

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES  
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

MAURICE HAMY

**Sur le développement approché de la fonction perturbatrice  
dans le cas des inégalités d'ordre élevé**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 4<sup>e</sup> série*, tome 10 (1894), p. 391-472.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1894\\_4\\_10\\_\\_391\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1894_4_10__391_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur le développement approché de la fonction perturbatrice  
dans le cas des inégalités d'ordre élevé;*

PAR M. MAURICE HAMY.

---

Lorsque l'inclinaison relative  $\gamma$  des plans des orbites de deux planètes P, P<sub>1</sub> est petite, la partie principale de la fonction perturbatrice s'exprime au moyen d'une série procédant suivant les puissances de  $\sin^2 \frac{\gamma}{2}$ , dont les termes cessent très rapidement d'être sensibles. Les coefficients des puissances de  $\sin^2 \frac{\gamma}{2}$  sont de la forme

$$F_0(\zeta_1, \zeta) = \frac{f(E^{iu})f_1(E^{iu_1})}{\Delta^s},$$

E désignant la base des logarithmes népériens;  $i$  le symbole  $\sqrt{-1}$ ;  $\zeta$  et  $\zeta_1$  les anomalies moyennes respectives des planètes P, P<sub>1</sub>;  $u$  et  $u_1$  les anomalies excentriques;  $f(E^{iu})$  une fonction réelle entière de  $\sin u$  et  $\cos u$ ;  $f_1(E^{iu_1})$  une fonction réelle entière de  $\sin u_1$  et  $\cos u_1$ ;  $s$  un nombre de la forme  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ , peu élevé dans les applications;  $\Delta$  l'expression du carré de la distance des planètes, où l'on a fait  $\gamma = 0$ .

On rencontre aussi, dans le calcul des inégalités lunaires d'ordre élevé causées par l'action des planètes, des expressions de même forme<sup>(1)</sup>.

---

<sup>(1)</sup> HILL, *American Journal of Mathematics*, t. VI; — RADAU, *Recherches concernant les inégalités planétaires du mouvement de la Lune* (*Annales de l'Observatoire*, t. XXI).

La connaissance des coefficients de  $\frac{\cos}{\sin}(m\zeta + m_1\zeta_1)$  dans le développement trigonométrique de  $F_0$  suffit donc aux besoins de l'Astronomie lorsque l'inclinaison  $\gamma$  est petite.

J'ai entrepris de rechercher l'expression asymptotique de ces coefficients lorsque les entiers  $m$  et  $m_1$  sont grands.

Dans le présent Mémoire, je suppose nulle l'excentricité de la planète  $P_1$ , l'excentricité  $e$  de la planète  $P$  pouvant prendre une valeur quelconque. Je considère le cas où l'orbite circulaire de  $P_1$  enveloppe, sans la rencontrer, l'orbite elliptique de  $P$ .

Un cas particulier du problème ainsi posé a été examiné par M. Poincaré<sup>(1)</sup>.

M. Poincaré a pris  $f = f_1 = 1$ ,  $s = \frac{1}{2}$ , a supposé l'excentricité  $e$  très petite et la valeur de  $\frac{m}{m_1}$  voisine du rapport des moyens mouvements des deux planètes.

Je ne fais aucune hypothèse particulière sur les valeurs de  $\frac{m}{m_1}$  et de  $e$ , et je laisse à  $f, f_1, s$  leur signification générale.

Les travaux de M. Darboux, concernant l'approximation des fonctions de grands nombres<sup>(2)</sup>, m'ont conduit à reconnaître qu'une certaine fonction, désignée dans le texte par  $\varphi(z)$ , fonction qui est entièrement explicite, devait jouer un rôle important dans les discussions; j'ai procédé de façon à faire apparaître dès le début cette fonction  $\varphi(z)$ . Si je me suis ainsi écarté de la méthode proposée par M. Poincaré, l'Ouvrage de l'illustre géomètre m'a néanmoins été d'un secours indispensable pour mener à bonne fin la tâche que je m'étais imposée<sup>(3)</sup>.

Les divisions principales de mon travail sont les suivantes :

INTRODUCTION. Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres; méthode de M. Darboux.

I. Expression des coefficients éloignés du développement d'une

(<sup>1</sup>) *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I.

(<sup>2</sup>) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*; 1878.

(<sup>3</sup>) Le présent Mémoire a fait l'objet de deux Communications dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (numéros du 25 décembre 1893 et du 27 mars 1894).

- fonction périodique de deux variables au moyen d'intégrales I et J, à limites imaginaires.
- II. Définitions de la fonction  $\varphi(z)$  et de la fonction  $F(x, z)$ ; points singuliers et valeur asymptotique de la fonction J.
  - III. Étude de la dérivée  $\varphi'(z)$ .
  - IV. Étude de  $|\varphi(z)|$ .
  - V. Remarques concernant les équations qui fournissent les points singuliers de J.
  - VI. Valeur de I dans quelques cas particuliers. Décomposition de I, dans les autres cas, en deux parties I' et I''. Expressions de I''.
  - VII. Transformation de l'expression de la distance des planètes et de la fonction  $F(x, z)$ .
  - VIII. Transformation de I'. Définition de la fonction  $\Phi(x)$ .
  - IX. Développement de la fonction  $\Phi(x)$ .
  - X. Calcul de I'.
  - XI. Conclusions.

Résumé des formules.

Applications.

Addition.

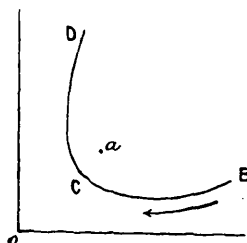
## INTRODUCTION.

SUR L'APPROXIMATION DES FONCTIONS DE GRANDS NOMBRES.

MÉTHODE DE M. DARBOUX.

1. Considérons, dans le plan représentatif d'une variable complexe, un contour BCD (fig. 1) et un point  $a$ . Admettons que les circon-

Fig. 1.



stances suivantes se présentent simultanément : 1° les extrémités B, D du contour sont plus éloignées de l'origine que le point  $a$ ; 2° le

contour rencontre la droite  $Oa$  en un point unique, compris sur le segment  $Oa$ , ou satisfait à cette condition après des déformations convenables. Nous dirons alors, pour abréger le langage, que le contour BCD est de *première espèce* par rapport au point  $a$ .

Nous désignerons par contour de *seconde espèce* par rapport au point  $a$  un contour dont toutes les parties sont plus éloignées de l'origine que le point  $a$ .

Les contours de seconde espèce jouissent de la propriété suivante :

*L'intégrale*

$$M = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \Phi(z) \frac{dz}{z^{n+1}},$$

*supposée finie, étant prise le long d'un contour C, de seconde espèce par rapport à un point dont la distance à l'origine est R, le produit  $R^n n^q M$  tend vers zéro lorsque  $n$  augmente indéfiniment,  $q$  désignant un nombre fini quelconque aussi grand que l'on veut.*

Cette proposition joue un rôle essentiel dans l'établissement des théorèmes qui vont suivre et que nous nous bornerons à énoncer.

THÉORÈME I. — *Étant donnée l'intégrale*

$$M = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \Phi(z) \frac{dz}{z^{n+1}}$$

*prise le long d'un contour BCD (fig. 1), dans laquelle  $n$  désigne un entier positif très grand, on peut en général obtenir une expression approchée de  $M$  en mettant à profit la grandeur de  $n$ , lorsque le contour d'intégration est de première espèce par rapport à un ou plusieurs points singuliers de la fonction  $\Phi(z)$ . On suppose d'ailleurs 1° que ces points singuliers particuliers sont isolés les uns des autres par des espaces finis; 2° que le contour ne rencontre aucune singularité de  $\Phi(z)$ .*

PREMIER CAS. — Admettons que le contour d'intégration soit de première espèce par rapport à un certain nombre de points singuliers de  $\Phi(z)$ . Appelons  $a$  l'affixe de celui de ces points particuliers qui

approche le plus près de l'origine et supposons que l'on puisse écrire dans le domaine de  $a$

$$\begin{aligned}\Phi(z) = \varphi(z) + A_1 \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_1} + A_2 \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_2} + \dots \\ + A_p \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_p} + \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha} \psi(z);\end{aligned}$$

la fonction  $\varphi$  étant holomorphe et la fonction  $\psi$  finie dans le domaine de  $a$ ;  $A_1, A_2, \dots, A_p$  désignant des constantes;  $\alpha$  un nombre supérieur à  $-1$ , vérifiant les inégalités

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_p < \alpha.$$

Les binomes affectés d'exposants entiers rentrent dans la fonction  $\varphi$ ; on peut donc admettre que la suite  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  ne contient pas d'entiers positifs.

Dans ces conditions, le coefficient  $N$  de  $z^n$ , dans le développement de la fonction

$$F(z) = A_1 \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_1} + A_2 \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_2} + \dots + A_p \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_p},$$

diffère de  $M$  d'une quantité  $N'$  dont l'ordre de grandeur ne dépasse pas l'ordre de  $\frac{1}{R^n} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ , en faisant  $R = |a|$ . Il faut entendre par là que, si l'on pose

$$M = N + N',$$

le produit  $R^n n^{1+\alpha} |N'|$  ne dépasse pas un nombre fixe, lorsque  $n$  augmente indéfiniment.

Il y a exception lorsque la fonction  $\psi(z)$  est identiquement nulle. Il arrive alors que le produit  $R^n n^q N'$  tend vers zéro, lorsque  $n$  augmente indéfiniment, quel que soit le nombre  $q$ , si grand qu'il soit, pourvu qu'il soit fini.

Cette circonstance se présente lorsque  $a$  est un pôle de  $\Phi(z)$ .

*Conséquences du théorème précédent.* — On utilise le théorème précédent en se fondant sur ce que le coefficient  $T_h$  de  $z^n$  dans le développement de  $\left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_h}$ , pour  $n$  très grand, est de l'ordre de  $\frac{1}{R^n} \frac{1}{n^{1+\alpha_h}}$ ;

c'est-à-dire que le produit  $R^n n^{1+\alpha_k} T_k$  reste fini et différent de zéro lorsque  $n$  devient infini.

