JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. DUHEM

**Sur la stabilité d'un navire qui porte du lest liquide**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série*, tome 2 (1896), p. 23-40.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1896_5_2__23_0>

# *Sur la stabilité d'un navire qui porte du lest liquide;*

PAR M. P. DUHEM.

## Introduction.

A la surface de séparation $S_{12}$ de deux fluides quelconques, 1 et 2, soumis à des forces quelconques, flotte un corps solide 3. Ce corps porte du lest liquide qui y peut être contenu de deux manières :

Tantôt (*fig.* 1), une cavité entièrement close contient deux fluides,

Fig. 1.

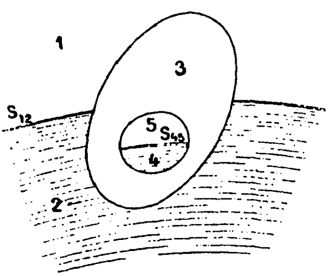
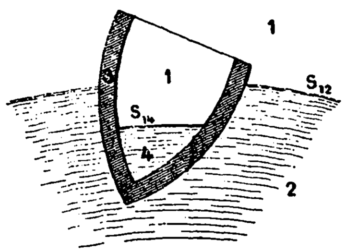



Fig. 2.




4 et 5, superposés suivant une surface $S_{45}$, par exemple un liquide et de l'air; tantôt (*fig.* 2) une cavité, librement ouverte dans le fluide 1, renferme une certaine quantité du liquide 4.

Ces deux cas diffèrent à peine au point de vue de la Mécanique, et il sera assurément suffisant de traiter l'un d'eux, le second par exemple; les résultats obtenus s'étendront sans peine au premier.

L'établissement des conditions d'équilibre d'un flotteur qui porte du lest liquide n'offre rien qui soit difficile, ni rien qui soit nouveau. Nous pourrons donc regarder cette question comme résolue et la passer sous silence.

Imaginons que le flotteur et le lest liquide qui y est contenu aient pris leur état d'équilibre; solidifions le lest liquide; il formera, avec le vaisseau qui le porte, un flotteur entièrement solide dont la stabilité pourra être étudiée par les méthodes que nous avons discutées ailleurs. Les conditions de stabilité ainsi obtenues ne sont pas celles qu'il convient de réaliser pour assurer la stabilité du vaisseau portant du lest supposé liquide; le problème qui va nous occuper consiste à rechercher en quoi les secondes conditions diffèrent des premières.

Cette importante question ne paraît pas avoir sollicité les efforts des mécaniciens, jusqu'en 1881, époque où M. Guyou publia, d'abord dans le cours autographié de l'École Navale, puis dans la *Revue maritime*, une étude sur la *Théorie de la variation de la stabilité, ou de la stabilité différentielle*. Cette étude, exposée de nouveau par son auteur dans sa *Théorie du navire* (Paris, 1887), renfermait un important théorème qui résout, pour un cas très particulier, il est vrai, le problème qui nous occupe.

Nous nous proposons, dans le présent travail, d'étudier ce problème d'une manière entièrement générale, en faisant usage des méthodes et des formules qui nous ont servi (¹) à étudier la stabilité d'un flotteur ne contenant pas de liquide (²).

---

(¹) *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5ᵉ série, t. I, p. 91; 1895).

(²) Dans notre précédent Mémoire, nous avions élevé quelques objections contre la théorie de la stabilité des corps flottants donnée par M. Guyou; en réalité, la démonstration de M. Guyou évite ces objections parce que :

1° La translation verticale d'un corps immergé dans un liquide que termine une surface plane élève le centre de gravité du système tant que le poids du liquide déplacé diffère du poids du flotteur, *et cela quelle que soit l'orientation du solide*.

2° La dénivellation du liquide élève le centre de gravité du système, *quelle que soit la position du flotteur*.

Ces deux remarques entraînent l'égalité à zéro des termes dont la présence justifierait, en général, notre objection.

## I. — Stabilité d'un flotteur portant du lest liquide et soumis à des forces extérieures quelconques.

Nous nous supposerons placés dans le cas auquel correspond la *fig.* 2. En conservant alors des notations semblables de tout point à celles dont nous avons fait usage dans notre travail *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*, nous établirons la proposition suivante :

*Un flotteur solide* 3, *portant du lest liquide* 4, *flotte à la surface de séparation de deux fluides* 1 *et* 2 *que limite une surface close, d'étendue finie, invariable de position et de forme. Pour que l'équilibre d'un tel système soit stable, il faut et il suffit que l'on ait, pour tout déplacement virtuel du système, l'inégalité*

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2 dv_1 + \int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2)^2 dv_2 + \int_4 \frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2}(\delta\rho_4)^2 dv_4\\
&\quad + \int_{S_{12}} \rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx + \frac{\partial V}{\partial y}Dy + \frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1 dS_{12}\\
&\quad + \int_{S_{12}} \rho_2\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx + \frac{\partial V}{\partial y}Dy + \frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_2 dS_{12}\\
&\quad + \int_{S_{14}} \rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx + \frac{\partial V}{\partial y}Dy + \frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1 dS_{14}\\
&\quad + \int_{S_{14}} \rho_4\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx + \frac{\partial V}{\partial y}Dy + \frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_4 dS_{14}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + R > 0.
\end{aligned}\right.$$

