

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEMINIANO PIRONDINI

Symétrie tangentielle par rapport à une surface de révolution

Journal de mathématiques pures et appliquées 5^e série, tome 8 (1902), p. 229-251.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1902_5_8_229_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Symétrie tangentielle par rapport à une surface de révolution;

PAR M. GEMINIANO PIRONDINI.

I.

Définitions. Formules fondamentales. — Σ étant une surface de révolution quelconque et A un point de l'espace, on coupe Σ par le plan méridien passant par A. Si du point A on mène une tangente AA_0 à la section méridienne obtenue M, et si on la prolonge d'une longueur $A_0A_1 = AA_0$ au delà du point de contact A_0 , le point A_1 auquel on arrive est le *point correspondant* de A. Le point A a évidemment autant de points correspondants A_1 que la ligne méridienne M a de tangentes issues de A.

Cette construction, appliquée à chaque point d'une figure quelconque, constitue une transformation géométrique remarquable qu'on appelle *symétrie tangentielle par rapport à la surface de révolution Σ (surface fondamentale)*.

Les points de la surface Σ (qu'on suppose de révolution autour de l'axe des z) sont rapportés aux parallèles ($u = \text{const.}$) et à un système de génératrices égales ($v = \text{const.}$). Si $A(x, y, z)$, $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_0(\xi, \eta, \zeta)$ sont trois points correspondants des figures symétriques F, F₁ et de la surface Σ , on a

$$(1) \quad \xi = \rho \cos(u + v), \quad \eta = \rho \sin(u + v), \quad \zeta = \zeta(u),$$

ρ et ζ (fonctions de u) étant les coordonnées d'un point quelconque de la ligne méridienne de Σ .

Les cosinus directeurs des tangentes au parallèle $u = \text{const.}$ et à la génératrice $v = \text{const.}$ sont respectivement proportionnels aux dérivées

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}, \frac{\partial \eta}{\partial v}, \frac{\partial \zeta}{\partial v} \right), \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \eta}{\partial u}, \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right).$$

Conséquemment, les cosinus directeurs de la normale à la surface Σ sont proportionnels aux différences

$$\frac{\partial \eta}{\partial v} \frac{\partial \zeta}{\partial u} - \frac{\partial \zeta}{\partial v} \frac{\partial \eta}{\partial u} = \rho \zeta' \cos(u + v), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial \zeta}{\partial u} = \rho \zeta' \sin(u + v),$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \eta}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial u} = -\rho \rho',$$

et comme les cosinus directeurs de la droite AA_0A_1 sont proportionnels aux différences

$$x - \rho \cos(u + v), \quad y - \rho \sin(u + v), \quad z - \zeta,$$

la condition d'orthogonalité entre la droite AA_0A_1 et la normale de la surface Σ est exprimée par l'équation

$$(2) \quad x \cos(u + v) + y \sin(u + v) = \rho + \frac{(z - \zeta)\rho'}{\zeta'}.$$

La condition que la droite AA_0A_1 rencontre l'axe de la surface Σ est exprimée par la relation

$$(3) \quad x \sin(u + v) - y \cos(u + v) = 0.$$

Si l'on ajoute les équations (2), (3), après les avoir élevées au carré, on trouve que les conditions (2), (3) peuvent être remplacées par les autres

$$(4) \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \rho + \frac{(z - \zeta)\rho'}{\zeta'}.$$

$$(5) \quad \frac{y}{x} = \tan(u + v).$$

En remarquant, enfin, que le point A_0 est le milieu du segment AA_1 ,

on a

$$(6) \quad x_1 = 2\xi - x, \quad y_1 = 2\eta - y, \quad z_1 = 2\zeta - z.$$

Les équations (1), (4), (5), (6) constituent les formules fondamentales de la transformation.

Dans la symétrie des surfaces, u et v sont à regarder comme des paramètres indépendants. Dans la symétrie des lignes, on doit attribuer à v une valeur constante quelconque (préférentiellement $v = 0$).

Quand la figure primitive est une $\left\{ \begin{array}{l} \text{surface } S \\ \text{ligne } L \end{array} \right\}$ la figure symétrique est, en général, une $\left\{ \begin{array}{l} \text{surface } S_1 \\ \text{ligne } L_1 \end{array} \right\}$.

Dans le dernier cas, le lieu des points de contact A_0 entre les droites AA_0A_1 et la surface Σ est une ligne Λ , qu'on peut appeler la *projection tangentielle* de la ligne L sur la surface Σ .

Il s'ensuit qu'on peut se proposer les six questions suivantes :

$$\begin{array}{l} \text{On donne} \left\{ \begin{array}{l} (A) \quad \Sigma \text{ et } S, \\ (B) \quad S \text{ et } S_1, \\ (C) \quad \Sigma \text{ et } L, \\ (D) \quad \Sigma \text{ et } \Lambda, \\ (E) \quad L \text{ et } \Lambda, \\ (F) \quad L \text{ et } L_1, \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{déterminer} \left\{ \begin{array}{l} S_1. \\ \Sigma. \\ \Lambda \text{ et } L_1. \\ L \text{ et } L_1. \\ \Sigma \text{ et } L_1. \\ \Sigma \text{ et } \Lambda. \end{array} \right. \end{array}$$

II.