Formons l'expression de  $N$  et portons-la dans l'équation qui précède.  $M$  se trouve décomposé en un nombre fini de termes qui décroissent de telle sorte que le rapport d'un terme au précédent tend vers zéro, lorsque  $n$  croît indéfiniment :

$$M = A_1 T_1 + A_2 T_2 + A_3 T_3 + \dots + A_{p-1} T_{p-1} + A_p T_p + N'.$$

On voit ainsi qu'en prenant  $A_1 T_1$  comme valeur approchée de  $M$ , on commet une erreur de l'ordre de  $\frac{1}{R^n} \frac{1}{n^{\alpha_1+1}}$ ; on peut écrire

$$M = A_1 T_1 (1 + \varepsilon_2),$$

$\varepsilon_2$  étant infiniment petit de l'ordre de  $\frac{1}{n^{\alpha_1-\alpha_2}}$ .

Si l'on prend  $A_1 T_1 + A_2 T_2$  comme valeur approchée de  $M$ , on commet une erreur de l'ordre de  $\frac{1}{R^n} \frac{1}{n^{1+\alpha_3}}$ ; on peut écrire

$$M = (A_1 T_1 + A_2 T_2) (1 + \varepsilon_3),$$

$\varepsilon_3$  étant infiniment petit de l'ordre de  $\frac{1}{n^{\alpha_2-\alpha_3}}$ .

Etc. ....

Si l'on prend  $A_1 T_1 + A_2 T_2 + \dots + A_{p-1} T_{p-1}$ , comme valeur approchée de  $M$ , on commet une erreur de l'ordre de  $\frac{1}{R^n} \frac{1}{n^{1+\alpha_p}}$ ; on peut écrire

$$M = (A_1 T_1 + A_2 T_2 + \dots + A_{p-1} T_{p-1}) (1 + \varepsilon_p),$$

$\varepsilon_p$  étant infiniment petit de l'ordre de  $\frac{1}{n^{\alpha_{p-1}-\alpha_p}}$ .

Enfin, si l'on prend  $N$  comme valeur approchée de  $M$ , on commet une erreur de l'ordre de  $N'$ ; on peut écrire

$$M = N (1 + \varepsilon),$$

le produit  $n^{\alpha-\alpha_1} |\varepsilon|$  demeurant au-dessous d'un nombre fixe, lorsque  $n$  croît indéfiniment.

Si la fonction  $\psi(x)$  est identiquement nulle, le produit  $n^q \varepsilon$  tend vers

zéro, lorsque  $n$  augmente indéfiniment,  $q$  désignant un nombre fini quelconque, aussi grand que l'on veut.

*Remarque I.* — La fonction  $\psi(z)$  est, en général, développable suivant les puissances positives ascendantes de  $1 - \frac{z}{a}$ . On peut alors augmenter à volonté l'exposant  $\alpha$  et réduire  $\varepsilon$  autant qu'il est nécessaire. Mais, le plus souvent, il est suffisant de prendre  $A, T$ , comme valeur approchée de  $M$ .

*Remarque II.* — Ce qui vient d'être dit suppose essentiellement 1° que la variable d'intégration chemine sur le contour de façon à tourner autour du point  $a$  dans le sens rétrograde (sens des arguments décroissants); s'il en était autrement, il faudrait changer le signe des résultats obtenus d'après la règle qui vient d'être donnée; 2° que les constantes  $A_1, A_2, \dots, A_p$  ont été choisies de façon que la valeur des binômes  $\left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_1}, \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_2}, \dots$  soit réelle et positive, lorsque  $z$  désigne l'affixe d'un point du segment de droite  $oa$  (*fig. 1*).

DEUXIÈME CAS. — Admettons que le contour d'intégration soit de première espèce, par rapport à un certain nombre de points singuliers de  $\Phi(z)$  et supposons que ceux de ces points qui ont pour affixes  $a, b, c, \dots$ , soient 1° à la même distance,  $R$ , de l'origine, 2° plus rapprochés de l'origine que les autres singularités, par rapport auxquelles le contour est de première espèce.

Chacun de ces points singuliers  $a, b, c, \dots$  apporte alors un appoint à la valeur approchée de  $M$ .

Cette valeur s'obtient en appliquant, successivement à chacun des points  $a, b, c, \dots$ , la règle donnée dans le premier cas et en faisant la somme  $S$  des résultats.

On détermine pour chacun des points  $a, b, c, \dots$  l'ordre de grandeur des termes négligés d'après la règle donnée dans le premier cas. La plus grande des valeurs obtenues donne l'ordre de l'erreur commise, lorsque l'on remplace  $M$  par son expression approchée  $S$ . On peut écrire

$$M = S(1 + \varepsilon),$$



$\varepsilon$  étant un infiniment petit, en même temps que  $\frac{1}{n}$ , d'autant plus petit que la différence entre l'ordre du terme le plus important de  $S$  et l'ordre de l'erreur commise est plus accusée.

Ce théorème étend les résultats obtenus par M. Darboux, dans son beau Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres<sup>(1)</sup>. Il a été découvert par M. Flamme<sup>(2)</sup>, qui s'est placé dans l'hypothèse où le développement de la fonction  $\Phi(z)$ , autour de ses points singuliers, peut être prolongé indéfiniment.

Je me bornerai ici à indiquer qu'en exprimant, au moyen de la fonction eulérienne de seconde espèce, les factorielles contenues dans  $T_1, T_2, \dots$ , on obtient une expression approchée de  $M$  qui est valable pour les valeurs positives *entières ou fractionnaires* de  $n$ .

*Généralisation du théorème précédent.* — Revenons au premier cas du théorème I et supposons que l'on puisse écrire dans le domaine du point singulier  $a$  de  $\Phi(z)$

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \varphi(z) + A_1 \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_1} \text{Log}^{q_1} \left(1 - \frac{z}{a}\right) \\ & + A_2 \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_2} \text{Log}^{q_2} \left(1 - \frac{z}{a}\right) + \dots \\ & + A_p \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_p} \text{Log}^{q_p} \left(1 - \frac{z}{a}\right) + \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha} \text{Log}^q \left(1 - \frac{z}{a}\right) \psi(z); \end{aligned}$$

la fonction  $\varphi$  étant holomorphe et la fonction  $\psi$  finie dans le domaine de  $a$ ;  $A_1, \dots, A_p$  désignant des constantes;  $q_1, q_2, \dots, q_p, q$  des entiers positifs ou nuls rangés dans un ordre quelconque;  $\alpha$  étant un nombre supérieur à  $-1$  vérifiant les inégalités

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p < \alpha.$$

La fonction  $\varphi(z)$  comprenant la partie holomorphe de  $\Phi(z)$ , dans le voisinage de  $a$ , nous admettrons que si la suite des entiers

$$q_1, q_2, \dots, q_p$$

<sup>(1)</sup> *Loc. cit.*

<sup>(2)</sup> *Thèse de doctorat.* Paris, Gauthier-Villars, 1887.

contient des termes nuls, les termes de même rang de la suite

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$$

ne sont pas des entiers positifs.

Dans ces conditions, le coefficient  $N$  de  $z^n$  dans le développement de la fonction

$$F(z) = A_1 \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_1} \text{Log}^{q_1} \left(1 - \frac{z}{a}\right) + \dots + A_p \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_p} \text{Log}^{q_p} \left(1 - \frac{z}{a}\right)$$

diffère de  $M$  d'une quantité  $N'$ , dont le module multiplié par  $\frac{R^n n^{1+\alpha}}{\text{Log}^q n}$  demeure au-dessous d'un nombre fixe, lorsque  $n$  augmente indéfiniment.

*Conséquences.* — Les applications de ce théorème sont fondées sur ce que

1° Le coefficient de  $z^n$ , dans le développement  $\left(1 - \frac{z}{a}\right)^h \text{Log}^k \left(1 - \frac{z}{a}\right)$ , est de l'ordre de  $\frac{1}{R^n} \frac{\text{Log}^{k-1} n}{n^{1+h}}$ , si  $h$  est un entier positif ou nul ( $k$  entier positif non nul), ou de l'ordre de  $\frac{1}{R^n} \frac{\text{Log}^k n}{n^{1+h}}$ , si  $h$  n'est pas un entier positif ou nul ( $k$  entier positif ou nul);

2° Toute puissance positive de  $\text{Log} n$  est infiniment petite par rapport à toute puissance positive de  $n$  si petite qu'elle soit, pourvu qu'elle soit finie, lorsque  $n$  croît indéfiniment.

Il résulte de là que l'on peut, comme dans le théorème I, décomposer  $M$  en un nombre fini de termes, qui vont en décroissant de telle sorte que le rapport d'un terme au précédent tend vers zéro en même temps que  $\frac{1}{n}$ . En prenant comme valeur approchée de  $M$  un certain nombre de ces termes, on commet une erreur de l'ordre du premier terme négligé et cette valeur approchée tend asymptotiquement vers  $M$ , lorsque  $n$  augmente indéfiniment (').

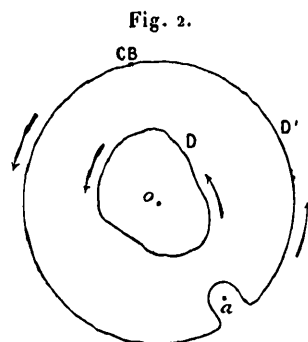
Lorsque le contour d'intégration est de première espèce par rapport

(') Aux remarques faites deux pages plus haut, on doit ajouter que la détermination de  $\text{Log} \left(1 - \frac{z}{a}\right)$ , considérée ici, est réelle et négative, lorsque  $z$  est l'affixe d'un point de  $oa$  (fig. 1).