R est une forme quadratique des six variables $\delta f$, $\delta g$, $\delta h$, $\delta l$, $\delta m$, $\delta n$ :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
R = {} & B_{11}(\delta f)^2 + B_{22}(\delta g)^2 + B_{33}(\delta h)^2\\
& + B_{44}(\delta l)^2 + B_{55}(\delta m)^2 + B_{66}(\delta n)^2\\
& + B_{23}\,\delta g\,\delta h + B_{31}\,\delta h\,\delta f + B_{12}\,\delta f\,\delta g\\
& + B_{56}\,\delta m\,\delta n + B_{64}\,\delta n\,\delta l + B_{45}\,\delta l\,\delta m\\
& + B_{15}\,\delta f\,\delta m + B_{16}\,\delta f\,\delta n\\
& + B_{26}\,\delta g\,\delta n + B_{24}\,\delta g\,\delta l\\
& + B_{34}\,\delta h\,\delta l + B_{35}\,\delta h\,\delta m.
\end{aligned}\right.$$

Les coefficients $B_{ij}$ ont des formes analogues à celles des coefficients $A_{ij}$ considérés dans notre Mémoire *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*, mais plus compliquées. Tandis que l'on avait, par exemple,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} A_{11} = &-\int_{S_{13}} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N,x)\,dS_{13} \\ &-\int_{S_{23}} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N,x)\,dS_{23} + \int_3 \rho_3 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,dv_3, \end{aligned}\right.$$

on aura

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} B_{11} = &-\int_{S_{13}} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N,x)\,dS_{13} - \int_{S_{23}} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N,x)\,dS_{23} \\ &-\int_{S_{34}} \rho_4 \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N,x)\,dS_{34} + \int_3 \rho_3 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,dv_3. \end{aligned}\right.$$

On aperçoit aisément, sur cet exemple, comment chacun des coefficients $B_{ij}$ se déduit du coefficient $A_{ij}$ correspondant.

On peut imaginer des déplacements virtuels qui laissent invariable la densité du fluide qui remplit chacun des éléments de volume du système; seulement, en exprimant que la masse de chacun des trois fluides doit demeurer invariable, on trouve que de semblables déplacements sont assujettis aux conditions suivantes :

$$\int_{S_{12}} \rho_1 \varepsilon_1\,dS_{12} + \int_{S_{13}} \rho_1 \varepsilon_1\,dS_{13} + \int_{S_{14}} \rho_1 \varepsilon_1\,dS_{14} = 0,$$

$$\int_{S_{12}} \rho_2 \varepsilon_2\,dS_{12} + \int_{S_{23}} \rho_2 \varepsilon_2\,dS_{23} = 0,$$

$$\int_{S_{14}} \rho_4 \varepsilon_4\,dS_{14} + \int_{S_{34}} \rho_4 \varepsilon_4\,dS_{34} = 0.$$

Si l'on remarque que, le long de la surface $S_{12}$, les densités $\rho_1$, $\rho_2$ ont des valeurs constantes $r_1$, $r_2$; que, le long de la surface $S_{14}$, les densités $\rho_1$, $\rho_4$ ont des valeurs constantes $r'_1$, $r_4$, les conditions précédentes peuvent s'écrire

$$
(5)\qquad \begin{cases}
r_1 \int_{S_{12}} \varepsilon_1\, dS_{12} + r'_1 \int_{S_{14}} \varepsilon_1\, dS_{14} + \int_{S_{13}} \rho_1 \varepsilon_1\, dS_{13} = 0, \\
r_2 \int_{S_{12}} \varepsilon_2\, dS_{12} + \int_{S_{23}} \rho_2 \varepsilon_2\, dS_{23} = 0, \\
r_4 \int_{S_{14}} \varepsilon_4\, dS_{14} + r_2 \int_{S_{34}} \rho_4 \varepsilon_4\, dS_{34} = 0.
\end{cases}
$$

On peut même assujettir un tel déplacement à ne pas déformer ni déplacer les surfaces de séparation $S_{12}$, $S_{14}$ des divers fluides. Dans ce cas, les conditions (5) deviennent

$$
(6)\qquad \begin{cases}
\int_{S_{13}} \rho_1 \varepsilon_1\, dS_{13} = 0, \\
\int_{S_{23}} \rho_2 \varepsilon_2\, dS_{23} = 0, \\
\int_{S_{34}} \rho_4 \varepsilon_4\, dS_{34} = 0.
\end{cases}
$$

