\lambda}(x) \qquad (1 > x \geqq -1)$$

est sommable (C, $\delta > \lambda$) partout à l'intérieur de $(-1, +1)$, étant essentiellement divergente avec $\lim\limits_{n=\infty} \frac{s_n}{n^{2\lambda+1}} = \frac{1}{(2\lambda+1)\,\Gamma(2\lambda)}$ pour $x = 1$ et sommable (C, $\delta > 2\lambda$) avec zéro pour somme au point $x = -1$.

La série analogue

$$(5^b) \qquad 0 \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+\lambda) P_n^{\lambda}(x)$$

n'en diffère que par le changement des rôles joués par les points $x = 1$ et $x = -1$: elle diverge essentiellement pour $x = -1$ et oscille, étant sommable (C, $\delta > 2\lambda$) avec zéro pour somme, au point $x = +1$.

Donc ici la valeur critique de δ est égale à λ et pour $\lambda < 1$ on a les deux théorèmes entièrement analogues aux théorèmes III et IV du paragraphe 6 :

Soit la série ultrasphérique

$$(1) \qquad \alpha_0 + \alpha_1 P_1^{(\lambda)}(x) + \ldots \alpha_n P_n^{(\lambda)}(x) + \ldots$$

sommable (C, $\delta \leqq \lambda$) *avec la somme* $f(x)$ *partout dans* $(-1, +1)$, *sauf peut-être les deux points frontières* $x = \pm 1$ *et un ensemble réductible* E_δ *des points intérieurs* ξ, *où elle oscille ou diverge essentiellement, mais avec* $\lim\limits_{n=\infty} \frac{s_n(\xi)}{n} = 0$; *elle est le développement ultrasphérique de sa somme* $f(x)$, *pourvu que la fonction* $f(x)$ *soit bornée à l'intérieur de* $(-1, +1)$ *et que le produit* $(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}|f(x)|$ *soit intégrable dans cet intervalle. Dans le cas particulier, où* $f(x) \equiv 0$, *tous ses coefficients sont identiquement nuls.*

Ce théorème n'est vrai que pour les séries sommables (C, $\delta \leqq \lambda$) puisque dans le cas de la sommabilité (C, δ) avec $\lambda < \delta < 1$ entrent en jeu les séries divergentes (5^a) et (5^b), et pour les exclure, il faut introduire dans l'énoncé du théorème des restrictions spéciales qui concernent le mode de divergence essentielle de la série (1) aux points frontières $x = \pm 1$ tout comme on l'a fait pour les séries de Legendre dans les théorèmes III' et IV'. Ces restrictions peuvent être formulées ainsi : *la série* (1) *ou bien oscille pour* $x = \pm 1$ *ou bien, si elle y diverge essentiellement, ses sommes partielles* $\sigma_n(1)$ *et* $\sigma_n(-1)$ *sont de l'ordre de* $o(n^{2\lambda+1})$:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n(1)}{n^{2\lambda+1}} = \lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n(-1)}{n^{2\lambda+1}} = 0.$$

Cette hypothèse $\sigma_n(\pm 1) = o(n^{2\lambda+1})$ est satisfaite d'elle-même dans le cas où la série (1) est sommable (C, $\delta \leqq \lambda$) à l'intérieur de $(-1, +1)$;

en effet, dans ce cas, $\alpha_n = o(n^{\delta+1-\lambda}) = o(n)$, et

$$\sigma_n(\pm 1) = o\left\{\sum_{1}^{n} m\,A_m^{(2\lambda-1)}\right\} = o\left\{\sum_{1}^{n} m^{2\lambda}\right\} = o(n^{2\lambda+1}).$$

Pour démontrer les théorèmes énoncés dans le cas envisagé $\lambda < 1$, nous formons la série auxiliaire

$$\text{(11)}\qquad F(x) = \alpha_0 \int_0^x \int_0^t \frac{du\,dt}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}(1-t^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n P_n^{(\lambda)}(x)}{n(n+2\lambda)},$$

qui converge uniformément dans l'intervalle $(\varepsilon - 1, 1 - \varepsilon)$ étant donné que $\alpha_n = o(n^{\delta+1-\lambda})$ grâce à la sommabilité (C, δ) avec $\delta < 1$ à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$.