à un certain nombre de points singuliers de  $\Phi(z)$  et que, parmi ceux-ci, plusieurs sont équidistants de l'origine et plus rapprochés que les autres de l'origine, on doit considérer tous ces points singuliers particuliers, et leur appliquer la règle donnée dans le deuxième cas du théorème I<sup>(1)</sup>.

2. Voici un corollaire important des propositions qui précèdent, applicable seulement lorsque  $n$  est entier :

*Corollaire.* — Supposons que l'intégrale  $M$  soit prise le long d'un contour fermé  $D$  (fig. 2), et que la fonction  $\Phi(z)$  reprenne sa valeur



lorsque la variable complexe  $z$ , après avoir décrit le contour en entier, revient au point de départ.

Supposons que  $\Phi(z)$  ait, à l'extérieur du contour  $D$ , un certain nombre de points singuliers et soit  $a$  l'abscisse de celui de ces points qui est le plus rapproché de l'origine. Admettons que ce point singulier soit de la nature de ceux que nous avons considérés jusqu'ici.

Il est aisé de voir que la valeur approchée de  $M$  s'obtient en appliquant au point  $a$  la règle déduite du théorème I.

En effet, la fonction  $\Phi(z)$  reprenant sa valeur lorsque la variable parcourt en entier le contour  $D$ , ce contour peut être déformé d'une façon quelconque, à condition d'éviter de rencontrer les points singuliers de  $\Phi(z)$  et l'origine. On peut prendre, en particulier, comme nouveau contour d'intégration, une circonférence  $D'$ , ayant l'origine pour centre, de rayon supérieur à  $|a|$ , déformée comme il est indiqué

---

(<sup>1</sup>) Ces propositions sont applicables lorsque  $\Phi(z)$  dépend de  $n$ , à condition que cette fonction demeure finie lorsque  $n$  croît indéfiniment.

(fig. 2), de façon à laisser le point  $\alpha$  à l'extérieur du contour; le rayon de la circonférence doit, en outre, être choisi de façon que les points singuliers de  $\Phi(z)$ , plus éloignés de l'origine que  $\alpha$ , soient extérieurs au nouveau contour <sup>(1)</sup>.

En prenant, comme extrémités du nouveau contour, un point B, C de la circonférence, on obtient un contour de première espèce par rapport au point  $\alpha$ . Il faut donc appliquer à ce point la règle donnée précédemment.

C. Q. F. D.

S'il y avait plusieurs points singuliers de  $\Phi(z)$ , également éloignés de l'origine, à l'extérieur du contour D, et plus rapprochés de l'origine que les autres points extérieurs, on devrait utiliser tous ces points singuliers particuliers pour obtenir la valeur approchée de M.

*Conséquences.* — 1° Supposons  $\Phi(z)$  développable par la série de Mac Laurin à l'intérieur d'une circonférence de rayon R et admettons que la convergence du développement cesse au delà de ce cercle, parce que la fonction  $\Phi(z)$  possède, sur la circonférence R, un ou plusieurs points singuliers de la nature de ceux qui ont été considérés jusqu'ici. M représente alors le coefficient de  $z^n$  dans le développement de  $\Phi(z)$ . La considération des points singuliers dont il s'agit permet d'obtenir la valeur approchée de ce coefficient.

C'est cette proposition très importante qui a fait l'objet du beau Mémoire de M. Darboux.

2° Si la fonction  $\Phi(z)$  est développable, non par la série de Mac Laurin, mais par la série de Laurent, à l'intérieur d'une couronne circulaire limitée extérieurement par une circonférence de rayon R, la considération des points singuliers situés sur cette circonférence permet d'obtenir la valeur approchée du coefficient de  $z^n$ .

Pour obtenir la valeur approchée du coefficient de  $\frac{1}{z^n}$ , poser  $z = \frac{1}{z'}$  et chercher la valeur approchée du coefficient de  $z'^n$ .

3. 1° Soit  $A_n$  le coefficient de  $z^n$  dans le développement de  $\left(1 - \frac{z}{a}\right)^h$ .

---

<sup>(1)</sup> Si le contour D renferme des singularités, à une distance de l'origine supérieure à  $|a|$ , dilater la circonférence D' de façon qu'elle les contienne.

On a

$$A_n = \frac{1}{a^n} \frac{\Gamma(n-h)}{\Gamma(-h)\Gamma(n+1)}.$$

On peut prendre pour  $n$  très grand

$$(a) \quad A_n = \frac{1}{\Gamma(-h)} \frac{1}{a^n} \frac{1}{n^{1+h}} \left[ 1 + \frac{h(h+1)}{2n} + \dots \right].$$

2° Soit  $q$  un entier positif. Appelons  $B_n^{(q)}$  le coefficient de  $z^n$  dans le développement de  $\left(1 - \frac{z}{a}\right)^h \text{Log}^q \left(1 - \frac{z}{a}\right)$ .

On a, si  $h$  n'est pas un entier positif,

$$B_n^{(q)} = \frac{1}{a^n} \frac{1}{\Gamma(n+1)} \frac{d^q}{dh^q} \frac{\Gamma(n-h)}{\Gamma(-h)}.$$

Il est facile de développer cette expression suivant les puissances descendantes de  $n$ . En particulier,  $B_n^{(1)}$  a pour valeur approchée

$$(b) \quad \left\{ \begin{aligned} B_n^{(1)} &= \frac{1}{a^n} \frac{1}{\Gamma(-h)} \frac{1}{n^{1+h}} \\ &\times \left\{ \frac{\Gamma'(-h)}{\Gamma(-h)} - \text{Log} n \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2n} \left[ h(h+1) \frac{\Gamma'(-h)}{\Gamma(-h)} - h(h+1) \text{Log} n + 2h+1 \right] + \dots \right\}. \end{aligned} \right.$$

Si  $h$  est un entier positif ou nul il convient d'écrire

$$B_n^{(q)} = - \frac{1}{a^n} \frac{1}{\Gamma(n+1)} \frac{d^q}{dh^q} \frac{\sin \pi h}{\pi} \Gamma(1+h) \Gamma(n-h).$$

On a, en particulier,

$$B_n^{(1)} = \frac{(-1)^{h+1}}{a^n} \frac{\Gamma(h+1) \Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)},$$

ou, approximativement,

$$(c) \quad B_n^{(1)} = \frac{(-1)^{h+1}}{a^n} \frac{\Gamma(h+1)}{n^{1+h}} \left[ 1 + \frac{h(h+1)}{2n} + \dots \right].$$

Les développements asymptotiques qui précèdent se déduisent de

l'expression approchée

$$\Gamma(n+p) = \sqrt{2\pi} E^{-n} n^{n+p-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{1}{12n} [1 + 6p(p+1)] + \dots \right\},$$

où  $n$  désigne un grand nombre positif quelconque,  $p$  un nombre fini,  $E$  la base des logarithmes népériens.

Ce développement asymptotique de  $\Gamma(n+p)$  jouit de la propriété de pouvoir être différentié par rapport à  $p$ , en sorte que le développement asymptotique de  $\frac{d^r \Gamma(n+p)}{dp^r}$  s'obtient en dérivant  $r$  fois, terme à terme, le développement de  $\Gamma(n+p)$ , par rapport à  $p$ .

4. M. Darboux a étendu, dans son Mémoire, le résultat de Laplace concernant la valeur approchée des intégrales de la forme

$$\int f(z) \varphi^n(z) dz,$$

où il entre un facteur élevé à une haute puissance, au cas des intégrales à limites imaginaires.

THÉORÈME II. — *L'intégrale  $\int f(z) \varphi^n(z) dz$  étant prise le long d'un chemin d'intégration donné, supposons que l'on puisse déformer ce chemin de façon à le faire passer par un point  $a$ , autre qu'une des limites de l'intégrale, jouissant des propriétés suivantes : 1° la plus grande valeur de  $|\varphi(z)|$  le long du nouveau contour a lieu en  $a$ ; 2°  $\varphi'(a) = 0$ ; 3° les fonctions  $\varphi(z)$  et  $f(z)$  sont holomorphes autour du point  $a$ . Dans ces conditions la valeur asymptotique de l'intégrale est la suivante*

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int f(z) \varphi^n(z) dz \\ &= \sqrt{-2 \frac{\varphi}{\varphi''}} \sqrt{\frac{\pi}{n}} \left\{ f + \frac{1}{2n} \left[ -\frac{3}{4} f + \frac{\varphi}{\varphi''} \left( \frac{1}{4} \frac{f \varphi^{IV}}{\varphi''} - \frac{5}{12} \frac{f \varphi'''^2}{\varphi''^2} + \frac{f' \varphi'''}{\varphi''} - f'' \right) \right] + \dots \right\}. \end{aligned} \right.$$

Dans cette expression,  $n$  désigne un grand nombre positif quelconque; les lettres  $f, f', \dots, \varphi, \varphi'', \dots$  sont mises à la place de  $f(a), f'(a), \dots, \varphi(a), \varphi''(a), \dots$

Le nouveau contour passe quelquefois par plusieurs points, analogues à  $a$ , dont les affixes satisfont à l'équation  $|\varphi(z)| = |\varphi(a)|$ . Il faut alors calculer le second membre de la formule (6) pour chacun de ces points. La valeur asymptotique de l'intégrale est égale à la somme des résultats (1).

Le radical  $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$  est susceptible de deux déterminations. La règle suivante donne le moyen de choisir entre ces déterminations. Soit  $\omega$  l'angle que fait, avec la partie positive de l'axe des abscisses, la tangente menée au contour au point  $a$ , dans le sens du mouvement de la variable d'intégration.

Si  $\omega$  est compris entre  $-\frac{\pi}{4}$  et  $+\frac{\pi}{4}$ , la partie réelle de  $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$  est positive.

Si  $\omega$  est compris entre  $\frac{\pi}{4}$  et  $\frac{3\pi}{4}$ , la partie imaginaire de  $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$  est positive.

Si  $\omega$  est compris entre  $\frac{3\pi}{4}$  et  $\frac{5\pi}{4}$ , la partie réelle de  $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$  est négative.