En vertu de l'égalité (11) de notre Mémoire *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*, ces trois conditions (6) deviennent trois relations linéaires et homogènes entre les six variations $\delta f$, $\delta g$, $\delta h$, $\delta l$, $\delta m$, $\delta n$. Voici la première de ces relations :

$$
(7)\qquad \begin{cases}
\delta f \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N, x)\, dS_{13} + \delta g \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N, y)\, dS_{13} \\
\qquad\qquad + \delta h \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N, z)\, dS_{13} \\
+ \delta l \int_{S_{13}} \rho_1 [y \cos(N, z) - z \cos(N, y)]\, dS_{13} \\
+ \delta m \int_{S_{13}} \rho_1 [z \cos(N, x) - x \cos(N, z)]\, dS_{13} \\
+ \delta n \int_{S_{13}} \rho_1 [x \cos(N, y) - y \cos(N, x)]\, dS_{13} = 0.
\end{cases}
$$

Les deux autres se déduisent de celle-là en remplaçant l'indice 1 soit par l'indice 2, soit par l'indice 4. Nous les désignerons par (7 *bis*) et (7 *ter*).

En raisonnant comme nous l'avons fait au Chapitre III, § II de notre Mémoire *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*, nous obtiendrons sans peine les conditions suivantes pour la stabilité d'un flotteur qui porte du lest liquide :

I. Conditions nécessaires, mais peut-être insuffisantes. — 1° *La force extérieure n'est pas nulle en tous les points d'une aire d'étendue finie, prise sur la surface de contact de deux fluides appartenant au système; en tout point d'une telle surface où elle est différente de zéro, elle est dirigée vers l'intérieur du plus dense des deux fluides.*

2° *La forme* R *est une forme définie positive lorsqu'on suppose les six variables* $\delta f$, $\delta g$, $\delta h$, $\delta l$, $\delta m$, $\delta n$, *liées par les trois relations* (7), (7 *bis*), (7 *ter*).

II. Conditions suffisantes, mais peut-être pas nécessaires. — 1° *La force extérieure n'est pas nulle en tous les points d'une aire d'étendue finie, prise sur la surface de contact de deux fluides appartenant au système; en tout point d'une telle surface où elle est différente de zéro, elle est dirigée vers l'intérieur du plus dense des deux fluides.*

2° *La forme* R, *où les variables* $\delta f$, $\delta g$, $\delta h$, $\delta l$, $\delta m$, $\delta n$ *sont indépendantes, est une forme définie positive; ou, du moins, si elle s'annule, c'est pour des valeurs des variables* $\delta f$, $\delta g$, $\delta h$, $\delta l$, $\delta m$, $\delta n$, *qui ne vérifient pas les égalités* (7), (7 *bis*), (7 *ter*).

## II. — Comparaison avec un flotteur portant du lest solide.

Supposons que, le système étant en équilibre, on solidifie le liquide 4. On obtiendra un flotteur entièrement solide. Pour que l'équilibre d'un tel flotteur soit stable, il faut et il suffit que l'on ait, pour tout déplacement virtuel du système, l'inégalité

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\,dv_1 + \int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2)^2\,dv_2 \\ &+\int_{S_{12}} \rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx + \frac{\partial V}{\partial y}Dy + \frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{12} \\ &+\int_{S_{12}} \rho_2\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx + \frac{\partial V}{\partial y}Dy + \frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_2\,dS_{12} + T > 0. \end{aligned}\right.$$

T est une forme quadratique des six variables $\delta f$, $\delta g$, $\delta h$, $\delta l$, $\delta m$, $\delta n$,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} T = {} & C_{11}(\delta f)^2 + C_{22}(\delta g)^2 + C_{33}(\delta h)^2 \\ &+ C_{44}(\delta l)^2 + C_{55}(\delta m)^2 + C_{66}(\delta n)^2 \\ &+ C_{23}\,\delta g\,\delta h + C_{31}\,\delta h\,\delta f + C_{12}\,\delta f\,\delta g \\ &+ C_{56}\,\delta m\,\delta n + C_{64}\,\delta n\,\delta l + C_{45}\,\delta l\,\delta m \\ &+ C_{15}\,\delta f\,\delta m + C_{16}\,\delta f\,\delta n \\ &+ C_{26}\,\delta g\,\delta n + C_{24}\,\delta g\,\delta l \\ &+ C_{34}\,\delta h\,\delta l + C_{35}\,\delta h\,\delta m. \end{aligned}\right.$$

Les coefficients $C_{ij}$ ont des formes analogues à celles des coefficients $A_{ij}$ ou $B_{ij}$. On a, par exemple,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} C_{11} = {} & -\int_{S_{13}} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N, x)\,dS_{13} - \int_{S_{23}} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N, x)\,dS_{23} \\ & \qquad - \int_{S_{14}} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial x}\cos(n_1, x)\,dS_{14} \\ & + \int_3 \rho_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,dv_3 + \int_4 \rho_4 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dv_4; \end{aligned}\right.$$

les autres coefficients $C_{ij}$ ont des formes analogues.

L'expression (10) du coefficient $C_{11}$ peut se transformer.