Le lemme du paragraphe 3 nous donne, au cas où l'ensemble E_δ se réduit à un seul point $x = \xi$,

$$F(x) = \int_0^x \int_0^t \frac{f(u)\,du\,dt}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}(1-t^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}} + \begin{cases} A' \displaystyle\int_0^x \frac{du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}} + B' & (x > \xi), \\ A'' \displaystyle\int_0^x \frac{du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}} + B'' & (x \geqq \xi). \end{cases}$$

La fonction $(1-x^2)^{\frac{\lambda}{2}}\psi(x)$, où

$$\psi(x) = F(x) - \alpha_0 \int_0^x \int_0^t \frac{du\,dt}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}(1-t^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}},$$

s'exprime par une série absolument et uniformément convergente dans tout l'intervalle $(-1, +1)$, et en l'intégrant après la multiplication par $(1-x^2)^{\frac{\lambda-1}{2}} P_n(x)\,dx$, on trouve (§ 3) la formule

$$\text{(32)}\qquad -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}{\Gamma(\lambda)} \frac{\alpha_n A_n^{(2\lambda-1)}}{n(n+2\lambda)(n+\lambda)} = \int_{-1}^{+1} \frac{\psi(x)\,P_n^{(\lambda)}(x)\,dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}.$$

Sans entrer dans tous les détails du calcul, qui est analogue à celui du paragraphe précédent, nous écrivons directement le résultat du calcul de l'intégrale du second membre :

$$(36)\quad \begin{aligned} \alpha_n = a_n + (n+\lambda)\Bigg\{ & \alpha_0 \frac{1+(-1)^n}{2\lambda} - \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}[A'' - (-1)^n A'] \\ & - \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \int_0^1 \frac{f(u)+(-1)^n f(-u)}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}\,du \Bigg\} \\ & + \frac{(A''-A')\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}(n+\lambda)\frac{P_n^{(\lambda)}(\xi)}{A_n^{(2\lambda-1)}} \\ & + \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \frac{n+\lambda}{A_n^{(2\lambda-1)}}(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}\frac{dP_n^{(\lambda)}(\xi)}{d\xi}\Bigg\{(A'-A'')\int_0^\xi \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}} + B' - B''\Bigg\},\end{aligned}$$

où a_n désigne le coefficient ultrasphérique de Fourier de la fonction $f(x)$.

Le dernier terme disparaît parce que, grâce à la continuité de $F(x)$ au point $x = \xi$, on a

$$(A'-A'')\int_0^\xi \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}} + B' - B'' = 0.$$

Envisageons la somme partielle $\sigma_n(\xi)$ de la série (1) au point $x = \xi$. L'expression de α_n nous donne

$$\begin{aligned}\sigma_n(\xi) = \sum_0^n \alpha_m P_m^{(\lambda)}(\xi) = s_n^f(\xi) & + \left\{ \frac{\alpha_0}{2\lambda} - \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\left[A'' + \int_0^1 \frac{f(u)\,du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}\right]\right\}\tau_n(\xi) \\ & + \left\{ \frac{\alpha_0}{2\lambda} + \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\left[A' - \int_{-1}^0 \frac{f(u)\,du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}\right]\right\}\tau'_n(\xi) \\ & + \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}(A''-A')\,S_n(\xi,\xi),\end{aligned}$$

où $s_n^f(\xi)$, $\tau_n(\xi)$ et $\tau'_n(\xi)$ désignent les sommes partielles du développement ultrasphérique de $f(x)$ et des séries (5^a) et (5^b) respectivement, $S_n(\xi, \xi)$ étant la somme partielle de la série (5) pour $x = \xi$. Vu que les séries (5^a) et (5^b) sont sommables $(C, \delta > \lambda)$ partout à l'intérieur de $(-1, +1)$, on a

$$\tau_n(\xi) = o(n^{\lambda+\varepsilon}),$$

ainsi que

$$\tau'_n(\xi) = o(n^{\lambda+\varepsilon}),$$

quelque petit que soit ε positif. Or, λ étant par hypothèse inférieur à l'unité, on en conclut

$$\tau_n(\xi) = o(n) \quad \text{et} \quad \tau'_n(\xi) = o(n)$$

a fortiori.