Résolution des questions (A), (C). — En supposant que la ligne méridienne de Σ soit représentée par l'équation

$$(7) \quad \zeta = \varphi(\rho),$$

la première condition (4) se réduit à

$$(8) \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \rho + \frac{z - \varphi(\rho)}{\varphi'(\rho)}.$$

D'ailleurs, en remplaçant $\sin(u + v)$, $\cos(u + v)$ par les valeurs qu'on déduit de la condition (5), les équations (1) donnent

$$(9) \quad \xi = \frac{\rho x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \eta = \frac{\rho y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \zeta = \varphi(\rho).$$

Les coordonnées x , y , z sont évidemment des fonctions de deux paramètres t , w , ou d'un seul paramètre t , suivant que la figure primitive F est une surface ou une ligne. En ayant recours à la condition (8), on peut éliminer un des trois paramètres ρ , t , w dans le premier cas, et un des deux paramètres ρ , t dans le second cas. Après cela, les équations (6), où ξ , η , ζ ont les valeurs (9), définissent, dans tout cas, la figure F , symétrique de F .

Les équations (9), quand la figure primitive est une ligne L , définissent sa projection tangentielle Λ .

Résolution de la question (D). — La surface Σ est définie par sa ligne méridienne (7). La projection tangentielle Λ est évidemment connue aussitôt que l'on donne sa projection équatoriale Λ_0 :

$$(10) \quad \varphi = \lambda(u).$$

Comme on a, dans ce cas,

$$\operatorname{tang} u = \frac{y}{x},$$

la condition (8) donne

$$z = \varphi \left[\lambda \left(\operatorname{arc tang} \frac{y}{x} \right) \right] + \left[\sqrt{x^2 + y^2} - \lambda \left(\operatorname{arc tang} \frac{y}{x} \right) \right] \varphi' \left[\lambda \left(\operatorname{arc tang} \frac{y}{x} \right) \right].$$

Cette équation représente la surface réglée K , lieu des tangentes aux lignes méridiennes de la surface Σ , le long de la ligne Λ suivant laquelle cette surface est coupée par le cylindre ayant les génératrices parallèles à l'axe de Σ et dont la section droite est la courbe (10).

La question (D) a une infinité de solutions, car les lignes L , L_1 tracées sur la surface K sont assujetties à la seule condition d'être des courbes symétriques par rapport à la ligne Λ .

Résolution de la question (E). — En supposant que la ligne primitive L et la projection tangentielle Λ soient définies respectivement par les équations

$$(11) \quad \begin{aligned} x &= R \cos u, & y &= R \sin u, & z &= z(u), \\ \xi &= \rho \cos u, & \eta &= \rho \sin u, & \zeta &= \zeta(u), \end{aligned}$$

la condition (5) est vérifiée par identité et la condition (4) donne

$$(12) \quad (R - \rho)\zeta' - (z - \zeta)\rho' = 0.$$

Il s'ensuit que les lignes L , Λ ne sont pas complètement arbitraires.

La condition (12) vérifiée, la ligne méridienne de Σ et la ligne symétrique L , sont définies respectivement par les équations

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \rho(u), & \zeta_0 &= \zeta(u), \\ x_1 &= (2\rho - R) \cos u, & y_1 &= (2\rho - R) \sin u, & z_1 &= 2\zeta(u) - z(u). \end{aligned}$$

Cas particulier. — Si l'on suppose successivement

$$(13) \quad z = m\zeta + n, \quad z\zeta = h$$

(m, n, h étant des constantes), l'équation différentielle (12) se réduit respectivement aux autres

$$(14) \quad \begin{cases} (R - \rho)\zeta' - [(m - 1)\zeta + n]\rho' = 0, \\ (R - \rho)\zeta\zeta' - (h - \zeta^2)\rho' = 0, \end{cases}$$

d'où l'on déduit respectivement

$$\begin{aligned} R &= \rho + [(m - 1)\zeta + n] \frac{\rho'}{\zeta'}, & \zeta &= \left(\alpha + n \int \frac{\rho'}{R - \rho} e^{-(m-1) \int \frac{\rho' du}{R - \rho}} du \right) e^{(m-1) \int \frac{\rho' du}{R - \rho}}, \\ R &= \rho + \frac{(h - \zeta^2)\rho'}{\zeta\zeta'}, & \zeta &= e^{-\int \frac{\rho' du}{R - \rho}} \sqrt{\beta + 2h \int \frac{\rho'}{R - \rho} e^{2 \int \frac{\rho' du}{R - \rho}} du} \\ & & & (\alpha, \beta \text{ constantes}). \end{aligned}$$

On voit d'ici que, quand les hauteurs des points correspondants

des lignes L , Λ par rapport au plan coordonné (xy) sont liées par une relation linéaire, ou bien quand le produit de ces hauteurs est une constante, la question (E) peut être résolue complètement en se donnant arbitrairement (en chacun de ces cas) la ligne Λ , ou les projections équatoriales des lignes L , Λ .

Résolution de la question (F). — La ligne primitive L est définie par les équations (11), et la ligne symétrique L_1 par les équations

$$x_1 = R_1 \cos u, \quad y_1 = R_1 \sin u, \quad z_1 = z_1(u).$$

Comme on a évidemment

$$(15) \quad \xi = \frac{R + R_1}{2} \cos u, \quad \eta = \frac{R + R_1}{2} \sin u, \quad \zeta = \frac{z(u) + z_1(u)}{2},$$

il suffit de remplacer ρ et ζ , dans l'équation (12), respectivement par $\frac{R + R_1}{2}$ et $\frac{z + z_1}{2}$, ce qui donne

$$(16) \quad (R - R_1)(z' + z'_1) - (z - z_1)(R' + R'_1) = 0.$$

Les lignes L , L_1 ne peuvent donc pas être choisies d'une façon absolument arbitraire.

La condition (16) vérifiée par un choix convenable des fonctions R , R_1 , z , z_1 , la projection tangentielle Λ est définie par les équations (15), et la ligne méridienne de Σ par les équations

$$\rho = \frac{R + R_1}{2}, \quad \zeta = \frac{z + z_1}{2}.$$

III.