On a, en effet,

$$\begin{aligned} \int_4 \rho_4 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dv_4 = {} & -\int_4 \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial \rho_4}{\partial x}\,dv_4 \\ & + \int_{S_{14}} \rho_4 \frac{\partial V}{\partial x}\cos(n_1, x)\,dS_{14} - \int_{S_{34}} \rho_4 \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N, x)\,dS_{34}. \end{aligned}$$

Cette égalité et d'autres analogues permettent de transformer l'expression de T. Posons

$$(11)\qquad \begin{cases} \Delta x = \delta f + z\,\delta m - y\,\delta n, \\ \Delta y = \delta g + x\,\delta n - z\,\delta l, \\ \Delta z = \delta h + y\,\delta l - x\,\delta m; \end{cases}$$

$\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ sont les composantes du déplacement du point $(x, y, z)$, si on le suppose invariablement lié au corps solide.

Nous aurons, on le voit sans peine,

$$(12)\qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{T} = {} & \mathrm{R} \\ & -\int_4 \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\Delta z\right)\left(\frac{\partial \rho_4}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \rho_4}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \rho_4}{\partial z}\Delta z\right) dv_4 \\ & -\int_{\mathrm{S}_{14}} \rho_1 \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\Delta z\right) \\ & \qquad \times [\cos(n_1, x)\Delta x + \cos(n_1, y)\Delta y + \cos(n_1, z)\Delta z]\, d\mathrm{S}_{11} \\ & +\int_{\mathrm{S}_{14}} \rho_4 \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\Delta z\right) \\ & \qquad \times [\cos(n_1, x)\Delta x + \cos(n_1, y)\Delta y + \cos(n_1, z)\Delta z]\, d\mathrm{S}_{11}. \end{aligned} \right.$$

Mais on a [1], en tout point du fluide 4 en équilibre,

$$\frac{d\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4} + \mathrm{V} = \mathrm{C},$$

C étant une constante. On déduit de là

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\Delta z \\ & + \frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2}\left(\frac{\partial \rho_4}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \rho_4}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \rho_4}{\partial z}\Delta z\right) = 0. \end{aligned}$$

---

[1] *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*, Chap. I, égalité (38) (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. I, p. 128).

En vertu de cette égalité, l'égalité (12) peut s'écrire

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{T} = {} & \mathrm{R} \\ & + \int_4 \frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2}\left(\frac{\partial\rho_4}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\rho_4}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\rho_4}{\partial z}\Delta z\right)^2 dv_4 \\ & - \int_{\mathrm{S}_{14}} \rho_1 \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\Delta z\right) \\ & \qquad \times [\cos(n_1, x)\Delta x + \cos(n_1, y)\Delta y + \cos(n_1, z)\Delta z]\, d\mathrm{S}_{14} \\ & + \int_{\mathrm{S}_{14}} \rho_4 \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\Delta z\right) \\ & \qquad \times [\cos(n_1, x)\Delta x + \cos(n_1, y)\Delta y + \cos(n_1, z)\Delta z]\, d\mathrm{S}_{14}. \end{aligned}\right.$$

Cette expression de la forme T va nous permettre de démontrer le théorème suivant :

*Lorsque le flotteur portant le fluide 4 est en équilibre stable, l'équilibre demeure stable si l'on vient à solidifier le fluide 4.*

En effet, l'hypothèse de ce théorème revient à supposer que l'inégalité (1) est vérifiée pour tous les déplacements virtuels que l'on peut imposer au système. Or, parmi ces déplacements, figurent évidemment ceux où chaque point matériel du fluide 4 demeure invariablement lié au solide 3. Pour un tel déplacement, on a, en tout point du fluide 4,

$$\delta x = \Delta x \qquad \delta y = \Delta y, \qquad \delta z = \Delta z,$$

$\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ étant données par les égalités (11); on a aussi

$$\delta\rho_4 = -\left(\frac{\partial\rho_4}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\rho_4}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\rho_4}{\partial z}\Delta z\right).$$

En tout point de la surface $\mathrm{S}_{14}$, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = {} & \cos(n_1, x)\Delta x + \cos(n_1, y)\Delta y + \cos(n_1, z)\Delta z, \\ \varepsilon_4 = {} & -[\cos(n_1, x)\Delta x + \cos(n_1, y)\Delta y + \cos(n_1, z)\Delta z] \end{aligned}$$

et l'on peut prendre

$$Dx = \Delta x, \qquad Dy = \Delta y, \qquad Dz = \Delta z.$$

Moyennant ces égalités et l'égalité (13), l'inégalité (1) devient identique à l'inégalité (8), ce qui démontre le théorème énoncé.