D'autre part, si la fonction $(1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} f(x)$ est absolument intégrable dans $(-1, +1)$ et bornée à l'intérieur de cet intervalle, on a

$$s_n^f(\xi) = o(n^\lambda) = o(n) \qquad (\lambda < 1).$$

On le démontre facilement en s'appuyant sur la formule de Christoffel :

$$\text{(37)} \qquad S_n(x, \xi) = \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{A_n^{(2\lambda-1)}}\,\frac{P_{n+1}^{(\lambda)}(x)\,P_n^{(\lambda)}(\xi) - P_n^{(\lambda)}(x)\,P_{n+1}^{(\lambda)}(\xi)}{x - \xi}.$$

Cette formule nous fournit aussi, vu que $\dfrac{dP_n^{(\lambda)}(x)}{dx} = 2\lambda P_{n-1}^{(\lambda+1)}(x)$,

$$\begin{aligned} S_n(\xi, \xi) &= \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{A_n^{(2\lambda-1)}}\left\{\frac{d}{dx}\left[P_{n+1}^{(\lambda)}(x)\,P_n^{(\lambda)}(\xi) - P_n^{(\lambda)}(x)\,P_{n+1}^{(\lambda)}(\xi)\right]\right\}_{x=\xi} \\ &= \lambda\,\frac{n+1}{A_n^{(2\lambda-1)}}\left[P_n^{(\lambda+1)}(\xi)\,P_n^{(\lambda)}(\xi) - P_{n-1}^{(\lambda+1)}(\xi)\,P_{n+1}^{(\lambda)}(\xi)\right]. \end{aligned}$$

Posons $\xi = \cos\theta$. La formule approximative pour le polynome ultrasphérique nous donne le résultat

$$S_n(\xi, \xi) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)}{\Gamma(\lambda)}\,\frac{n+1}{\pi(1-\xi^2)^\lambda} + o(n),$$

et toutes ces estimations nous fournissent

$$\sigma_n(\xi) = o(n) = o(n) + \frac{n+1}{\pi(1-\xi^2)^\lambda}(A'' - A'),$$

d'où découle nécessairement $A'' = A'$, et par conséquent aussi $B'' = B'$. Ainsi la présence des points tels que ξ à l'intérieur de $(-1, +1)$ ne change pas les constantes A et B et, dans la formule

$$F_1(x) = \int_0^x \int_0^t \frac{f(u)\,du\,dt}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}(1-t^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}} + A\int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}} + B,$$

les quantités A et B sont constantes dans tout l'intervalle $(-1, +1)$ malgré la présence de l'ensemble E_δ.

Par conséquent, l'expression (36) du coefficient α_n se réduit à la forme (33) du paragraphe 5 :

$$(33)\quad \alpha_n = a_n + (n+\lambda)\left\{ \alpha_0 \frac{1+(-1)^n}{2\lambda} - A\frac{[1-(-1)^n]\,\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} - \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\int_0^1 \frac{f(u)+(-1)^n f(-u)}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}\,du \right\}.$$

Si la série (1) est sommable $(C, \delta \leqq \lambda)$, on a

$$\alpha_n = o(n^{\delta-\lambda+1}) = o(n).$$

D'autre part $a_n = o(n)$, et, sans aucune hypothèse quant à l'allure de la série (1) aux points frontières $x = \pm 1$, on conclut de (33), tout comme au paragraphe 5,

$$\alpha_n = a_n = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\,\frac{n+\lambda}{A_n^{(2\lambda-1)}}\int_{-1}^{+1} \frac{f(u)\,P_n^{(\lambda)}(u)\,du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}},$$

ce qui prouve nos théorèmes A et B, énoncés dans l'Introduction pour le cas où $\lambda < 1$. Notre méthode est en défaut pour les prouver, quel que soit λ, et même son extension possible indiquée à la fin du paragraphe 5 ne pourrait que remplacer la restriction $\lambda < 1$ par une autre de la forme $\lambda < L$ sans embrasser toutes les valeurs possibles du paramètre λ. Tels, par exemple, sont les lemmes I *bis* et II *bis* qui permettront d'étendre nos résultats concernant l'unicité des séries ultrasphériques sommables (C, δ) pour $\delta \leqq \lambda < 1$ aux séries sommables (C, δ) pour $\delta \leqq \lambda < 3$; mais il faudrait créer une autre méthode pour traiter la question de l'unicité des séries ultrasphériques sommables $(C, \delta \leqq \lambda)$ dans toute sa généralité, quel que soit λ.