Propriétés remarquables de la transformation. — Si l'on fait tourner la figure constituée par les lignes symétriques L , L_1 et la projection tangentielle Λ autour de l'axe des z , les conditions (4), (5)

sont évidemment vérifiées à chaque instant du mouvement. Par conséquent :

I. Si L, L_1 sont des lignes symétriques par rapport à une surface de révolution Σ , les surfaces S, S_1 engendrées par la rotation de ces lignes autour de l'axe de Σ sont des surfaces symétriques par rapport à Σ .

Si l'on pose $\sqrt{x^2 + y^2} = R$, on voit que les conditions (4), (5) ne changent pas si l'on remplace R, z, ρ, ζ respectivement par les expressions

$$\alpha R + a, \quad \beta z + b, \quad \alpha \rho + a, \quad \beta \zeta + b,$$

ou par les autres

$$\lambda z + l, \quad \mu R + m, \quad \lambda \zeta + l, \quad \mu \rho + n,$$

$\alpha, \beta, \lambda, \mu, a, b, l, m$ étant des constantes arbitraires.

Si l'on remarque alors que

$$R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 2\rho - R, \quad z_1 = 2\zeta - z,$$

on voit que R_1, z_1 sont remplacés par les expressions

$$\alpha R_1 + a, \quad \beta z_1 + b$$

ou par les autres

$$\lambda z_1 + l, \quad \mu R_1 + m.$$

On a donc la propriété générale :

II. Si F_1 est la figure symétrique de F par rapport à la surface de révolution Σ dont la ligne méridienne est $\zeta = \varphi(\rho)$, et F', F'_1 les figures qu'on construit des figures F, F_1 en prenant pour distances R, R_1 de leurs points à l'axe de Σ les expressions

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha R + a, & \alpha R_1 + a \\ \lambda z + l, & \lambda z_1 + l \end{array} \right\}$$

et pour hauteurs z, z_1 de leurs points sur le plan coordonné (xy)

les expressions $\left\{ \begin{array}{l} \beta z + b, \quad \beta z_1 + b \\ \mu R + m, \quad \mu R_1 + m \end{array} \right\}$, F_1 sera la figure symétrique de F' par rapport à la surface de révolution Σ' dont la ligne méridienne est $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\zeta - b}{\beta} = \varphi\left(\frac{\rho - a}{\alpha}\right) \\ \frac{\rho - l}{\lambda} = \varphi\left(\frac{\zeta - m}{\mu}\right) \end{array} \right\}$.

(Quand les figures F, F_1 sont des lignes L, L_1 , la projection tangentielle Λ' de la ligne L' sur la surface de révolution Σ' peut se déduire de la projection tangentielle Λ de la ligne L sur la surface de révolution Σ , en prenant pour rayon vecteur ρ de la projection équatoriale de la ligne et pour hauteur ζ de ses points du plan coordonné (xy) les expressions $\left\{ \begin{array}{l} \alpha\rho + a, \quad \beta\zeta + b \\ \lambda\zeta + l, \quad \mu\rho + m \end{array} \right\}$.

Si l'on fait successivement ($m = 0, n = 0$), $n = 0, m = 1$ dans la première équation (13), on a respectivement

$$\zeta = a e^{-\int \frac{\rho' du}{R - \rho}}, \quad \zeta = b e^{(m-1) \int \frac{\rho' du}{R - \rho}}, \quad \zeta = n \int \frac{\rho' du}{R - \rho},$$

a et b étant des constantes arbitraires.

En désignant par γ une constante, que l'on remplace ζ par $\sqrt{\gamma}\zeta$ dans la deuxième équation (14). Après cela, si l'on identifie l'égalité qu'on va obtenir à la première équation (14), on a les conditions

$$m = 1, \quad \gamma = \frac{2h}{n}.$$

Cette analyse démontre la propriété suivante :

III. Soient Λ et L_1 la projection tangentielle et la courbe symétrique d'une ligne L

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{tracée sur le plan coordonné } (xy) \\ \text{tracée sur le plan coordonné } (xy) \\ \text{de l'espace (les hauteurs } z, \zeta, \text{ vérifiant la relation } z + \zeta = n) \end{array} \right\},$$

par rapport à la surface de révolution Σ dont la ligne méridienne est $\zeta = \varphi(\rho)$.

Si Λ' , L' , L'_1 sont les lignes qu'on déduit des lignes Λ , L , L_1 en prenant, sur les hauteurs relatives aux points de celles-ci, des lon-

$$\text{guezurs} \left\{ \begin{array}{l} c\zeta^{1-m}, cm\zeta^{1-m}, (2-m)c\left(\frac{z_1}{2}\right)^{1-m} \\ n \log\left(\frac{a}{\zeta}\right), n + n \log\left(\frac{a}{\zeta}\right), n \log\left(\frac{za}{z_1}\right) - n \\ \sqrt{\frac{2h\zeta}{n}}, \sqrt{\frac{hn}{2(n-z)}}, \frac{(4z_1+n)\sqrt{h}}{\sqrt{6n(z_1+n)}} \end{array} \right\}, \quad \Lambda', L'_1 \text{ seront}$$

respectivement la projection tangentielle et la ligne symétrique de L' par rapport à la surface de révolution Σ' dont la ligne

$$\text{mériidienne est} \left\{ \begin{array}{l} \zeta = c[\varphi(\rho)]^{1-m} \\ ae^{-\frac{\zeta}{n}} = \varphi(\rho) \\ \frac{n\zeta^2}{2h} = \varphi(\rho) \end{array} \right\}.$$

Le principe I ramène l'étude de la symétrie de deux surfaces de révolution ayant même axe que Σ , à l'étude de la symétrie de leurs lignes méridiennes.