*La réciproque de la proposition précédente n'est pas exacte; il peut se faire que le flotteur, chargé du corps 4 solidifié, soit en équilibre stable et que l'équilibre devienne instable si l'on rend la fluidité au corps 4.*

Considérons, en effet, le déplacement le plus général du système où le fluide 4 est supposé solidifié. De ce déplacement, nous pourrons déduire un autre déplacement virtuel du système où le corps 4 a gardé sa fluidité en opérant de la manière suivante :

1° Les quantités $\delta f$, $\delta g$, $\delta h$, $\delta l$, $\delta m$, $\delta n$ ont la même valeur en chacun des deux déplacements;

2° Les quantités $\delta\rho_1$, $\delta\rho_2$ sont les mêmes dans les deux déplacements;

3° Les quantités $Dx$, $Dy$, $Dz$ ont la même valeur, en chaque point de la surface $S_{12}$, en l'un et l'autre déplacement;

4° Les déplacements $Dx$, $Dy$, $Dz$ aux divers points de la surface $S_{14}$ vérifient l'égalité

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{S_{14}} [\cos(n_1, x)\, Dx + \cos(n_1, y)\, Dy + \cos(n_1, z)\, Dz]\, dS_{14} \\ & = \int_{S_{34}} [\cos(N, x)\Delta x + \cos(N, y)\Delta y + \cos(N, z)\Delta z]\, dS_{34}; \end{aligned} \right.$$

5° En tout point du fluide 4, on a

$$\delta\rho_4 = -\left[\frac{\partial\rho_4}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\rho_4}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\rho_4}{\partial z}\Delta z\right].$$

Cherchons à écrire, pour le *second* déplacement virtuel, l'inégalité (1). Nous verrons sans peine que, pour former le premier membre de cette inégalité, il suffit de prendre le premier membre de l'inégalité (12) relative au *second* déplacement virtuel et y ajouter la quantité

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{S_{14}} (\rho_1 - \rho_4)\left(\frac{\partial V}{\partial x} Dx + \frac{\partial V}{\partial y} Dy + \frac{\partial V}{\partial z} Dz\right) \\ \qquad \times [\cos(n_1, x)\, Dx + \cos(n_1, y)\, Dy + \cos(n_1, z)\, Dz]\, dS_{14} \\ \displaystyle -\int_{S_{14}} (\rho_1 - \rho_4)\left(\frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \Delta z\right) \\ \qquad \times [\cos(n_1, x)\, \Delta x + \cos(n_1, y)\, \Delta y + \cos(n_1, z)\, \Delta z]\, dS_{14}. \end{array}\right.$$

Or, on peut aisément montrer que cette quantité (15) peut prendre des valeurs négatives alors que l'égalité (14) est vérifiée; en sorte que l'inégalité (12) peut être vérifiée sans que l'inégalité (1) le soit.

Supposons, en effet, que l'on ait, dans le premier déplacement virtuel,

$$\int_{14} [\cos(N, x)\, \Delta x + \cos(N, y)\, \Delta y + \cos(N, z)\, \Delta z] = 0,$$

égalité qui constitue une relation linéaire et homogène entre les six variables

$$\delta f, \quad \delta g, \quad \delta h, \quad \delta l, \quad \delta m, \quad \delta n.$$

On pourra alors satisfaire à la condition (14) en prenant, en tout point de la surface $S_{14}$,

$$Dx = 0, \qquad Dy = 0, \qquad Dz = 0.$$

La quantité (15) se réduira à son second terme que l'on pourra écrire

$$\int_{S_{14}} (\rho_4 - \rho_1) \frac{\partial V}{\partial n_1} [\cos(n_1, x)\, \Delta x + \cos(n_1, y)\, \Delta y + \cos(n, z)\, \Delta z]^2\, dS_{14}.$$

Or, les conditions nécessaires pour la stabilité de l'équilibre des fluides 1 et 4, considérés comme seuls mobiles, nous enseignent que cette quantité est forcément négative.

La proposition énoncée est donc démontrée.

### III. — Cas où les forces agissantes se réduisent à la pesanteur et où les fluides sont homogènes.

Considérons maintenant le cas particulier où les forces extérieures agissantes se réduisent à la pesanteur et où les fluides 1, 2, 4 sont sensiblement homogènes, soit qu'ils offrent, comme les liquides, une compressibilité négligeable, soit que leur faible densité varie très peu avec la hauteur, comme il arrive pour les gaz.

Prenons l'axe des $z$ vertical et dirigé vers le haut.

Soient

$S'_{12}$ la section que le plan $S_{12}$ prolongé détermine dans l'espace clos occupé par les corps 1 et 4;
$\Sigma$, l'aire de cette section;
$\sigma$, l'aire de la surface $S_{14}$;
$\mu = M_3 + M_4$, la masse de l'ensemble des corps 3 et 4;
$\zeta$, la cote du centre de gravité de cette masse;
Z, la cote du centre de gravité de la masse des fluides 1 et 2 déplacés par les corps 3 et 4.