Passons maintenant, en restant toujours dans le cas $\lambda < 1$, aux séries ultrasphériques sommables (C, δ) avec $\lambda < \delta < 1$. Dans ce cas, il est nécessaire de supposer que la série (1) oscille pour $x = \pm 1$ ou bien, si elle y diverge essentiellement, que ses sommes partielles $\sigma_n(1)$ et $\sigma_n(-1)$ satisfont à la condition

$$\sigma_n(\pm 1) = o(n^{2\lambda+1}).$$

La formule (33) permet de les écrire

$$\begin{aligned}\sigma_n(\pm 1) = {} & s_n^{(f)}(\pm 1) \\ & + \left\{ \frac{\alpha_0}{2\lambda} - \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \left[A + \int_0^1 \frac{f(u)\,du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} \right] \right\} \tau_n(\pm 1) \\ & + \left\{ \frac{\alpha_0}{2\lambda} + \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \left[A - \int_{-1}^0 \frac{f(u)\,du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} \right] \right\} \tau'_n(\pm 1),\end{aligned}$$

τ_n et τ'_n désignant comme plus haut les sommes partielles des séries (5^a) et (5^b). Or il est facile de calculer ces sommes :

$$\begin{aligned}\tau_n(+1) = \tau'_n(-1) & = \sum_{m=0}^{n} (m+\lambda)\, A_m^{(2\lambda-1)} \\ & = 2\lambda\, A_n^{(2\lambda+1)} - \lambda\, A_n^{(2\lambda)} \\ & = \frac{n^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)\Gamma(2\lambda)} + O(n^{2\lambda}),\end{aligned}$$

tandis que

$$\tau_n(-1) = \tau'_n(+1) = \sum_{0}^{n} (-1)^m (m+\lambda) A_m^{(2\lambda-1)} = o(n^{2\lambda+1}),$$

vu que les séries (5^a) et (5^b) sont sommables $(C, \delta > 2\lambda)$ aux points $x = -1$ et $x = +1$ respectivement.

Il nous reste à évaluer $s_n^{(f)}(\pm 1)$:

$$s_n^{(f)}(\pm 1) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(u)\, S_n(\pm 1, u)\, du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}.$$

La formule (37) nous donne

$$S_n(\pm 1, u) = \frac{1}{2}\, \frac{(n+2\lambda)\, P_n^{(\lambda)}(u) - (n+1)\, P_{n+1}^{(\lambda)}(u)}{\pm 1 - u},$$

d'où, pour $\varepsilon - 1 \leqq u \leqq 1 - \varepsilon$,

$$|S_n(\pm 1, u)| \leqq \frac{1}{2\varepsilon}\left\{(n+2\lambda)c_1 A_n^{(\lambda-1)} + (n+1)c_2 A_{n+1}^{(\lambda-1)}\right\}(1-u^2)^{-\frac{\lambda}{2}}$$
$$\leqq \frac{1}{2\varepsilon^{1+\lambda}} O(n^\lambda) = O(n^\lambda) \qquad (|u| \leqq 1-\varepsilon).$$

D'autre part, quel que soit u, on a

$$|S_n(\pm 1), u)| \leqq \sum_{m=0}^{n}(m+\lambda)\frac{|P_m^{(\lambda)}(\pm 1)||P_m^{(\lambda)}(u)|}{A_m^{(2\lambda-1)}}$$
$$\leqq \sum_{m=0}^{n}(m+\lambda)A_m^{(2\lambda-1)} < 2\lambda A_n^{(2\lambda+1)} = O(n^{2\lambda+1}).$$

Maintenant nous pouvons conclure

$$|s_n^{(f)}(\pm 1)| = \left|\int_{-1}^{+1}\frac{f(u)S_n(\pm 1, u)\,du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}\right|$$
$$\leqq \int_{-1}^{\varepsilon-1} + \int_{\varepsilon-1}^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^{1}\frac{|f(u)||S_n(\pm 1, u)|\,du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}$$
$$\leqq O\left\{n^{2\lambda+1}\int_{-1}^{\varepsilon-1}\frac{|f(u)|\,du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}\right\}$$
$$+ O\left\{n^\lambda\int_{\varepsilon-1}^{1-\varepsilon}\frac{|f(u)|\,du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}\right\} + O\left\{n^{2\lambda+1}\int_{1-\varepsilon}^{1}\frac{|f(u)|\,du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}\right\}.$$
$$= o(n^{2\lambda+1}) + O(n^\lambda) + o(n^{2\lambda+1})$$
$$= o(n^{2\lambda+1}),$$

grâce à l'existence de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1}\frac{|f(u)|\,du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}.$$