En vertu des principes II et III, à chaque propriété relative à la symétrie tangentielle d'une figure par rapport à une surface de révolution, on en peut associer une autre se déduisant tout de suite de la première, en établissant ainsi une sorte de dualité très féconde dans les applications (voir le § IV).

IV.

Cas particuliers et applications. — 1. Si l'on fait $z = 0$ dans l'équation (8), on a

$$R = \rho - \frac{\varphi(\rho)}{\varphi'(\rho)}.$$

Cette équation définit la ligne L_0 le long de laquelle la surface réglée K (§ II, question D) coupe le plan coordonné (xy) , aussitôt que l'on donne la projection équatoriale de Λ .

En supposant, par exemple, $\varphi(\rho) = \frac{\rho^2}{a}$, il résulte

$$R = \frac{1}{2}\rho,$$

d'où le théorème :

Si l'on mène les tangentes aux lignes méridiennes d'un parabolôïde, le long d'une ligne quelconque Λ , la surface réglée K qu'on engendre coupe le plan coordonné (xy) suivant la ligne L_0 , lieu des milieux des rayons vecteurs qui vont aux points de la projection équatoriale de la ligne Λ .

2. Quand on suppose que les coordonnées ξ, η, ζ sont proportionnelles respectivement aux coordonnées x, y, z , la condition $\frac{\eta}{\xi} = \frac{y}{x}$ nous apprend qu'on doit avoir

$$\xi = \alpha x, \quad \eta = \alpha y, \quad \zeta = \beta z,$$

α et β étant des constantes.

Et, comme on déduit, à l'aide de l'équation (4),

$$z = c R^{\frac{\alpha+1-\beta}{\beta+1-\alpha}}, \quad \xi = c \beta \alpha^{-\frac{\alpha+1-\beta}{\beta+1-\alpha}} \rho^{\frac{\alpha+1-\beta}{\beta+1-\alpha}},$$

$$z_1 = c(2\beta - 1)(2\alpha - 1)^{-\frac{\alpha+1-\beta}{\beta+1-\alpha}} R_1^{\frac{\alpha+1-\beta}{\beta+1-\alpha}},$$

c étant une constante, on a le théorème : *Quand les coordonnées ξ, η, ζ sont proportionnelles aux x, y, z , les coordonnées x_1, y_1, z_1 sont aussi proportionnelles aux x, y, z . Les lignes L, Λ, L_1 sont tracées sur des surfaces de révolution S, Σ, S_1 ayant pour lignes méridiennes des paraboles générales du même ordre.*

Celles-ci se réduisent à des paraboles ordinaires pour $\beta = \frac{\alpha}{2-\alpha}$, à des hyperboles équilatères pour $\beta = -\frac{\alpha}{1+\alpha}$, etc.

3. En posant $\sqrt{x^2 + y^2} = R$, et en supposant que la ligne primitive L soit placée sur une surface de révolution s ayant pour méridienne la ligne

$$(17) \quad z = F(R),$$

la condition (8) donne

$$(18) \quad R \varphi'(R) - F(R) = \rho \varphi'(\rho) - \varphi(\rho).$$

Si donc les rayons vecteurs ρ , R sont liés par une des relations

$$(19) \quad \rho = \psi(R),$$

$$(20) \quad R = \chi(\rho),$$

l'équation (18) se réduit respectivement à

$$(21) \quad \begin{aligned} F(R) &= [R - \psi(R)]\varphi'[\psi(R)] + \varphi[\psi(R)], \\ [\chi(\rho) - \rho]\varphi'(\rho) + \varphi(\rho) &= F[\chi(\rho)]. \end{aligned}$$

Celle-ci donne par intégration

$$(22) \quad \varphi(\rho) = \left\{ \int \frac{F[\chi(\rho)]}{\chi(\rho) - \rho} e^{\int \frac{d\rho}{\chi(\rho) - \rho}} d\rho + c \right\} e^{-\int \frac{d\rho}{\chi(\rho) - \rho}},$$

c étant une constante arbitraire. On reconnaît d'ici que :

Quand on donne d'une façon arbitraire :

- α . les lignes méridiennes (7), (17) des surfaces de révolution Σ , S ;
- β . la ligne méridienne (7) de la surface fondamentale Σ et la relation (19) entre les rayons vecteurs ρ , R ;
- γ . la ligne méridienne (17) de la surface de révolution S et la relation (20) entre les rayons vecteurs ρ , R ;

les équations (18), (21), (22) donnent respectivement :

- α . la relation entre les rayons vecteurs ρ , R ;
- β . la ligne méridienne de la surface de révolution S ;
- γ . la ligne méridienne de la surface fondamentale Σ .

Exemples. — 1° En supposant que Σ et S soient deux paraboloïdes, on a

$$\varphi(\rho) = \frac{\rho^2}{a}, \quad F(R) = \frac{R^2}{b}$$

et la relation (18) donne

$$\frac{R}{\rho} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ab}}{a}.$$

Si, *vice versa*, on suppose

$$\varphi(\rho) = \frac{\rho^2}{a}, \quad \rho = kR,$$

la relation (21) donne

$$F(R) = k(2 - k) \frac{R^2}{a}.$$

D'où le théorème :

Quand la surface fondamentale Σ est un paraboloides, la condition nécessaire et suffisante pour que la ligne primitive L soit tracée sur un autre paraboloides est que les projections équatoriales des lignes L , Λ soient des courbes homothétiques par rapport à l'origine; et la ligne symétrique L_1 est placée sur un autre paraboloides.