Des calculs semblables à ceux que nous avons développés dans notre Mémoire *Sur la stabilité des corps flottants* (Chap. III, § V) nous donneront aisément l'égalité suivante

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
R = {} & g(\rho_2-\rho_1)\Sigma(\delta h)^2 \\
& + g\left[\mu(Z-\zeta)+(\rho_2-\rho_1)\int_{S'_{12}} y^2\,dS'_{12}-(\rho_4-\rho_1)\int_{S_{14}} y^2\,dS_{14}\right](\delta l)^2 \\
& + g\left[\mu(Z-\zeta)+(\rho_2-\rho_1)\int_{S'_{12}} x^2\,dS'_{12}-(\rho_4-\rho_1)\int_{S_{14}} x^2\,dS_{14}\right](\delta m)^2 \\
& - 2g\left[(\rho_2-\rho_1)\int_{S'_{12}} xy\,dS'_{12}-(\rho_4-\rho_1)\int_{S_{14}} xy\,dS_{14}\right]\delta l\,\delta m \\
& + 2g\left[(\rho_2-\rho_1)\int_{S'_{12}} y\,dS'_{12}-(\rho_4-\rho_1)\int_{S_{14}} y\,dS_{14}\right]\delta h\,\delta l \\
& - 2g\left[(\rho_2-\rho_1)\int_{S'_{12}} x\,dS'_{12}-(\rho_4-\rho_1)\int_{S_{1}} x\,dS_{14}\right]\delta h\,\delta m.
\end{aligned}
\right.
$$

Les conditions (7), (7 *bis*), (7 *ter*) prennent les formes suivantes :

$$(\Sigma-\sigma)\delta h+\left(\int_{S'_{12}} y\,dS'_{12}-\int_{S_{14}} y\,dS_{14}\right)\delta l-\left(\int_{S'_{12}} x\,dS'_{12}-\int_{S_{14}} y\,dS_{14}\right)\delta m=0, \tag{17}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\Sigma\,\delta h+\delta l\int_{S'_{12}} y\,dS'_{12}-\delta m\int_{S'_{12}} x\,dS'_{12}=0,\\ &\sigma\,\delta h+\delta l\int_{S_{14}} y\,dS_{14}-\delta m\int_{S_{14}} x\,dS_{14}=0. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

L'égalité (17) est une conséquence des égalités (18), qui doivent seules être conservées.

L'inspection des égalités (16) et (18) montre immédiatement que l'on ne pourra pas, en général, raisonner dans le cas qui nous occupe comme nous l'avons fait pour traiter la stabilité d'un corps solide et pesant flottant à la surface de séparation de deux fluides pesants et homogènes. On ne pourra étendre ces raisonnements au cas qui nous occupe actuellement que dans le cas où il sera possible de choisir les axes coordonnés de telle façon que l'on ait à la fois

$$\int_{S'_{12}} x\,dS'_{12}=0,\qquad \int_{S'_{12}} y\,dS'_{12}=0,$$

$$\int_{S_{14}} x\,dS_{14}=0,\qquad \int_{S_{14}} y\,dS_{14}=0,$$

c'est-à-dire *dans le cas où le centre de gravité de l'aire de la section à fleur d'eau* $S'_{12}$ *et le centre de gravité de l'aire de la surface* $S_{14}$ *qui limite le fluide 4 sont sur une même verticale.*

Dans ce cas, *si nous prenons cette verticale pour axe des* $z$, la forme quadratique R deviendra

$$\left\{\begin{aligned} R=\;& g(\rho_2-\rho_1)\Sigma(\delta h)^2\\ &+g\left[\mu(Z-\zeta)+(\rho_2-\rho_1)\int_{S'_{12}} y^2\,dS'_{12}-(\rho_4-\rho_1)\int_{S_{14}} y^2\,dS_{14}\right](\delta l)^2\\ &+g\left[\mu(Z-\zeta)+(\rho_2-\rho_1)\int_{S'_{12}} y^2\,dS'_{12}-(\rho_4-\rho_1)\int_{S_{14}} y^2\,dS_{14}\right](\delta m)^2\\ &-2g\left[(\rho_2-\rho_1)\int_{S'_{12}} xy\,dS'_{12}-(\rho_4-\rho_1)\int_{S_{14}} xy\,dS_{14}\right]\delta l\,\delta m, \end{aligned}\right. \tag{19}$$

tandis que les conditions (17) et (18) se réduiront à

$$(20) \qquad \delta h = 0.$$

Moyennant la condition indiquée en italiques, on peut énoncer la proposition suivante :

*Pour que l'équilibre du système soit stable, il faut et il suffit : 1° que le fluide 1 soit moins dense que les fluides 2 et 4; 2° que la forme quadratique en $\delta l$, $\delta m$,*

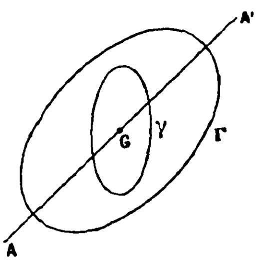
$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{U} = {} & \left[\mu(\mathrm{Z}-\zeta) + (\rho_2-\rho_1)\int_{\mathrm{S}'_{12}} y^2\, d\mathrm{S}'_{12} - (\rho_4-\rho_1)\int_{\mathrm{S}_{14}} y^2\, d\mathrm{S}_{14}\right](\delta l)^2 \\ & + \left[\mu(\mathrm{Z}-\zeta) + (\rho_2-\rho_2)\int_{\mathrm{S}'_{12}} x^2\, d\mathrm{S}'_{12} - (\rho_4-\rho_1)\int_{\mathrm{S}_{14}} x^2\, d\mathrm{S}_{14}\right](\delta m)^2 \\ & - 2\left[(\rho_2-\rho_1)\int_{\mathrm{S}'_{12}} xy\, d\mathrm{S}'_{12} - (\rho_4-\rho_1)\int_{\mathrm{S}_{14}} xy\, d\mathrm{S}_{14}\right]\delta l\, \delta m \end{aligned} \right.$$

*soit une forme définie positive.*

Dans le cas que nous venons de préciser, la solution du problème relatif à la stabilité d'un vaisseau qui porte du lest liquide est complète; mais on voit combien ce cas est particulier, si on le compare à la généralité de la solution obtenue depuis longtemps dans le cas où le flotteur ne porte pas de lest liquide.