Si  $\omega$  est compris entre  $\frac{5\pi}{4}$  et  $\frac{7\pi}{4}$ , la partie imaginaire de  $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$  est négative.

5. Avant de quitter ce sujet il y a lieu de donner quelques indications sur la façon dont varie  $|\varphi(z)|$  dans le voisinage d'un point  $a$  pour lequel  $\varphi'(a) = 0$ .

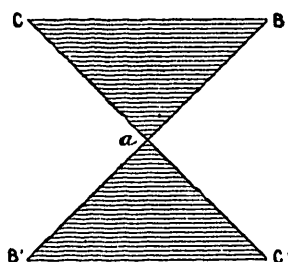
Il existe deux droites rectangulaires passant par  $a$  et divisant le plan en régions jouissant de propriétés différentes. Dans l'une de ces régions  $CaB'$ ,  $BaC'$ , par exemple (*fig. 3*),  $|\varphi(z)|$  passe par un maximum pour  $z = a$ , lorsque  $z$  suit un contour tracé dans cette région, au moins dans le voisinage de  $a$ . Dans la seconde région,  $CaB$ ,  $C'aB'$ ,  $|\varphi(z)|$  passe, au contraire, par un minimum pour  $z = a$ . Lorsque la variable complexe  $z$  suit l'une des droites  $CC'$  ou  $BB'$ ,  $|\varphi(z)|$  s'infléchit pour  $z = a$ .

---

(1) Ce théorème est applicable lorsque  $f(z)$  et  $\varphi(z)$  dépendent de  $n$ , à condition que ces fonctions demeurent finies lorsque  $n$  croît indéfiniment.

Il résulte de là que, quel que soit le contour qui passe par  $a$ , la dérivée de  $|\varphi(z)|$ , par rapport à la variable indépendante réelle dont dépend le point  $z$  lorsqu'il chemine sur ce contour, devient nulle lorsque cette variable atteint la valeur qui rend  $z$  égal à  $a$ .

Fig. 3.



*Réciproquement*, considérons une fonction  $\varphi(z)$ , holomorphe dans le voisinage d'un point d'affixe  $a$ , et deux contours  $C, C'$  passant par ce point dans des directions différentes. Formons l'expression de  $|\varphi(z)|$  le long du contour  $C$  et admettons que la dérivée de  $|\varphi(z)|_C$ , par rapport au paramètre réel dont dépend la variable complexe  $z$  le long de ce contour, soit nulle lorsque ce paramètre reçoit la valeur qui rend  $z$  égal à  $a$ .

Admettons que les mêmes circonstances se présentent pour le contour  $C'$ .

Il arrive alors que  $a$  est racine de l'équation  $\varphi'(z) = 0$ .

J'ai dû me borner à énoncer ici les propositions sur lesquelles sont fondées mes recherches présentes sur le développement approché de la fonction perturbatrice.

Je me propose de revenir sur ces méthodes d'approximation qui peuvent être étendues de manière à fournir, dans des circonstances très générales, la valeur approchée des intégrales définies où il entre un facteur élevé à une haute puissance.

# I.

6. Étant donnée une fonction réelle  $F_0(\zeta_1, \zeta)$  de période  $2\pi$  par rapport à chacune des variables  $\zeta_1, \zeta$ , on peut la développer sous la



forme suivante, en appelant  $B_{p_1, p}$  et  $C_{p_1, p}$  des coefficients constants,

$$F_0(\zeta_1, \zeta) = \sum_{p_1} \sum_p B_{p_1, p} \cos(p_1 \zeta_1 + p \zeta) + \sum_{p_1} \sum_p C_{p_1, p} \sin(p_1 \zeta_1 + p \zeta).$$

Si l'on remplace les lignes trigonométriques en fonction d'exponentielles imaginaires, il vient, en désignant toujours par  $E$  la base des logarithmes népériens et par  $i$  le symbole  $\sqrt{-1}$ ,

$$(1) \quad F_0(\zeta_1, \zeta) = \sum_{p_1} \sum_p A_{p_1, p} E^{i(p_1 \zeta_1 + p \zeta)},$$

en posant

$$\begin{aligned} B_{p_1, p} - i C_{p_1, p} &= 2 A_{p_1, p}, \\ B_{p_1, p} + i C_{p_1, p} &= 2 A_{-p_1, -p}. \end{aligned}$$

Si donc on développe  $F_0(\zeta_1, \zeta)$  sous la forme (1), le double de la partie réelle de  $A_{p_1, p}$  donne le coefficient  $B_{p_1, p}$  et le double du coefficient de  $-i$  dans  $A_{p_1, p}$  donne le coefficient  $C_{p_1, p}$ .

En particulier, pour résoudre le problème énoncé dans l'avant-propos du présent travail, il faut calculer  $A_{m_1, m}$ .

Nous supposons, dans la suite,  $m_1 > 0$ , le nombre  $m$  pouvant être positif ou négatif.

## 7. Posons

$$(2) \quad \frac{m}{m_1} = 0, \quad E^{\zeta} = t, \quad E^{i\zeta_1} = t^{-1} x, \quad F_1(x, t) = t^{-1} F_0(\zeta_1, \zeta).$$

Considérons les intégrales

$$(3) \quad J_1 = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{F_1(x, t)}{x^{m_1+1}} dx,$$

$$(4) \quad I = \frac{1}{2i\pi} \int J_1 dt,$$

prises, la première le long de la circonférence  $|x| = 1$ , la seconde le long de la circonférence  $|t| = 1$ .

On a, d'après les formules (1) et (2),

$$J_1 = \sum_{p_1} \sum_p A_{p_1, p} t^{p - \theta p_1 - 1} \frac{1}{2i\pi} \int_{|x|=1} x^{p_1 - m_1} \frac{dx}{x}.$$

L'intégrale est nulle tant que  $p_1 \geq m_1$ , et a pour valeur  $2i\pi$  pour  $p_1 = m_1$ . On peut donc écrire

$$(3)' \quad J_1 = \sum_p A_{m_1, p} t^{p - \theta m_1 - 1},$$

ou, en observant que  $\theta m_1 = m$ , d'après la première formule (2),

$$(5) \quad J_1 = \sum_p A_{m_1, p} t^{p - m - 1}.$$

Remplaçons  $J_1$  par cette expression dans la formule (4). Il vient

$$I = \sum_p A_{m_1, p} \frac{1}{2i\pi} \int_{|t|=1} t^{p - m} \frac{dt}{t}.$$

L'intégrale est nulle tant que  $p \geq m$ ; elle a pour valeur  $2i\pi$  lorsque  $p = m$ .

On a donc

$$I = A_{m_1, m}.$$

La détermination de  $A_{m_1, m}$  est ainsi ramenée au calcul de l'intégrale (4); c'est ce qui va maintenant nous occuper.

Voici d'abord quelques remarques qui seront utilisées dans la suite du présent travail.

La valeur de l'intégrale (4) ne dépend pas de la détermination de  $t^{-\theta}$  adoptée dans les formules (2) (ces déterminations sont au nombre de  $m_1$  lorsque  $m$  et  $m_1$  sont premiers entre eux). On en voit la raison en examinant la formule (3)', où  $t^{-\theta}$  se trouve élevé à la puissance  $m_1$ . Afin de fixer les idées, nous pouvons convenir de partir du point  $t = 1$ ,

dans le plan de la variable  $t$ , avec la détermination de  $t^0$  qui a pour valeur 1.

Le développement (1) est valable pour les valeurs réelles de  $\zeta$ , et de  $\zeta$ . En y introduisant les nouvelles variables  $t$  et  $x$ , au moyen des formules (2), le développement converge donc forcément lorsque  $|t|=1$  et  $|x|=1$ .

D'après les formules (1) et (2), le développement de  $F_1(x, t)$  ne contient que des puissances entières de la variable  $x$ . Cette fonction reprend donc sa valeur lorsque le point  $x$ , après avoir parcouru la circonférence  $|x|=1$  en entier, revient au point de départ.

Dans le calcul de  $J_1$ , on pourra par suite déformer la circonférence  $|x|=1$  arbitrairement, à la condition d'éviter de faire traverser à ce contour variable les points singuliers de  $\frac{F_1(x, t)}{x^{m_1+1}}$  en tant que fonction de  $x$ .

Voici une autre remarque qui a également une grande importance.

La formule (5) donne le développement de la fonction  $J_1$ , suivant les puissances de  $t$ . Ce développement, qui est valable pour  $|t|=1$ , contient uniquement des puissances entières de  $t$ .  $J_1$  reprend donc sa valeur lorsque la variable  $t$ , après avoir décrit la circonférence  $|t|=1$  en entier, revient au point de départ. Dans le calcul de  $I$  on pourra donc déformer la circonférence  $|t|=1$  d'une façon arbitraire, pourvu que l'on évite de faire traverser à ce contour variable les points singuliers de  $J_1$ .

8. Dans le problème qui doit nous occuper,  $\zeta$  et  $\zeta_1$  sont les anomalies moyennes des deux planètes  $P, P_1$ .

A la variable  $t$  nous allons en substituer une autre,  $z$ , définie par

$$z = E^{iu}.$$

L'équation de Kepler  $u - e \sin u = \zeta$  donne en faisant  $e = \sin \psi$  et tenant compte de la seconde formule (2),

$$(6) \quad \begin{cases} E^{\zeta} = t = z E^{-\frac{\sin \psi}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right)}, \\ \frac{dt}{t} = -\frac{\sin \psi}{2 z^2} \left( z - \tan \frac{\psi}{2} \right) \left( z - \cot \frac{\psi}{2} \right) dz. \end{cases}$$

Les formules connues du mouvement elliptique <sup>(1)</sup> ( $\varpi$  anomalie vraie,  $r$  rayon vecteur,  $a$  demi grand axe de P),

$$\begin{aligned} r \cos \varpi &= a(\cos u - e), \\ r \sin \varpi &= a \sqrt{1 - e^2} \sin u, \\ r &= a(1 - e \cos u), \end{aligned}$$

se changent en

$$(7) \quad \begin{cases} r E^{i\psi} = \frac{a \cos^2 \frac{\psi}{2}}{z} \left( z - \tan \frac{\psi}{2} \right)^2, \\ r E^{-i\psi} = \frac{a \sin^2 \frac{\psi}{2}}{z} \left( z - \cot \frac{\psi}{2} \right)^2, \\ r = -\frac{a \sin \psi}{2z} \left( z - \tan \frac{\psi}{2} \right) \left( z - \cot \frac{\psi}{2} \right). \end{cases}$$

Ces formules seront bientôt utilisées.