2° Que l'on suppose

$$F(R) = 0, \quad \gamma(\rho) = \frac{\rho}{k}$$

dans l'équation (22). On en déduit

$$(23) \quad \zeta = \varphi(\rho) = c\rho^{\frac{k}{k-1}}.$$

Et comme

$$R_1 = 2\rho - R = \frac{2k-1}{k} \rho, \quad z_1 = 2\zeta,$$

et conséquemment

$$(24) \quad z_1 = 2c \left(\frac{k}{2k-1} R_1 \right)^{\frac{k}{k-1}},$$

on conclut :

Si la ligne primitive L , placée sur le plan coordonné (xy) , et la projection équatoriale Λ_0 de Λ sont des courbes homothétiques par rapport à l'origine $\left(\frac{\rho}{R} = k\right)$, la surface fondamentale Σ et la surface de révolution S_1 engendrée par la ligne symétrique L_1 ont pour lignes méridiennes les paraboles générales (23), (24).

En particulier, ce théorème est applicable :

Quand la ligne primitive L est une droite du plan $z = 0$, et la projection tangentielle Λ est sur un plan parallèle à la droite L et à l'axe de la surface Σ ;

Quand la ligne primitive L est un cercle du plan $z = 0$, et la projection tangentielle Λ est sur un cylindre circulaire, avec la condition que le centre de similitude entre la section droite de ce cylindre et le cercle L soit à l'origine, etc.

Pour $k = 2$, les courbes (23), (24) sont des paraboles ordinaires; pour $k = \frac{1}{2}$, elles sont des hyperboles équilatères rapportées aux asymptotes, etc.

3° En supposant

$$F(R) = 0, \quad \chi(\rho) = \frac{a^2}{\rho},$$

l'équation (22) donne

$$(25) \quad \varphi(\rho) = \sqrt{\alpha(\rho^2 - a^2)}.$$

Si l'on suppose, *vice versa*, que la fonction $\varphi(\rho)$ soit donnée par l'équation (25), et que, en outre, la fonction $F(R)$ se réduise à zéro, l'équation (18) donne

$$R\rho = a^2.$$

Il s'ensuit que la condition nécessaire et suffisante pour que la ligne primitive L , tracée sur le plan coordonné (xy) , et la projection équatoriale Λ_0 de Λ soient des courbes inverses par rapport à l'origine, est que Σ soit une surface du deuxième ordre ayant son centre à l'origine.

En particulier : Une droite ou un cercle, placés dans le plan de l'équateur d'une surface de révolution du deuxième ordre à centre, ont pour projection tangentielle, sur cette surface, une ligne Λ dont la projection équatoriale Λ_0 est un cercle.

4° Quand $F(R) = 0$, on trouve que la condition

$$\chi(\rho) = \rho - a$$

équivalent à l'autre

$$\varphi(\rho) = c\rho^{\frac{p}{q}}.$$

On en conclut que *la condition nécessaire et suffisante pour que la ligne primitive L, placée sur le plan coordonné (xy), soit une conchoïde de la projection équatoriale Λ_0 de la ligne $\Lambda(R = \rho - a)$, est que la ligne méridienne de la surface fondamentale Σ soit la courbe logarithmique $\zeta = ce^{\frac{\rho}{a}}$.*

5° En supposant successivement

$$\left[F(R) = R \cot \theta, \chi(\rho) = \frac{a^2}{\rho} \right], \quad \left[F(R) = R \cot \theta, \chi(\rho) = \frac{\rho}{a} \right],$$

θ, a , étant des constantes, on trouve, à l'aide de l'équation (22),

$$\varphi(\rho) = \rho \cot \theta + \sqrt{m(\rho^2 - a^2)}, \quad \varphi(\rho) = \rho \cot \theta + m\rho^{\frac{k}{k-1}},$$

m étant une constante.

On a donc le théorème : *Quand la ligne primitive L est placée sur un cône de révolution et les projections équatoriales des lignes L, Λ sont des courbes inverses ($R\rho = a^2$), ou des courbes homothétiques ($\frac{\rho}{R} = k$), par rapport à l'origine, la surface de révolution fondamentale Σ a pour ligne méridienne respectivement la conique*

$$(\cot^2 \theta - m)\rho^2 - 2\cot \theta \rho \zeta + \zeta^2 + a^2 m = 0,$$

ou la parabole générale

$$\zeta = \rho \cot \theta + m\rho^{\frac{k}{k-1}},$$

θ étant le demi-angle au sommet du cône.

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ le cône contenant L se réduit au plan coordonné (xy) et l'on tombe sur des résultats trouvés précédemment. (Exemples 2° et 3°.)

Quand la parabole générale se réduit à une conique, elle est nécessairement une parabole ($k = 2$), ou une hyperbole ($k = \frac{1}{2}$).