Par conséquent, les expressions de $\sigma_n(1)$ et $\sigma_n(-1)$ nous donnent les résultats suivants :

$$\sigma_n(+1) = o(n^{2\lambda+1}) + \frac{n^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)\Gamma(2\lambda)}$$
$$\times\left\{\frac{\alpha_0}{2\lambda} - \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\left[A + \int_0^1\frac{f(u)\,du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}\right]\right\},$$

ainsi que

$$\sigma_n(-1) = o(n^{2\lambda+1}) + \frac{n^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)\Gamma(2\lambda)}$$
$$\times \left\{ \frac{\alpha_0}{2\lambda} + \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \left[A - \int_{-1}^{0} \frac{f(u)\,du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} \right] \right\}.$$

Or, d'après l'hypothèse faite dans l'énoncé, $\sigma_n(1)$ et $\sigma_n(-1)$ sont de l'ordre de $o(n^{2\lambda+1})$

$$\sigma_n(\pm 1) = o(n^{2\lambda+1});$$

donc les coefficients des termes en $n^{2\lambda+1}$ sont nuls, d'où

$$\alpha_n = a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty).$$

On voit que le cas étudié $\lambda < 1$ ne diffère pas du cas des polynomes de Legendre $\lambda = \frac{1}{2}$, traité dans le paragraphe **6**.

Pour $\lambda \geqq 1$ nous n'avons que des résultats très incomplets. Nous les exposerons néanmoins pour mieux préciser le problème.

Supposons donc que $\lambda \geqq 1$ et que la série (1) est sommable (C, $\delta < 1$) avec la somme $f(x)$, partout à l'intérieur de $(-1, +1)$, sauf un ensemble des points intérieurs ξ_i *en nombre fini* ($i = 1, 2, \ldots, k$). Soient $\xi_0 = -1$ et $\xi_{k+1} = +1$. Le lemme du paragraphe **5** donne pour $\xi_{i-1} \leqq x \leqq \xi_i$

$$F(x) = \int_0^x \int_0^t \frac{f(u)\,du\,dt}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}(1-t^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}} + A_i \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}+\lambda}} + B_i$$
$$(\xi_{i-1} \leqq x \leqq \xi_i),$$

et la formule (36) est remplacée par

$$\alpha_n = a_n + (n+\lambda) \left\{ \alpha_0 \frac{1+(-1)^n}{2\lambda} - \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} [A_{k+1} - (-1)^n A_1] \right.$$
$$\left. - \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \int_0^1 \frac{f(u) + (-1)^n f(-u)}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} du \right\}$$
$$+ \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \frac{n+\lambda}{A_n^{(2\lambda-1)}} \sum_{i=1}^{k} (A_{i+1} - A_i) P_n^{(\lambda)}(\xi_i).$$

Vu que $\delta < 1 \leqq \lambda$ et que, par conséquent,

$$\alpha_n = o(n^{\delta+1-\lambda}) = o(n)$$

ainsi que

$$P_n^{(\lambda)}(\xi_i) = O(n^{\lambda-1}),$$

on voit que le second terme dans l'expression de α_n doit disparaître pourvu que l'on ait aussi $a_n = o(n)$. Or, pour avoir $a_n = o(n)$, il suffit de supposer $f(x)$ bornée à l'intérieur et le produit $(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}|f(x)|$ intégrable dans tout l'intervalle $(-1, +1)$. Donc

$$(38_1) \quad \frac{\alpha_0}{2\lambda} - \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} A_{k+1} - \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \int_0^1 \frac{f(u)\,du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} = 0,$$

ainsi que

$$(38_2) \quad \frac{\alpha_0}{2\lambda} + \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} A_1 - \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \int_{-1}^0 \frac{f(u)\,du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} = 0,$$

et, par conséquent,

$$\alpha_n = a_n + \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \frac{n+\lambda}{A_n^{(2\lambda-1)}} \sum_{i=1}^{k} (A_{i+1} - A_i) P_n^{(\lambda)}(\xi_i).$$