Effectuons dans l'intégrale (4) le changement de variable défini par les formules (6).

Aux valeurs réelles de  $\zeta$  correspondent pour  $u$  des valeurs réelles; il en résulte que  $|z| = 1$  lorsque  $|t| = 1$ .

Le contour d'intégration que doit suivre la variable nouvelle  $z$  est donc la circonférence  $|z| = 1$  qui est la transformée de la circonférence  $|t| = 1$ . En posant

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{m}{m_1} = 0, & E^{\sqrt{-1}\zeta} = t = z E^{-\frac{\sin \psi}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right)}, & E^{\sqrt{-1}\zeta_1} = t^0 x, \\ F(x, z) = -\frac{\sin \psi}{2z^2} \left( z - \tan \frac{\psi}{2} \right) \left( z - \cot \frac{\psi}{2} \right) F_0(\zeta_1, \zeta), \end{cases}$$

on peut écrire l'expression (4) de I

$$(9) \quad I = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} J dz,$$

---

<sup>(1)</sup> TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, t. I, p. 101 et 103.

en faisant

$$(10) \quad J = \frac{1}{2i\pi} \int_{|x|=1} \frac{F(x, z)}{x^{m_1+1}} dx.$$

Nous avons fait observer que  $J$ , est une fonction uniforme de  $t$  dans le voisinage de la circonférence  $|t|=1$ . En remplaçant, dans cette fonction,  $t$  par sa valeur (8), uniforme en  $z$ ,  $J$ , devient une fonction uniforme de  $z$  dans le voisinage de la circonférence  $|z|=1$ . Or on a, d'après les formules (10), (8), (3), (2),

$$J = -\frac{\sin \psi}{2z^2} \left( z - \tan \frac{\psi}{2} \right) \left( z - \cot \frac{\psi}{2} \right) t J_1;$$

donc  $J$  est une fonction uniforme de  $z$  dans le voisinage de la circonférence  $|z|=1$ , c'est-à-dire reprend sa valeur, lorsque la variable  $z$ , après avoir décrit en entier la circonférence  $|z|=1$ , revient au point de départ.

## II.

9. Appliquons les considérations qui précèdent au problème particulier énoncé dans l'avant-propos de ce Mémoire.

Appelons  $a_1$  et  $\zeta_1$  le rayon vecteur et l'anomalie moyenne de la planète  $P_1$  qui décrit l'orbite circulaire;  $r$ ,  $a$ ,  $e = \sin \psi$ ,  $\zeta$ ,  $u$ ,  $\omega$ , le rayon vecteur, le demi grand axe, l'excentricité, l'anomalie moyenne, l'anomalie excentrique, l'anomalie vraie de la planète  $P$ . On peut supposer, puisque l'excentricité de  $P_1$  est nulle, que le périhélie de cette planète et celui de la planète  $P$  ont même longitude.

Le carré de la distance de  $P_1$  et de  $P$  a ainsi pour valeur

$$\Delta = a_1^2 + r^2 - 2a_1r(\cos \zeta_1 \cos \omega + \sin \zeta_1 \sin \omega).$$

$r$ ,  $\omega$ ,  $u$  étant supposés exprimés en fonction de  $\zeta$ , on a dans le cas actuel

$$F_0(\zeta_1, \zeta) = \frac{f_1(E^i \zeta_1) f(E^i u)}{[a_1^2 + r^2 - 2a_1r(\cos \zeta_1 \cos \omega + \sin \zeta_1 \sin \omega)]^s}.$$

On en déduit, après l'introduction des notations (8),

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x, z) = & - \left[ \frac{x}{-a_1 r E^{-i\omega} t^{-\theta} x^2 + (a_1^2 + r^2) x - a_1 r E^{i\omega} t^{\theta}} \right]^s \\ & \times \frac{\sin \psi}{2 z^2} \left( z - \cot \frac{\psi}{2} \right) \left( z - \tan g \frac{\psi}{2} \right) f_1(t^{-\theta} x) f(z), \end{aligned} \right.$$

$r, \omega, t$  étant maintenant des fonctions de  $z$  définies par les formules (7).

Posons, eu égard aux formules (6) et (7),

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu &= t^{\theta} \frac{a_1}{r} E^{i\omega} = \frac{1}{\varphi(z)}, \\ \nu &= t^{\theta} \frac{r}{a_1} E^{i\omega} = \frac{1}{\varphi(z)} \frac{r^2}{a_1^2}, \\ \alpha &= \frac{a}{a_1} < 1, \\ \varphi(z) &= \alpha \frac{\sin^2 \frac{\psi}{2}}{z} \left( z - \cot \frac{\psi}{2} \right)^2 \left[ z E^{-\frac{\sin \psi}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right)} \right]^{-\theta}. \end{aligned} \right.$$

Lorsque  $|z| = 1$ , on a

$$|\mu| > 1, \quad |\nu| < 1;$$

car,  $\omega$  et  $r$  étant alors réels et  $|t| = 1$ , on a, puisque l'orbite de  $P_1$  enveloppe l'orbite de  $P$ ,

$$|\mu| = \frac{a_1}{r} > 1, \quad |\nu| = \frac{r}{a_1} < 1.$$

En introduisant ces notations dans  $F(x, z)$ , il vient, en tenant compte des formules (7),

$$(11)' \quad F(x, z) = \left[ \frac{\mu x}{-a_1^2 (x - \mu)(x - \nu)} \right]^s \frac{1}{z} \frac{r}{a} f_1(t^{-\theta} x) f(z)$$

ou

$$(11)'' \quad F(x, z) = \left\{ \frac{x \varphi(z)}{-a_1^2 [x \varphi(z) - 1] \left[ x \varphi(z) - \frac{r^2}{a_1^2} \right]} \right\}^s \frac{1}{z} \frac{r}{a} f_1(t^{-\theta} x) f(z).$$

Dans ces formules le premier facteur élevé à la puissance  $s$  est l'expression de  $\frac{1}{\Delta^s}$  en fonction de  $x$  et de  $z$ .

10. Les points singuliers de  $F(x, z)$  en tant que fonction de  $x$  sont pour  $|z|=1$  : les points  $x=\infty$  et  $x=\mu$ , à l'extérieur de la circonférence  $|x|=1$ , et, à l'intérieur de cette circonférence, les points  $x=\nu$ ,  $x=0$ .

Cela étant, considérons l'intégrale (10)

$$2i\pi J = \int_{|x|=1} \frac{F(x, z)}{x^{m_1+1}} dx.$$

$J$  est une fonction uniforme de  $z$  lorsque  $|z|$  est voisin de 1 <sup>(1)</sup>. Quels sont les points singuliers de cette fonction? Ces points singuliers s'obtiennent en écrivant que deux des points singuliers de  $\frac{F(x, z)}{x^{m_1+1}}$ , en tant que fonction de  $x$ , l'un intérieur, l'autre extérieur au contour d'intégration, se confondent <sup>(2)</sup>. Ils vérifient par suite les équations

$$\mu = 0, \quad \nu = \infty, \quad \mu = \nu.$$

On doit y joindre les valeurs  $z=0$ ,  $z=\infty$  pour lesquelles le polynôme  $\frac{r}{\alpha z} f(z)$ , en  $z$  et  $\frac{1}{z}$  devient infini. Ces valeurs sont également des points critiques pour  $t^0$  (8) et, par suite, pour  $f_1(t^{-9}x)$  pour  $\mu$  et pour  $\nu$  (12) qui rentrent dans l'expression de  $F(x, z)$ .

L'équation  $\mu=0$  équivaut (12) à  $\varphi(z)=\infty$  qui n'admet pas de solutions en dehors de  $z=0$ ,  $z=\infty$ .

L'équation  $\nu=\infty$ , comme on s'en assure aisément en partant des formules (12) et (7), n'est vérifiée que par  $z=0$  et  $z=\infty$ .

L'équation  $\mu=\nu$  se décompose en deux

$$r = a_1 \quad \text{et} \quad r = -a_1,$$

ou,

$$(13) \quad \begin{cases} \text{pour } r = a_1, & \alpha \sin \psi z^2 + 2(1-\alpha)z + \alpha \sin \psi = 0; \\ \text{pour } r = -a_1, & \alpha \sin \psi z^2 - 2(1+\alpha)z + \alpha \sin \psi = 0. \end{cases}$$

(1) Se reporter au n° 7.

(2) POINCARÉ, *Les nouvelles méthodes de la Mécanique céleste*, t. I, p. 282.

En résumé, les points singuliers de  $J$  sont :  $z = 0$ ,  $z = \infty$  et les valeurs de  $z$  qui vérifient les équations (13).

**11. Application de la méthode de M. Darboux à  $J$ .** — Nous ferons ultérieurement suivre à  $z$  un chemin coupant l'axe des abscisses en deux points qui séparent respectivement les racines de chacune des équations (13). Ce chemin s'obtiendra en déformant la circonférence  $|z| = 1$ , d'une façon continue, sans jamais rencontrer les points singuliers de  $J$ .