4. Le plan coordonné (xy) peut être considéré comme une surface de révolution dont la ligne méridienne est l'axe des x .

Dans cette hypothèse, la condition (8) donne

$$x = \rho - \frac{\varphi(\rho)}{\varphi'(\rho)},$$

d'où, en vertu des équations (6),

$$x_1 = \rho + \frac{\varphi(\rho)}{\varphi'(\rho)}, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 2\varphi(\rho).$$

Si donc on a recours au principe I, on a : *La surface symétrique du plan coordonné (xy) par rapport à la surface de révolution dont la ligne méridienne est la courbe (γ) , est la surface de révolution dont la ligne méridienne est définie par les équations*

$$(26) \quad x_{10} = \rho + \frac{\varphi(\rho)}{\varphi'(\rho)}, \quad z_{10} = 2\varphi(\rho).$$

Exemples. — 1° En supposant $\varphi(\rho) = \frac{\rho^2}{\alpha}$, on déduit

$$z_{10} = \frac{8}{9} \frac{x_{10}^2}{\alpha}.$$

Donc : *La surface symétrique du plan tangent au sommet d'un parabolôide de révolution, par rapport à cette surface, est un autre parabolôide.*

2° Si l'on suppose $z_{10} = x_{10} \cot \theta$, θ étant une constante, les équations (26) donnent

$$[\rho \varphi(\rho)]' \cot \theta = 2\varphi(\rho) \varphi'(\rho),$$

et comme on déduit de là, par intégration,

$$\varphi^2(\rho) - \cot \theta \rho \varphi(\rho) + c = 0,$$

c étant une constante, on a : *La surface de révolution Σ , par rapport à laquelle le plan coordonné (xy) a pour surface symétrique*

un cône de révolution dont le sommet est à l'origine, a pour ligne méridienne l'hyperbole

$$\xi^2 - \cot \theta \zeta \rho + c = 0.$$

5. Si l'on a recours à la transformation donnée par le principe II du § III, quand on y suppose $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1, \beta = 1, b = 0, \\ \lambda = 1, l = 0, \mu = 1, m = 0 \end{array} \right\}$, le théorème de l'application 3 conduit immédiatement à un autre théorème qui se déduit de celui-ci en remplaçant $\left\{ \begin{array}{l} R, \rho \\ R, \rho, z, \zeta \end{array} \right\}$ respectivement par $\left\{ \begin{array}{l} R + a, \rho + a \\ z, \zeta, R, \rho \end{array} \right\}$.

Ainsi, par exemple, le théorème de l'exemple 1^o dans l'application 3, en vertu de la première transformation qu'on vient d'indiquer, donne :

Quand la surface fondamentale Σ a pour ligne méridienne une parabole dont l'axe est parallèle à l'axe de la surface, la condition nécessaire et suffisante pour que la ligne primitive L soit placée sur une surface de révolution S de la même nature que Σ , est que les rayons vecteurs ρ, R soient liés par une relation linéaire. La ligne symétrique L, est tracée sur une surface de révolution S, de la même nature que Σ et S.

6. Appliquons le principe III du § III aux théorèmes des exemples 2^o, 3^o de l'application 3, et ensuite appliquons aux théorèmes que l'on déduit le principe II, en y supposant $\lambda = 1, l = 0, \mu = 1, m = 0$.

On parvient ainsi aux propriétés suivantes :

Si les $\left\{ \begin{array}{l} \text{projections équatoriales} \\ \text{hauteurs } z, \zeta \text{ relatives aux points} \end{array} \right\}$ des lignes L, Λ
sont $\left\{ \begin{array}{l} \text{des courbes homothétiques par rapport à l'origine } \left(\frac{\rho}{R} = k \right) \\ \text{proportionnelles } \left(\frac{\zeta}{z} = k \right) \end{array} \right\}$
et si les $\left\{ \begin{array}{l} \text{hauteurs } \zeta, z \text{ relatives aux points} \\ \text{rayons vecteurs } \rho, R \text{ des projections équatoriales} \end{array} \right\}$ des

lignes Λ , L sont $\left\{ \begin{array}{l} \text{liées} \\ \text{liés} \end{array} \right\}$ par la relation $\left\{ \begin{array}{l} z = c(1-m)\zeta^m \\ R = c(1-m)\rho^m \end{array} \right\}$ (c, m étant des constantes, la surface fondamentale Σ et la surface de révolution S , engendrée par la ligne symétrique L , ont pour lignes méridiennes les paraboles générales

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta = c^{1-m} \rho^{\frac{km}{k-1}}; \quad z_1 = (1-m)c^{1-m} \left(\frac{k}{2k-1} R_1 \right)^{\frac{km}{k-1}} \\ \rho = c^{1-m} \zeta^{\frac{k-1}{km}}; \quad R_1 = (1-m)c^{1-m} \left(\frac{k}{2k-1} z_1 \right)^{\frac{km}{k-1}} \end{array} \right\}.$$

Quand $\left\{ \begin{array}{l} \text{les hauteurs } \zeta, z \text{ relatives aux points} \\ \text{les rayons vecteurs } \rho, R \text{ des projections équatoriales} \end{array} \right\}$ des lignes Λ, L sont $\left\{ \begin{array}{l} \text{liées} \\ \text{liés} \end{array} \right\}$ par la relation $\left\{ \begin{array}{l} z = c(1-m)\zeta^m \\ R = c(1-m)\rho^m \end{array} \right\}$, la condition nécessaire et suffisante pour que $\left\{ \begin{array}{l} \text{les projections équatoriales} \\ \text{les hauteurs } \zeta, z \text{ relatives aux points} \end{array} \right\}$ des lignes Λ, L soient des courbes inverses par rapport à l'origine ($R\rho = a^2$) $\left\{ \begin{array}{l} \text{des lignes } \Lambda, L \text{ soient des courbes inverses par rapport à l'origine} \\ \text{donnent un produit constant} \end{array} \right\}$ est que la surface fondamentale Σ ($z\zeta = a^2$) ait pour méridienne la ligne $\left\{ \begin{array}{l} \zeta = h(\sqrt{\rho^2 - a^2})^m \\ \rho = h(\sqrt{\zeta^2 - a^2})^m \end{array} \right\}$, h étant une constante.

V.

Résolution de la question (B). — S'il s'agit de deux surfaces de révolution S, S_1 ayant pour axes l'axe des z , le principe I du § III ramène la question (B) à la question (F), en remplaçant les surfaces S, S_1 par leurs lignes méridiennes L, L_1 .