La condition que nous venons d'obtenir peut s'interpréter géométriquement :

Fig. 3.




Sur le plan de flottaison traçons la ligne de flottaison $\Gamma$ (*fig.* 3), entourant l'aire $\Sigma$; sur le même plan, projetons l'aire $\sigma$, dont la projection est circonscrite par la ligne $\gamma$. Les deux aires $\Sigma$, $\sigma$ ont, par hypothèse, le même centre de gravité G.

Recouvrons l'aire $\Sigma$ d'un fluide fictif ayant une densité superficielle *positive* $(\rho_2 - \rho_1)$; recouvrons l'aire $\sigma$ d'un fluide fictif ayant une densité superficielle *négative* $(\rho_1 - \rho_3)$.

Cherchons le moment d'inertie de ce système fictif par rapport à un axe variable AA′, situé dans le plan de flottaison et passant par le point G. Ce moment d'inertie a, pour une certaine orientation de l'axe AA′, une valeur minima $j$.

La condition précédente équivaut à celle-ci

$$Z - \zeta + \frac{j}{\mu} > 0$$

ou

$$\zeta < Z + \frac{j}{\mu}. \tag{22}$$

Supposons que l'on solidifie le fluide 4. Soit $i$ le plus petit moment d'inertie par rapport à l'axe variable AA′ de la seule aire $\Sigma$ recouverte du fluide fictif de densité positive $(\rho_2 - \rho_1)$. La condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de l'équilibre du flotteur s'exprimerait par l'inégalité

$$\zeta < Z + \frac{i}{\mu}. \tag{23}$$

Or, on a évidemment

$$j < i.$$

Donc, pour que l'inégalité (22) soit vérifiée, il est nécessaire, mais non suffisant, que l'inégalité (23) le soit également; on a ici un exemple de la proposition générale énoncée au § II.

La proposition que nous venons de démontrer renferme comme cas particulier le théorème énoncé par M. Guyou.

La condition, indiquée en italiques, à laquelle le théorème précédent doit son exactitude, lui ôte tout intérêt au point de vue de la construction navale; cette condition, en effet, ne sera presque jamais remplie dans les divers cas qu'offre la pratique (navire dont un ou plusieurs compartiments étanches sont *partiellement* noyés, porteur de pétrole dont une ou plusieurs caisses sont *incomplètement* remplies, etc.). Cette lacune, toutefois, peut être en partie comblée si l'on observe que l'architecture navale a surtout besoin de connaître une condition *suffisante*, qui l'assure de la stabilité d'un navire, la condition *nécessaire et suffisante* constituant un idéal dont elle peut, à la rigueur, se passer.

Nous savons qu'*il suffit*, pour la stabilité du navire, que la forme quadratique R soit une forme définie positive, *bien que cette condition ne soit peut-être pas nécessaire*.

Or l'expression de la forme R peut se simplifier.

Sur le plan de flottaison, traçons la ligne de flottaison $\Gamma$ (*fig.* 3), entourant l'aire $\Sigma$; sur le même plan, projetons l'aire $\sigma$, dont la projection est circonscrite par la ligne $\gamma$. Recouvrons l'aire $\Sigma$ d'un fluide fictif ayant une densité superficielle *positive* $(\rho_2 - \rho_1)$; recouvrons l'aire $\sigma$ d'un fluide fictif ayant une densité superficielle *négative* $(\rho_1 - \rho_4)$.

*Soit* G *le centre de gravité du système fictif ainsi constitué;* nous porterons en G l'origine des coordonnées, ce qui, dans la forme R, fera disparaître les termes en $\delta h\, \delta l$ et $\delta h\, \delta m$.

Cherchons le moment d'inertie du système fictif par rapport à un axe variable AA′, situé dans le plan de flottaison et passant par le point G. Ce moment d'inertie a, pour une certaine orientation de l'axe AA′, une valeur maxima (positive ou négative) J et pour une autre orientation une valeur minima (positive ou négative) $j$. Prenons la première orientation pour axe des $x$, la seconde pour axe des $y$. Le terme en $\delta l\, \delta m$ disparaîtra dans l'expression de R qui se réduira à

$$\begin{aligned} V = {} & g(\rho_2 - \rho_1)\Sigma(\delta h)^2 \\ & + g[\mu(Z - \zeta) + J](\delta l)^2 + g[\mu(Z - \zeta) + j](\delta m)^2. \end{aligned}$$