Pour ces valeurs de  $z$ , le point  $\mu$  ne reste plus nécessairement à l'extérieur de la circonférence  $|x| = 1$ , ni le point  $\nu$  à l'intérieur. Mais on peut, à tout instant, déformer le contour le long duquel est prise l'intégrale  $J$ , de façon que  $\mu$  demeure à l'extérieur,  $\nu$  et l'origine à l'intérieur de ce contour. Effectivement, les passages compris entre l'origine et le point  $\mu$ , entre le point  $\nu$  et l' $\infty$ , entre les points  $\mu$  et  $\nu$ , que le contour traverse lorsque  $|z| = 1$ , demeurent constamment libres, puisque  $z$  ne rencontre aucun des points singuliers de  $J$ . Il convient d'ajouter que le point  $\nu$  ne peut venir se placer sur le prolongement de la droite qui joint l'origine au point  $\mu$  <sup>(1)</sup>. Le point  $\nu$ , en circulant, ne peut donc pas enrouler, autour du point  $\mu$ , le contour le long duquel est prise l'intégrale  $J$ . Il en résulte que ce contour rencontre, en un seul point, la droite qui joint au point  $\mu$  l'origine des  $x$ . Ce point peut donc servir à évaluer l'intégrale  $J$ , en appliquant la méthode de M. Darboux.

Le développement de  $F(x, z)$ , dans le voisinage de  $\mu$ , est, en remplaçant  $\frac{\mu - \nu}{\mu}$  par sa valeur déduite des formules (12),

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x, z) &= \frac{1}{z} \frac{r}{a} f_1(t^{-\theta} \mu) f(z) (a_1^2 - r^2)^{-s} \left(1 - \frac{x}{\mu}\right)^{-s} \\ &\times \left[ 1 + \text{des termes où } \left(1 - \frac{x}{\mu}\right) \text{ entre en facteur} \right]. \end{aligned} \right.$$

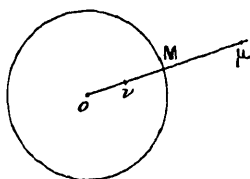
---

<sup>(1)</sup> Cela résulte de l'expression  $\nu - \mu = -\mu(a_1^2 - r^2)$  [form. (12)], qui permet de construire le point  $\nu$  en partant du point  $\mu$ , et de ce que celui des arguments de  $a_1^2 - r^2$  qui est nul, lorsque ce binôme est réel, est toujours inférieur à  $\pi$  et supérieur à  $-\pi$  (n° 20, *Remarque*).



Le produit  $(a_1^2 - r^2)^{-s} \left(1 - \frac{x}{\mu}\right)^{-s}$  est susceptible de deux déterminations puisque  $s$  est de la forme  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ ; il faut donc faire un choix préalable entre ces déterminations. Plaçons-nous à cet effet dans l'hypothèse où  $|z| = 1$ , cas où  $r$  est réel. Les formules (12) montrent que  $\mu$  et  $\nu$  ont même argument. Figurons ces points dans le plan, la circonférence  $|x| = 1$  et le point M (fig. 4) où la droite  $\mu\nu$  la rencontre. Lorsque  $x$  varie sur la droite  $\mu\nu$ , entre  $\mu$  et  $\nu$ , l'argument

Fig. 4.



de  $x$ , celui de  $x - \mu$  et celui de  $x - \nu$  demeurent invariables. L'expression (11)' de  $F(x, z)$  montre de suite que l'argument du facteur élevé à la puissance  $s$  est lui-même invariable. Or, lorsque  $x$  vient en M, le facteur en question est réel et positif comme égal à la distance réelle des planètes; il est donc réel et positif lorsque  $x$  est l'affixe d'un point quelconque du segment  $\mu\nu$ .

En convenant de prendre dans le développement (14) la détermination de  $\left(1 - \frac{x}{\mu}\right)^{-s}$  qui est réelle et positive le long de  $o\mu$ , la condition à laquelle nous venons d'arriver conduit à prendre celle des déterminations de  $(a_1^2 - r^2)^{-s}$  qui est positive et réelle pour  $|z| = 1$ .

En partant de la formule (14), on a, d'après la méthode de M. Darboux <sup>(1)</sup>,

$$J = \frac{1}{z} \frac{r}{a} f_1(t^0 \mu) f(z) (a_1^2 - r^2)^{-s} \\ \times \left[ \text{coefficient de } x^{m_1} \text{ dans } \left(1 - \frac{x}{\mu}\right)^{-s} \right. \\ \left. + \text{un terme de l'ordre de } \frac{m_1^{s-2}}{\mu^{m_1}} \right].$$

(1) Se reporter au n° 2.

En remplaçant dans la formule (A) (Introd.)  $\alpha$  par  $\mu$ ,  $h$  par  $-s$  et conservant seulement le terme principal, il vient, d'après les formules (12) et (7),

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} J = \frac{1}{m_1^{1-s}} \varphi^{m_1}(z) \Psi(z) \left(1 + \frac{R}{m_1}\right), \\ \text{en faisant} \\ \Psi(z) = \frac{1}{z} \frac{r}{\alpha} f_1 \left[ \frac{z}{\alpha \sin^2 \frac{\psi}{2} \left(z - \cot \frac{\psi}{2}\right)^2} \right] f(z) \frac{(a_1^2 - r^2)^{-s}}{\Gamma(s)}, \end{array} \right.$$

$R$  restant fini lorsque  $m_1$  augmente indéfiniment.

Cette expression de  $J$  n'est pas valable pour les valeurs  $z = 0$ ,  $z = \infty$  ni pour les valeurs de  $z$  qui satisfont aux équations (13). Il faut y joindre la valeur  $z = \cot \frac{\psi}{2}$  qui rend  $\mu$  infini, car la méthode de M. Darboux ne s'applique que lorsque le point  $\mu$  est à distance finie.

L'expression (15) de  $J$  est une identité, du moment où  $R$  est une fonction de  $z$  convenablement choisie. Nous répétons que cette fonction  $R$  reste finie lorsque  $m_1$  augmente indéfiniment, d'après le théorème de M. Darboux, sauf pour les valeurs de  $z$  qui viennent d'être mentionnées.

La fonction  $\varphi(z)$  (12) est holomorphe pour toute valeur de  $z$ , sauf pour  $z = 0$ ,  $z = \infty$ , et ne devient nulle que pour  $z = 0$ ,  $z = \infty$ ,  $z = \cot \frac{\psi}{2}$ .  $J$  est holomorphe pour toute valeur de  $z$ , sauf pour  $z = 0$ ,  $z = \infty$  et les racines des équations (13) (1). D'après l'identité (15), la fonction  $\left(1 + \frac{R}{m_1}\right) \Psi(z)$  est donc holomorphe pour toute valeur de  $z$ , sauf pour  $z = 0$ ,  $z = \infty$ ,  $z = \cot \frac{\psi}{2}$ , et pour les racines des équations (13). La fonction  $R \Psi(z)$  jouit des mêmes propriétés, la fonction  $\Psi(z)$  n'ayant manifestement pas de points singuliers en dehors de  $z = 0$ ,  $z = \infty$ ,  $z = \cot \frac{\psi}{2}$  et des valeurs de  $z$  qui annulent  $\alpha_1^2 - r^2$ , c'est-à-dire des racines des équations (13).

---

(1) Se reporter au n° 10.

En résumé, les fonctions  $\varphi(z)$ ,  $\Psi(z)$ ,  $R\Psi(z)$  sont holomorphes, sauf dans le voisinage des valeurs de  $z$  pour lesquelles l'expression (15) de  $J$  cesse d'être valable.

### III.

**12.** La fonction  $\varphi(z)$  joue un rôle essentiel dans la suite de ce travail. Nous commencerons par étudier sa dérivée.

On tire de l'équation (12)

$$(16) \quad 2z^2 \left( z - \cot \frac{\psi}{2} \right) \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = U(z),$$

en posant

$$(17) \quad U(z) = \theta \sin \psi \left( z - \tan \frac{\psi}{2} \right) \left( z - \cot \frac{\psi}{2} \right)^2 + 2z \left( z + \cot \frac{\psi}{2} \right).$$

*Discussion de l'équation*  $U(z) = 0$ . — Cette équation, du troisième degré en  $z$ , peut se mettre sous la forme

$$0 = - \frac{2}{\sin \psi} \frac{z \left( z + \cot \frac{\psi}{2} \right)}{\left( z - \tan \frac{\psi}{2} \right) \left( z - \cot \frac{\psi}{2} \right)^2};$$

on en tire

$$\frac{d\theta}{dz} = - \frac{2}{\sin \psi} \frac{\left[ \left( z - \tan \frac{\psi}{2} \right) \left( 2z + \cot \frac{\psi}{2} \right) - z \left( z + \cot \frac{\psi}{2} \right) \right] \left( z - \cot \frac{\psi}{2} \right) - 2z \left( z + \cot \frac{\psi}{2} \right) \left( z - \tan \frac{\psi}{2} \right)}{\left( z - \tan \frac{\psi}{2} \right)^2 \left( z - \cot \frac{\psi}{2} \right)^3}.$$

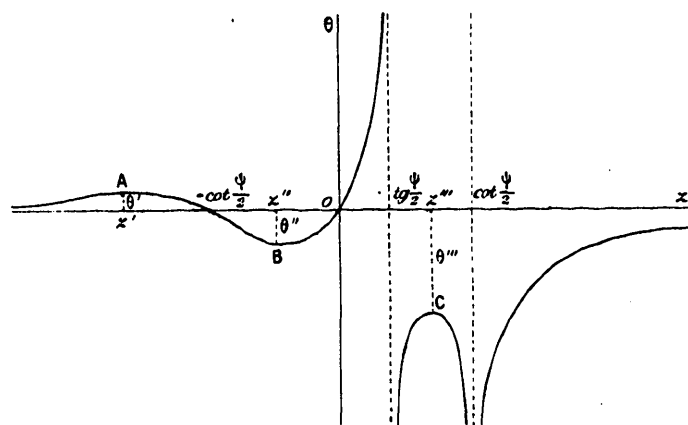
Le numérateur de  $\frac{d\theta}{dz}$ , du troisième degré en  $z$ , a ses racines réelles, savoir  $z = z' \left( -\infty < z' < -\cot \frac{\psi}{2} \right)$ ,  $z = z'' \left( -\cot \frac{\psi}{2} < z'' < 0 \right)$ ,  $z = z''' \left( \tan \frac{\psi}{2} < z''' < \cot \frac{\psi}{2} \right)$ .