Dans le cas général, en désignant par φ l'angle qu'un plan tournant autour de l'axe des z fait avec le plan coordonné (xz), et par u un paramètre arbitraire indépendant de φ , on peut représenter les surfaces S, S_1 respectivement par les équations :

$$(27) \quad x = F(u, \varphi) \cos \varphi, \quad y = F(u, \varphi) \sin \varphi, \quad z = \Phi(u, \varphi),$$

$$(28) \quad x_1 = f(t, \varphi) \cos \varphi, \quad y_1 = f(t, \varphi) \sin \varphi, \quad z_1 = \varphi(t, \varphi),$$

t étant un paramètre indépendant de v et fonction de u , et F, Φ, f, φ désignant des fonctions arbitraires.

Comme il résulte

$$(29) \quad \begin{cases} \xi = \frac{F(u, v) + f(t, v)}{2} \cos v, \\ \eta = \frac{F(u, v) + f(t, v)}{2} \sin v, \\ \zeta = \frac{\Phi(u, v) + \varphi(t, v)}{2}, \end{cases}$$

la condition

$$\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{\eta}{\xi}$$

(exprimant que les points correspondants de surfaces S, S_1, Σ sont sur des droites coupant l'axe des z) est vérifiée par identité.

Quant à la condition (4), en remarquant que

$$\rho = \frac{F(u, v) + f(t, v)}{2}, \quad \zeta = \frac{\Phi(u, v) + \varphi(t, v)}{2},$$

elle se réduit à l'autre

$$(30) \quad (F - f) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{dt}{du} \right) = (\Phi - \varphi) \left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{du} \right).$$

Il faut, en outre, exprimer que le lieu des milieux des droites qui joignent les couples de points correspondants des surfaces S, S_1 est une surface de révolution Σ ayant pour axe l'axe des z . Cette condition donne lieu aux relations suivantes :

$$(31) \quad \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0.$$

On voit d'ici que les surfaces (27), (28) ne peuvent pas être choisies d'une façon arbitraire.

Les conditions (30), (31) vérifiées par un choix convenable des fonctions F, Φ, f, φ et du paramètre t , la surface fondamentale Σ est définie par les équations (29).

Exemple. — En supposant que la surface S soit un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z , on a

$$F = \text{fonction de } v = V,$$

et comme $F + f$ et $\Phi + \varphi$ doivent être des fonctions de u [à cause des conditions (31)], on doit avoir

$$f = U - V, \quad \varphi = U_1 - \Phi(u, v),$$

U et U_1 étant des fonctions de u .

Quant à la condition (30), elle donne

$$\Phi(u, v) = \frac{U'_1}{U'} V - \frac{UU'_1 - U_1U'}{2U'}.$$

On a donc les équations

$$(32) \quad x = V \cos v, \quad y = V \sin v, \quad z = \frac{U'_1}{U'} - \frac{UU'_1 - U_1U'}{2U'},$$

$$(33) \quad x_1 = (U - V) \cos v, \quad y_1 = (U - V) \sin v, \quad z_1 = -\frac{U'_1}{U'} V + \frac{UU'_1 + U_1U'}{2U'},$$

$$\xi = \frac{U}{2} \cos v, \quad \eta = \frac{U}{2} \sin v, \quad \zeta = \frac{U_1}{2}.$$

Celles-ci démontrent le théorème : *Les équations (33) (dans lesquelles U, U_1 sont des fonctions arbitraires de u) représentent la famille complète de surfaces qu'on peut regarder comme des surfaces symétriques du cylindre arbitraire (32). La surface fondamentale Σ a pour ligne méridienne la courbe*

$$\rho = \frac{U}{2}, \quad \zeta = \frac{U_1}{2}.$$

En particulier, si l'on suppose

$$V = \frac{m}{\cos v}, \quad U = 2u, \quad U_1 = \frac{2u^2}{n}$$

(m et n étant des constantes) dans les équations (32), (33) et ensuite on élimine les paramètres u , v , on a : *Entre les surfaces S_1 symétriques du plan $x = m$ il y a la surface du quatrième ordre*

$$4nx_1^2z_1 = (x_1^2 + y_1^2)(3x_1^2 + 2mx_1 - m^2).$$

La surface fondamentale Σ est le paraboloidé ayant pour ligne méridienne la parabole

$$\zeta = \frac{\rho^2}{n}.$$

Dans la résolution de la question B, on peut appliquer les principes démontrés au § III, en déduisant ainsi des propriétés remarquables, relatives à la symétrie des surfaces, sans aucun développement de calcul.

Nous nous bornons aux exemples qu'on déduit en appliquant au dernier cas particulier le principe II, en y supposant successivement

$$(\lambda = 1, l = 0, \mu = 1, m = 0), \quad (z = 1, \beta = 1, b = 0).$$

On trouve respectivement

$$\left\{ \begin{array}{lll} x = \left(\frac{2mu}{n \cos v} - \frac{u^2}{n} \right) \cos v, & y = \left(\frac{2mu}{n \cos v} - \frac{u^2}{n} \right) \sin v, & z = \frac{m}{\cos v}, \\ x_1 = \left(\frac{3u^2}{n} - \frac{2mu}{n \cos v} \right) \cos v, & y_1 = \left(\frac{3u^2}{n} - \frac{2mu}{n \cos v} \right) \sin v, & z_1 = 2u - \frac{m}{\cos v}, \\ x = \left(\frac{m}{\cos v} + h \right) \cos v, & y = \left(\frac{m}{\cos v} + h \right) \sin v, & z = \frac{2mu}{n \cos v} - \frac{u^2}{n}, \\ x_1 = \left(2u - \frac{m}{\cos v} + h \right) \cos v, & y_1 = \left(2u - \frac{m}{\cos v} + h \right) \sin v, & z_1 = \frac{3u^2}{n} - \frac{2mu}{n \cos v}. \end{array} \right.$$