En formant la somme partielle $\sigma_n(\xi_j)$ de la série (1) au point $x = \xi_j$, nous obtenons

$$\sigma_n(\xi_j) = s_n^{(f)}(\xi_j) + \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \sum_{i=1}^{k} (A_{i+1} - A_i) \tau_{ni}(\xi_j),$$

où $\tau_{ni}(\xi_i)$ désigne la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série (5) pour $x = \xi_i$ et $\xi = \xi_j$. Si $i \neq j$, on a

$$\tau_{ni}(\xi_j) = o(n^{\varepsilon}$$

quelque petit que soit $\varepsilon > 0$, vu que la série (5) est sommable (C, ε) pour $\varepsilon > 0$. Mais, pour $i = j$, on a

$$\tau_{nj}(\xi_j) = \sum_{0}^{n} (m+\lambda) \frac{[P_m^{(\lambda)}(\xi_j)]^2}{A_m^{(2\lambda-1)}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}{\Gamma(\lambda)} \frac{n+1}{\pi(1-\xi_j^2)^{\lambda}} + O(1),$$

et l'on obtient, par conséquent,

$$\sigma_n(\xi_j) = s_n^{(f)}(\xi_j) + \frac{n+1}{\pi(1-\xi_j^2)^\lambda}(A_{j+1} - A_j) + o(n^\varepsilon).$$

Supposons maintenant le produit $(1-x^2)^{\frac{\lambda-1}{2}} |f(x)|$ intégrable dans $(-1, +1)$. Dans ce cas on a

$$s_n^{(f)}(\xi_j) = O(\log n).$$

En effet,

$$s_n^{(f)}(\xi_j) = \int_0^\pi f(\cos\varphi)\, S_n(\theta_j, \varphi) \sin^{2\lambda}\varphi\, d\varphi = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} + \int_{\pi-}^{\pi}$$
$$= i_1 + i_2 + i_3,$$

où

$$|S_n(\theta_j, \varphi)| \leqq \frac{C}{\sin^\lambda\varphi}$$

pour

$$0 \leqq \varphi \leqq \pi \quad \text{et} \quad |\theta_j - \varphi| \geqq \eta,$$

ainsi que

$$S_n(\theta_j, \varphi) = \frac{2^{2\lambda-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}{\pi(\sin\theta_j \sin\varphi)^\lambda \Gamma(\lambda)} \frac{\sin[(n+\lambda)(\theta_j - \varphi)]}{\sin\frac{\theta_j - \varphi}{2}} + O(1).$$

Par conséquent,

$$|i_2| \leqq K \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \left| \frac{\sin[(n+\lambda)(\theta_j-\varphi)]}{\sin\frac{\theta_j-\varphi}{2}} \right| d\varphi = O(\log n),$$

tandis que

$$|i_1| \leqq C \int_0^\varepsilon |f(\cos\varphi)| \sin^\lambda\varphi\, d\varphi = O(1),$$

ainsi que

$$|i_3| = O(1).$$

Ainsi, vu l'hypothèse

$$\sigma_n(\xi_j) = o(n),$$

on en déduit

$$o(n) = \frac{n+1}{\pi(1-\xi_j^2)^\lambda}(A_{j+1} - A_j) + o(n^\varepsilon) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

d'où

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_k = A_{k+1}$$

et (38) peut être écrit ainsi :

$$\alpha_0 = \frac{2\lambda\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\int_{-1}^{+1}\frac{f(u)\,du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}.$$

L'expression du coefficient α_n se réduit à a_n et nous avons démontré pour $\lambda \geqq 1$ l'unicité des développements ultrasphériques sommables $(C, \delta < 1)$ avec la somme $f(x)$ partout à l'intérieur de $(-1, +1)$ sauf un ensemble réductible E_δ des points intérieurs ξ_i pourvu que :

1° le produit $(1-x^2)^{\frac{\lambda-1}{2}}|f(x)|$ soit intégrable dans $(-1, +1)$; 2° $f(x)$ — bornée à l'intérieur de l'intervalle, et 3° $\sigma_n(\xi_i) = o(n)$ si la série (1) diverge essentiellement pour $x = \xi_i$. Si l'on exclut l'ensemble E_δ, en supposant la série (1) sommable $(C, \delta < 1)$ partout à l'intérieur de $(-1, +1)$ *sans exception*, il suffit de supposer intégrable dans $(-1, +1)$ le produit $(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}|f(x)|$ et la condition 3° tombe d'elle-même.