Il est *suffisant*, pour la stabilité de l'équilibre du navire, que la forme V soit une forme définie positive. Pour que la forme V soit une forme définie positive, il est évidemment nécessaire et suffisant que l'on ait l'inégalité

$$Z + \frac{j}{\mu} - \zeta > 0.$$

Nous pourrons donc énoncer de la manière suivante une CONDITION QUI SUFFIT A ASSURER LA STABILITÉ D'UN NAVIRE PORTANT DU LEST LIQUIDE :

*On considère le navire dans son assiette d'équilibre, en le supposant chargé du lest liquide;*

*On projette sur un même plan horizontal la surface de flottaison $\Sigma$ et la surface terminale $\sigma$ du lest liquide;*

*On recouvre la surface $\Sigma$ d'un fluide fictif de densité superficielle positive $(\rho_2 - \rho_1)$ et la surface $\sigma$ d'un fluide fictif de densité superficielle négative $(\rho_1 - \rho_4)$. On cherche le centre de gravité* G *de ce système fictif, puis son moment d'inertie par rapport à un axe horizontal variable passant par le point* G; *soit $j$ la plus petite valeur, positive ou négative, de ce moment d'inertie. La cote du centre de gravité du navire et du lest liquide qu'il porte doit être inférieure à la cote du centre de gravité des fluides* 1 *et* 2 *déplacés, cette dernière cote étant augmentée du quotient $\frac{j}{\mu}$ de la quantité $j$ par la masse totale du navire et du lest liquide.*

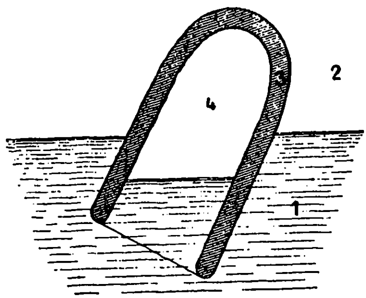
*Cette règle s'étend sans peine au cas où le lest liquide forme plusieurs masses distinctes, de même densité ou de densités différentes.*

### IV. — Stabilité d'une cloche à plongeur. — Cas de la pesanteur.

A la surface de séparation d'un liquide 1 et d'un gaz 2, flotte une cloche renversée 3, qui renferme un fluide 4.

Nous pourrions traiter directement et complètement le problème de

Fig. 4.




la stabilité d'un pareil système. Mais nous nous bornerons à étudier le cas où les forces extérieures agissantes se réduisent à la pesanteur et où les fluides sont supposés homogènes. Dans ce cas, on voit sans peine que le problème qui nous occupe actuellement se ramène au problème précédent, à la condition de changer $z$ en $(-z)$ et $g$ en

$(-g)$. Nous pouvons donc en donner immédiatement la solution, du moins lorsqu'il est possible de l'obtenir.

Pour qu'il soit possible de résoudre entièrement ce problème, *il faut que l'aire de la section à fleur d'eau et l'aire de la surface qui sépare les fluides* 1 *et* 4 *aient leurs centres de gravité sur la même verticale.*

Si cette condition est réalisée, on peut énoncer la proposition suivante :

*Pour que l'équilibre du système soit stable, il faut et il suffit :*

1° *Que le fluide* 1 *soit plus dense que les fluides* 2 *et* 4;

2° *Que la forme quadratique en* $\delta l$, $\delta m$,

$$(24)\quad \begin{aligned} W = & \left[\mu(\zeta - Z) + (\rho_2 - \rho_1)\int_{S'_{12}} y^2\, dS'_{12} - (\rho_4 - \rho_1)\int_{S_{14}} y^2\, dS_{14}\right](\delta l)^2 \\ & + \left[\mu(\zeta - Z) + (\rho_2 - \rho_1)\int_{S'_{12}} y^2\, dS'_{12} - (\rho_4 - \rho_1)\int_{S_{14}} x^2\, dS_{14}\right](\delta m)^2 \\ & - 2\left[(\rho_2 - \rho_1)\int_{S'_{12}} xy\, dS'_{12} - (\rho_4 - \rho_1)\int_{S_{14}} xy\, dS_{14}\right]\delta l\, \delta m, \end{aligned}$$

*soit une forme définie négative.*

On interprète aisément cette condition sous la forme que voici :

Projetons les deux aires $\Sigma$, $\sigma$ sur un plan horizontal. Les deux projections ont même centre de gravité G.

Recouvrons la première d'une densité superficielle positive $(\rho_1 - \rho_2)$ et la seconde d'une densité superficielle négative $(\rho_4 - \rho_1)$.

Cherchons le moment d'inertie de ce système fictif par rapport à un axe horizontal variable AA' passant par le point G; soit $j$ la valeur minima de ce moment d'inertie. La condition précédente équivaut à l'inégalité

$$(25)\quad \zeta < Z + \frac{j}{\mu}.$$

Si la condition indiquée en italiques n'est pas remplie, nous n'aurons plus, en général, de condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de la cloche; mais nous pourrons, comme dans le cas précédent, obtenir une condition simplement suffisante de même forme.