En éliminant u et v entre les deux couples d'équations, on a les théorèmes :

Entre les surfaces S_1 symétriques $\left\{ \begin{array}{l} \text{de la surface du quatrième} \\ \text{ordre } x^2 z^2 = m^2(x^2 + y^2) \\ \text{du cylindre dont la section} \end{array} \right.$
droite est la conchoïde de Nicomède $R = \frac{m}{\cos v} + h \left. \vphantom{\left\{ \begin{array}{l} \text{de la surface du quatrième} \right.}} \right\}$, *il y a la sur-*

face du huitième ordre

$$\left\{ \begin{aligned} 4x_1^2(2nx_1 - mz_1)^2(x_1^2 + y_1^2) &= [3x_1^2z_1^2 - m^2(x_1^2 + y_1^2)]^2 \\ 4h^2(3x_1 + m)^2(x_1^2 + y_1^2)x_1^2 &= [(3x_1^2 + 2mx_1 - m^2)(x_1^2 + y_1^2) + 3h^2x_1^2 - 4nx_1^2z_1]^2 \end{aligned} \right\}.$$

La surface fondamentale Σ a pour ligne méridienne la parabole

$$\left\{ \begin{aligned} \rho &= \frac{\zeta^2}{n} \\ \zeta &= \frac{(\rho + h)^2}{n} \end{aligned} \right\}.$$

VI.

Un lieu géométrique remarquable. — Soit $L(x, y, z)$ une ligne fixe et Σ une surface de révolution à laquelle on donne un mouvement de translation suivant la direction de son axe. Pour chaque position de Σ , on construit la ligne L_1 symétrique de L .

Lieu des lignes L_1 .

Soit $A(\xi, \eta, \zeta)$ la projection tangentielle de L sur la surface Σ , à un instant quelconque du mouvement. Si la ligne méridienne de Σ est la courbe (7), on a

$$\xi = \rho \cos u, \quad \eta = \rho \sin u, \quad \zeta = \varphi(\rho) + \theta,$$

ρ étant une fonction de u et θ un paramètre indépendant de u .

Comme, en appliquant les conditions (4), (5), on déduit

$$0 = z - \varphi(\rho) + (\rho - \sqrt{x^2 + y^2})\varphi'(\rho), \quad \frac{y}{x} = \tan u,$$

les équations (6) nous apprennent que le lieu des lignes symétriques L_1 est la surface S_1 définie par les équations

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{(2\rho - \sqrt{x^2 + y^2})x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ y_1 &= \frac{(2\rho - \sqrt{x^2 + y^2})y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ z_1 &= 2(\rho - \sqrt{x^2 + y^2})\varphi'(\rho) + z. \end{aligned} \right.$$

Cas particulier. — Si l'on suppose

$$x = a \cos \left(\frac{t}{a} \right), \quad y = a \sin \left(\frac{t}{a} \right), \quad z = \psi(t),$$

a étant une constante et $\psi(t)$ une fonction arbitraire de t , les équations (34) se réduisent aux autres :

$$(35) \quad \begin{cases} x_1 = (2\rho - a) \cos \left(\frac{t}{a} \right), \\ y_1 = (2\rho - a) \sin \left(\frac{t}{a} \right), \\ z_1 = 2(\rho - a)\varphi'(\rho) + \psi(t). \end{cases}$$

On en conclut :

Quand la ligne L est donnée d'une façon arbitraire sur un cylindre circulaire de rayon a , le lieu des lignes symétriques L_1 est la surface S_1 engendrée par la ligne plane invariable

$$(36) \quad z_0 = (x_0 - a)\varphi' \left(\frac{x_0 + a}{2} \right),$$

dont le plan est doué d'une translation dans la direction de l'axe des z et d'une rotation autour de cet axe, avec la condition que le rapport de la vitesse de translation à celle de rotation soit $a\psi'(t)$.

L'équation (36) fournit la ligne génératrice de la surface S_1 quand on donne la surface de révolution Σ .

Ainsi, par exemple, *quand la surface mobile Σ est un parabolôïde, la ligne génératrice de la surface S_1 est une parabole égale à la ligne méridienne de Σ , ayant pour axe l'axe des z .*

Mais si l'on pose

$$(37) \quad z_0 = \lambda(x_0),$$

on déduit de l'égalité (36)

$$(38) \quad \zeta = \frac{1}{2} \int \frac{\lambda(2\rho - a)}{\rho - a} d\rho.$$

L'équation (38) démontre que *par un choix convenable de la surface mobile Σ on peut faire en sorte que la génératrice de la surface S , soit une courbe (37) donnée arbitrairement d'avance.*

Pour que le rapport des vitesses de translation et de rotation soit une constante, il faut et il suffit que $\psi(t)$ soit une fonction linéaire de t . Il s'ensuit que, *quand la ligne fixe L est tracée sur un cylindre circulaire, la condition nécessaire et suffisante pour que la surface S , lieu des lignes symétriques L_1 , soit un hélicoïde est que la ligne L soit une hélice.*

Si l'on suppose $\psi(t) = 0$ dans les équations (32), on a ce résultat :

Quand la ligne fixe L est un cercle du plan (xy) ayant son centre à l'origine, le lieu des lignes symétriques L_1 est la surface de révolution ayant pour ligne méridienne la courbe (36).