Nous trouverons plus loin  $z'$ ,  $z''$ ,  $z'''$  et les valeurs correspondantes  $\theta'$ ,  $\theta''$ ,  $\theta'''$  de  $\theta$ .

En considérant  $\theta$  comme l'ordonnée d'une courbe dont  $z$  est l'abscisse, on construit immédiatement la *fig. 5*, en observant que l'ordonnée est maximum pour  $z = z'$ , minimum pour  $z = z''$  et  $z = z'''$ .

En coupant la courbe par une parallèle à l'axe des abscisses, à une distance de cet axe égale à la valeur de  $\theta$  qui figure dans l'équa-

Fig. 5.



tion  $U = 0$ , les racines de cette équation sont figurées géométriquement par les abscisses des points de rencontre.

Le nombre  $m$ , des formules (2) et (8) est positif par hypothèse. Supposons : 1°  $m < 0$  et par conséquent  $\theta < 0$ .

On voit sur la *fig. 5* que l'équation  $U = 0$  a toujours une racine positive supérieure à  $\cot \frac{\psi}{2}$  qui croît lorsque  $\theta$  croît. Les deux autres racines sont : réelles et comprises entre  $\tan \frac{\psi}{2}$  et  $\cot \frac{\psi}{2}$  si  $\theta$  est inférieur à l'ordonnée  $\theta'''$  du point C ; imaginaires si  $\theta$  est compris entre  $\theta'''$  et l'ordonnée  $\theta''$  du point B ('); réelles et comprises entre  $-\cot \frac{\psi}{2}$  et 0 si  $\theta$  est supérieur à  $\theta''$ .

Supposons : 2°  $m > 0$ , d'où  $\theta > 0$ .

L'équation  $U = 0$  a toujours une racine positive comprise entre 0 et  $\tan \frac{\psi}{2}$  qui croît avec  $\theta$ . Les deux autres racines sont : réelles et comprises entre  $-\infty$  et  $-\cot \frac{\psi}{2}$  si  $\theta < \theta'$  ; imaginaires si  $\theta > \theta'$ .

(1)  $\theta'''$  est nécessairement inférieur à  $\theta''$ , sans quoi l'équation aurait plus de trois racines pour les valeurs de  $\theta$  comprises entre  $\theta''$  et  $\theta'''$ .

Faisons dans (17)

$$(18) \quad z = \cot \frac{\psi}{2} \frac{\nu + 1}{\nu - 1}.$$

L'équation  $U = 0$  devient

$$(19) \quad \nu^3 - (1 - 2\theta \cos \psi)\nu + 2\theta = 0.$$

Remarquons que

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \nu \text{ croissant de } -\infty \text{ à } -1, & z \text{ décroît de } \cot \frac{\psi}{2} \text{ à } 0, \\ \text{Id.} & -1 \text{ à } +1, \quad \text{Id.} \quad 0 \text{ à } -\infty, \\ \text{Id.} & +1 \text{ à } +\infty, \quad \text{Id.} \quad +\infty \text{ à } +\cot \frac{\psi}{2}. \end{array} \right.$$

Cela étant, pour que l'équation  $U = 0$  ait une racine double, il faut et il suffit que l'équation (19) ait une racine double.  $\theta'$ ,  $\theta''$ ,  $\theta'''$  vérifient donc l'équation

$$(21) \quad 27\theta^2 = (1 - 2\theta \cos \psi)^3,$$

que l'on peut écrire, en prenant la racine cubique arithmétique des deux membres,

$$(21)' \quad \left[ \frac{1}{\theta^{\frac{1}{3}}} \right]^3 - \frac{3}{\theta^{\frac{1}{3}}} - 2 \cos \psi = 0.$$

Cette équation en  $\frac{1}{\theta^{\frac{1}{3}}}$  a ses racines réelles : une racine positive et deux négatives.

Les formules de résolution de l'équation du troisième degré donnent

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta' = \frac{1}{8} \sec^3 \frac{\psi}{3}, \\ \theta'' = -\frac{1}{8} \sec^3 \left( 60^\circ - \frac{\psi}{3} \right), \\ \theta''' = -\frac{1}{8} \sec^3 \left( 60^\circ + \frac{\psi}{3} \right). \end{array} \right.$$

On trouvera, à la fin du présent Mémoire, une Table donnant les valeurs de  $\theta'$ ,  $\theta''$ ,  $\theta'''$  en fonction de l'excentricité  $e = \sin \psi$ .

13. Résolution de l'équation  $U = 0$  :

1° Si  $\theta < \theta''$  les trois racines de l'équation  $U = 0$  sont réelles et positives; nous n'aurons, dans le cours de ce travail, à considérer que la plus petite.

Si  $0 > \theta > \theta''$  les trois racines sont réelles; deux sont négatives. Nous n'aurons à considérer que la plus petite de ces racines (la plus voisine de  $-\infty$ ).

Si  $0 < \theta < \theta'$  les trois racines sont réelles; deux sont négatives. Nous n'aurons à considérer que la plus grande de ces racines négatives (la racine moyenne).

Dans ces trois hypothèses, la racine que nous venons de définir sera désormais désignée par  $Z$ . Elle a pour valeur

$$(23) \quad Z = \cot \frac{\psi}{2} \frac{\nu + 1}{\nu - 1},$$

en posant

$$(24) \quad \cos \chi = -\theta \left[ \frac{1 - 2\theta \cos \psi}{3} \right]^{-\frac{3}{2}}, \quad 0^\circ < \chi < 180^\circ,$$

et

$$(25) \quad \nu = -2 \sqrt{\frac{1 - 2\theta \cos \psi}{3}} \cos \left( 60^\circ + \frac{\chi}{3} \right).$$

Pour la démonstration de ce résultat nous renvoyons à l'addition annexée à ce Mémoire.

2° Lorsque les racines de l'équation  $U = 0$  ne seront pas toutes réelles, nous désignerons par  $Z_i$  et  $Z_{-i}$  ses racines imaginaires.

Si  $\theta'' > \theta > \theta'''$  ou si  $\theta' < \theta < \frac{1}{2 \cos \psi}$  (<sup>1</sup>), ces racines sont données

(<sup>1</sup>) On a trouvé  $\theta' = \frac{1}{8 \cos^3 \frac{\psi}{3}}$ ; d'autre part,  $\cos \psi = 4 \cos^3 \frac{\psi}{3} - 3 \cos \frac{\psi}{3}$ . On

a donc bien  $\theta' < \frac{1}{2 \cos \psi}$ .

par les formules

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin 2\chi = -\frac{1}{\theta} \left[ \frac{1-2\theta \cos \psi}{3} \right]^{\frac{3}{2}}, \quad \tan \xi = \sqrt[3]{\tan \chi}, \\ \nu = -\sqrt{\frac{1-2\theta \cos \psi}{3}} \frac{1}{\sin 2\xi} + \sqrt{-1} \sqrt{1-2\theta \cos \psi} \cot 2\xi, \\ Z_i = \cot \frac{\psi}{2} \frac{\nu+1}{\nu-1}, \quad Z_{-i} = \text{la conjuguée de } Z_i. \end{array} \right.$$

Si  $\theta > \frac{1}{2 \cos \psi}$ ,  $Z_i$  et  $Z_{-i}$  sont donnés par les formules

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cot 2\chi = \theta \left[ \frac{2\theta \cos \psi - 1}{3} \right]^{-\frac{3}{2}}, \quad \tan \xi = \sqrt[3]{\tan \chi}, \\ \nu = \sqrt{\frac{2\theta \cos \psi - 1}{3}} \cot 2\xi + \sqrt{-1} \sqrt{2\theta \cos \psi - 1} \frac{1}{\sin 2\xi}, \\ Z_i = \cot \frac{\psi}{2} \frac{\nu+1}{\nu-1}, \quad Z_{-i} = \text{la conjuguée de } Z_i. \end{array} \right.$$

3° Lorsque  $\theta = \theta'$ ,  $\theta''$  ou  $\theta'''$ , l'équation  $U = 0$  a une racine double. On peut en obtenir une expression simple.

En posant pour un moment

$$(28) \quad \tau' = \theta'^{\frac{1}{3}}, \quad \tau'' = \theta''^{\frac{1}{3}}, \quad \tau''' = \theta'''^{\frac{1}{3}},$$

on a, d'après les formules (22),

$$(29) \quad \frac{1}{2} < \tau' < \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad -1 < \tau'' < -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad -\infty < \tau''' < -1.$$

On peut tirer la valeur de  $\cos \psi$  de l'équation (21)' en fonction de  $\tau'$ ,  $\tau''$  ou  $\tau'''$  et exprimer, par suite,  $\cot \frac{\psi}{2}$  en fonction de ces paramètres. On

trouve, en tenant compte des inégalités (29),

$$(30) \quad \begin{cases} \cot \frac{\psi}{2} = \frac{1-\tau'}{1+\tau'} \sqrt{\frac{2\tau'+1}{2\tau'-1}}, \\ \cot \frac{\psi}{2} = \frac{1-\tau''}{1+\tau''} \sqrt{\frac{2\tau''+1}{2\tau''-1}}, \\ \cot \frac{\psi}{2} = -\frac{1-\tau'''}{1+\tau'''} \sqrt{\frac{2\tau'''+1}{2\tau'''-1}}. \end{cases}$$

Les équations (19) et (21) donnent comme valeur de la racine double  $\varphi$  :

$$(31) \quad \begin{cases} \text{pour } \theta = \theta', & \varphi = \tau', \\ \text{pour } \theta = \theta'', & \varphi = \tau'', \\ \text{pour } \theta = \theta''', & \varphi = \tau'''. \end{cases}$$

Les équations (18), (30), (31) conduisent ensuite à

$$z' = -\sqrt{\frac{2\tau'+1}{2\tau'-1}}, \quad z'' = -\sqrt{\frac{2\tau''+1}{2\tau''-1}}, \quad z''' = \sqrt{\frac{2\tau'''+1}{2\tau'''-1}}$$

ou, en tenant compte des formules (28) et (22),

$$(32) \quad z' = -\cot \frac{\psi}{6}, \quad z'' = -\tan\left(30^\circ - \frac{\psi}{6}\right), \quad z''' = +\tan\left(30^\circ + \frac{\psi}{6}\right);$$

$z'$  correspondant à  $\theta'$ ,  $z''$  à  $\theta''$ ,  $z'''$  à  $\theta'''$ . Telles sont les abscisses des points A, B, C de la *fig.* 5 qui ont pour ordonnées  $\theta'$ ,  $\theta''$  et  $\theta'''$ .