Ces résultats sont peu satisfaisants et nous ne les mentionnons que pour mettre en relief les inconvénients de notre méthode, dans le cas où $\lambda \geqq 1$.

Ainsi le problème de l'unicité des séries ultrasphériques sommables (C, δ), résolu dans le cas $\lambda < 1$, attend sa solution pour $\lambda \geqq 1$.

8. — Unicité des séries divergentes qui représentent zéro étant sommables $(C, \delta < 1)$.

Les méthodes développées dans ce travail permettent d'établir en quelques mots l'unicité des séries divergentes

$$(4)\quad 0 \sim \frac{1}{2} + \cos(x-\xi) + \cos 2(x-\xi) + \ldots + \cos n(x-\xi) + \ldots \qquad (x \neq \xi),$$

$$(5)\qquad 0 \sim \lambda + \frac{1+\lambda}{2\lambda} P_1^{(\lambda)}(\xi)\, P_1^{(\lambda)}(x) + \ldots + \frac{n+\lambda}{A_n^{(2\lambda-1)}} P_n^{(\lambda)}(\xi)\, P_n^{(\lambda)}(x) + \ldots$$

qui représentent zéro étant sommables $(C, \delta > 0)$ avec la somme nulle *partout*, sauf le point intérieur $x = \xi$ et les points frontières $x = \pm 1$ pour la série (5), où elles divergent essentiellement, ainsi que l'unicité des séries

$$(4')\quad 0 \sim \frac{1}{2} + \cos x + \ldots + \cos nx + \ldots \qquad (x \neq 0, 2\pi),$$

$$(5^a)\quad 0 \sim \lambda + (1+\lambda)P_1^{(\lambda)}(x) + \ldots + (n+\lambda)P_n^{(\lambda)}(x) + \ldots \qquad (x \neq +1),$$

$$(5^b)\quad 0 \sim \lambda - (1+\lambda)P_1^{(\lambda)}(x) + \ldots + (-1)^n(n+\lambda)P_n^{(\lambda)}(x) + \ldots \qquad (x \neq -1)$$

sommables (C, δ) avec zéro pour somme la première avec $\delta > 0$ et les deux dernières avec $\delta > \lambda$ partout à l'intérieur des intervalles $(0, 2\pi)$ et $(-1, +1)$ respectivement.

En effet le raisonnement du paragraphe 4 appliqué à la série trigonométrique

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \ldots + \alpha_n \cos x + \beta_n \sin nx + \ldots,$$

supposée sommable $(C, \delta < 1)$, avec la somme nulle partout à l'intérieur de $(0, 2\pi)$ sauf le point $x = \xi$, donne l'expression (30) des coefficients

$$\alpha_n = 2\alpha_0 + \frac{A' - A''}{\pi} + \frac{A'' - A'}{\pi}\cos n\xi,$$

$$\beta_n = \frac{A'' - A'}{\pi}\sin n\xi,$$

où α_0, A' et A'' sont des constantes. Par conséquent la série se réduit à la somme de deux séries typiques (4) et (4'),

$$\frac{A'' - A'}{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos[n(x-\xi)]\right\} + \left(2\alpha_0 + \frac{A' - A''}{\pi}\right)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos nx\right\}.$$

Si la série est sommable aussi pour $x = 0$ le facteur

$$2\alpha_0 + \frac{A' - A''}{\pi}$$

doit s'annuler et l'on aboutit à la série (4),

$$2\alpha_0\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos n(x-\xi)\right].$$

Au contraire, si la série est sommable *partout* à l'intérieur de $(0, 2\pi)$

sans exception, on doit avoir $A' = A'' = A$ et l'on trouve la série (4'),

$$2\alpha_0 \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \right\}.$$

Posons maintenant la question suivante : quelle est la série ultrasphérique

$$\alpha_0 + \alpha_1 P_1^{(\lambda)}(x) + \ldots + \alpha_n P_n^{(\lambda)}(x) + \ldots,$$

sommable (C, $\delta < 1$) pour $\delta > 0$ avec la somme nulle partout à l'intérieur de $(-1, +1)$, sauf le point $x = \xi$.

Pour démontrer que la série (5) est l'unique série ultrasphérique répondant à la question, il suffit d'appliquer le raisonnement du paragraphe **7** qui nous donne l'expression (36) du coefficient α_n d'une telle série sous la forme suivante :

$$\alpha_n = (n+\lambda)\left\{ \frac{\alpha_0}{2\lambda} - \frac{A''\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} + (-1)^n \left[\frac{\alpha_0}{2\lambda} + \frac{A'\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \right] \right.$$
$$\left. + \frac{(A''-A')\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \frac{P_n^{(\lambda)}(\xi)}{A_n^{(2\lambda-1)}} \right\}.$$

Donc la série ultrasphérique en question se réduit à la somme de trois séries (5), (5^a) et (5^b) :

$$\left[\frac{\alpha_0}{2\lambda} - \frac{A''\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \right] \sum_0^{\infty} (n+\lambda) P_n^{(\lambda)}(x)$$
$$+ \left[\frac{\alpha_0}{2\lambda} + \frac{A'\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \right] \sum_0^{\infty} (-1)^n (n+\lambda) P_n^{(\lambda)}(x)$$
$$+ \frac{(A''-A')\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} \sum_0^{\infty} (n+\lambda) \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(n+2\lambda)} P_n^{(\lambda)}(\xi) P_n^{(\lambda)}(x).$$

Vu que la série doit être sommable (C, $\delta > 0$) à l'intérieur de $(-1, +1)$ quel que soit δ positif, on doit avoir

$$\frac{\alpha_0}{2\lambda} - \frac{A''\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} = \frac{\alpha_0}{2\lambda} + \frac{A'\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)} = 0$$

et l'on aboutit à la série (5),

$$\frac{\alpha_0}{\lambda}\sum_0^\infty (n+\lambda)\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(n+2\lambda)}P_n^\lambda(\xi)P_n^\lambda(x),$$

puisque alors

$$\frac{(A''-A')\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}=\frac{\alpha_0}{\lambda}.$$

Au contraire, si la série ultrasphérique est sommable (C, δ) avec une somme nulle partout à l'intérieur de $(-1, +1)$ *sans exception*, on doit avoir $A' = A''$ et la série se réduit à la somme de deux séries

$$\left[\frac{\alpha_0}{2\lambda}-\frac{A\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\right]\sum_0^\infty (n+\lambda)P_n^\lambda(x)$$
$$+\left[\frac{\alpha_0}{2\lambda}+\frac{A\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\right]\sum_0^\infty (-1)^n(n+\lambda)P_n^\lambda(x),$$

qui ne sont sommables (C, δ) à l'intérieur de $(-1, +1)$ que pour $\delta > \lambda$ et qui se distinguent l'une de l'autre par leur allure aux points frontières $x = \pm 1$. Dans le cas où $\lambda < 1$, notre méthode permet ainsi d'établir l'unicité des séries (5^a) et (5^b), sommables $(C, \delta > \lambda)$ à l'intérieur de $(-1, +1)$. Par exemple, pour $\lambda = \frac{1}{2}$ il n'y a qu'une série de Legendre sommable $\left(C, \delta > \frac{1}{2}\right)$ à l'intérieur de $(-1, +1)$ avec une somme nulle et qui ne diverge pas essentiellement pour $x = -1$; c'est la série

$$(3^a)\qquad \frac{1}{2}+\frac{3}{2}P_1(x)+\frac{5}{2}P_2(x)+\ldots+\left(n+\frac{1}{2}\right)P_n(x)+\ldots;$$

de même il n'y a qu'une série de Legendre sommable $\left(C, \delta > \frac{1}{2}\right)$ à l'intérieur de $(-1, +1)$ avec une somme nulle et qui ne diverge pas essentiellement pour $x = +1$; c'est la série

$$(3^b)\qquad \frac{1}{2}-\frac{3}{2}P_1(x)+\frac{5}{2}P_2(x)+\ldots+(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)P_n(x)+\ldots.$$