**14.** Lorsque  $0 < \theta''$ , la plus petite racine réelle Z de l'équation  $U = 0$  est comprise entre  $\tan \frac{\psi}{2}$  et 1 puisque  $z''' < 1$ .

Le produit des racines de l'équation  $U = 0$  est indépendant de  $\theta$ ; d'ailleurs, lorsque  $\theta$  croît de  $\theta'''$  à  $\theta''$ , la racine réelle croît comme l'indique la *fig.* 5; il faut donc, par compensation, que le module des racines imaginaires  $Z_i$  et  $Z_{-i}$  décroisse. Le module de ces racines reste donc compris entre  $z'''$  et  $|z''|$ ; il est inférieur à 1.

Lorsque  $\theta$  est compris entre  $\theta''$  et 0, la plus petite racine réelle Z de l'équation  $U = 0$  est comprise entre  $-\cot \frac{\psi}{2}$  et  $z''$ .



De là, il résulte que, pour  $\theta < 0$ , la valeur absolue de  $Z$  ou le module de  $Z_i$  et de  $Z_{-i}$  est compris entre  $\cot \frac{\psi}{2}$  et  $|z''|$ . Pour que ce module soit compris entre  $\tan \frac{\psi}{2}$  et  $\cot \frac{\psi}{2}$ , il suffit que  $|z''| > \tan \frac{\psi}{2}$ . En remplaçant  $z''$  par sa valeur (32), on reconnaît que cette condition équivaut à  $\psi < 45^\circ$ , c'est-à-dire à  $e = \sin \psi < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , ou  $e < 0,707$ . C'est ce qui a lieu dans toutes les applications. Nous pourrions donc supposer la valeur absolue de  $Z$ , ou le module de  $Z_i$  et de  $Z_{-i}$ , compris entre  $\tan \frac{\psi}{2}$  et  $\cot \frac{\psi}{2}$ , lorsque  $\theta < 0$ .

Soit maintenant  $\theta > 0$ .

Si  $0 < \theta < \theta'$ , la racine moyenne  $Z$  de l'équation  $U = 0$  est comprise entre  $-\cot \frac{\psi}{2}$  et  $z'$ .

Lorsque  $\theta$  croît à partir de  $\theta'$ , on voit comme précédemment que le module des racines imaginaires  $Z_i$  et  $Z_{-i}$  décroît. Pour  $\theta = \infty$ , ce module a pour valeur  $\cot \frac{\psi}{2}$ .

Ainsi, lorsque  $\theta > 0$ , la valeur absolue de  $Z$  ou le module de  $Z_i$  et de  $Z_{-i}$  est compris entre  $\cot \frac{\psi}{2}$  et  $\cot \frac{\psi}{6}$ .

#### IV. — ÉTUDE DU MODULE DE LA FONCTION $\varphi(z)$ .

On a

$$\varphi(z) = \alpha \sin^2 \frac{\psi}{2} \frac{\left(z - \cot \frac{\psi}{2}\right)^2}{z} \left[ z E^{-\frac{\sin \psi}{2} \left(z - \frac{1}{z}\right)} \right]^{-\theta}.$$

Posons  $z = RE^{i\omega}$ . On en déduit

$$(33) \quad |\varphi(z)| = \alpha \sin^2 \frac{\psi}{2} \frac{R^2 - 2R \cot \frac{\psi}{2} \cos \omega + \cot^2 \frac{\psi}{2}}{R} \left[ RE^{-\frac{\sin \psi}{2} \cos \omega} \left(R - \frac{1}{R}\right) \right]^{-\theta}.$$

13. Étude de  $|\varphi(z)|$  le long de la circonférence de rayon  $R$ . —

On tire de l'expression (33)

$$(34) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{|\varphi(z)|} \frac{d|\varphi(z)|}{d\omega} \\ & = \sin \omega \frac{4R^2 \cot \frac{\psi}{2} - \theta \sin \psi (R^2 - 1) \left( R^2 - 2R \cot \frac{\psi}{2} \cos \omega + \cot^2 \frac{\psi}{2} \right)}{2R \left( R^2 - 2R \cot \frac{\psi}{2} \cos \omega + \cot^2 \frac{\psi}{2} \right)}. \end{aligned} \right.$$

Le second membre a le signe de l'expression

$$(35) \sin \omega \left[ 4R^2 \cot \frac{\psi}{2} - \theta \sin \psi (R^2 - 1) \left( R^2 - 2R \cot \frac{\psi}{2} \cos \omega + \cot^2 \frac{\psi}{2} \right) \right].$$

Supposons d'abord  $\theta < 0$ .

Si  $R > 1$ , le coefficient de  $\sin \omega$  est toujours positif;  $\frac{d|\varphi(z)|}{d\omega}$  a donc le signe de  $\sin \omega$ . Il en résulte que, le long de la circonférence  $R$ ,  $|\varphi(z)|$  devient maximum absolu pour  $\omega = \pi$ , minimum pour  $\omega = 0$ .

Si  $R < 1$ ,  $\frac{d|\varphi(z)|}{d\omega}$  a le signe de

$$(36) \sin \omega (\cos \omega + P),$$

en posant

$$P = \frac{2R}{-\theta \sin \psi (1 - R^2)} - \frac{R^2 + \cot^2 \frac{\psi}{2}}{2R \cot \frac{\psi}{2}}.$$

Lorsque  $R$  décroît de 1 à 0,  $P$  décroît de  $+\infty$  à  $-\infty$ , comme on s'en assure aisément. Appelons  $R_1$  la valeur de  $R$  pour laquelle  $P = -1$  et  $R_2$  la valeur de  $R$  pour laquelle  $P = 1$ .

Si  $R > R_1$ ,  $\cos \omega + P$  est essentiellement positif; l'expression (36) devient nulle pour  $\omega = 0$  et  $\omega = \pi$ . Il en résulte que, le long de la circonférence de rayon  $R$ ,  $|\varphi(z)|$  devient maximum absolu pour  $\omega = \pi$ , minimum pour  $\omega = 0$ .

Si  $R_1 > R > R_2$ , l'équation  $\cos \omega + P = 0$  a une racine  $\omega_1$  entre 0 et  $\pi$  et une racine  $2\pi - \omega_1$  entre  $\pi$  et  $2\pi$ .  $\frac{d|\varphi(z)|}{d\omega}$  a pour racines  $\omega = 0$ ,  $\omega = \omega_1$ ,  $\omega = \pi$ ,  $\omega = 2\pi - \omega_1$ . Pour  $\omega = 0$ ,  $\cos \omega + P$  est positif; il en résulte que, le long de la circonférence  $R$ ,  $|\varphi(z)|$  passe par deux

maxima absolus égaux, correspondant à  $\omega = \omega_1$  et  $\omega = 2\pi - \omega_1$ , et par deux minima qui correspondent à  $\omega = 0$ ,  $\omega = \pi$ .

Si  $R < R_2$ ,  $\cos \omega + P$  est essentiellement négatif; les racines de  $\frac{d|\varphi(z)|}{d\omega}$  sont 0 et  $\pi$ .  $|\varphi(z)|$  est maximum absolu, le long de la circonférence  $R$ , pour  $\omega = 0$ , minimum pour  $\omega = \pi$ .

Soit en second lieu  $\theta > 0$ . — Nous n'examinerons que le cas où  $R > \cot \frac{\psi}{2}$ . Lorsque  $R$  croît depuis  $\cot \frac{\psi}{2}$  jusqu'à  $+\infty$ ,  $P$  diminue depuis  $\frac{1}{\theta \cos \psi} - 1$  jusqu'à  $-\infty$ .

Lorsque  $\frac{1}{\theta \cos \psi} - 1 > 1$ ,  $P$  prend toutes les valeurs comprises entre  $+1$  et  $-1$  quand  $R$  s'éloigne assez de  $\cot \frac{\psi}{2}$ . Appelons  $R'_1$  la valeur de  $R$  pour laquelle  $P = 1$ ,  $R'_2$  la valeur de  $R$  pour laquelle  $P = -1$ ; on a

$$\cot \frac{\psi}{2} < R'_1 < R'_2.$$

Lorsque  $1 > \frac{1}{\theta \cos \psi} - 1 > -1$ ,  $P$  ne peut devenir égal à 1, mais prend la valeur  $-1$  quand  $R$  est suffisamment éloigné de  $\cot \frac{\psi}{2}$ . Appelons encore  $R'_2$  la valeur de  $R$  pour laquelle  $P = -1$ ; on a

$$\cot \frac{\psi}{2} < R'_2.$$

Si  $\cot \frac{\psi}{2} < R < R'_1$ ,  $|\varphi(z)|$  est maximum absolu pour  $\omega = \pi$ , sur la circonférence  $R$ , minimum pour  $\omega = 0$ .

Si  $R$  reçoit l'une des valeurs pour lesquelles  $P$  est compris entre  $+1$  et  $-1$ ,  $|\varphi(z)|$  passe par deux maxima égaux et absolus, le long de la circonférence  $R$ , pour  $\omega = \omega'_1$  et  $\omega = 2\pi - \omega'_1$ ;  $\omega'_1$  et  $2\pi - \omega'_1$  étant les racines de  $\cos \omega + P = 0$ .  $|\varphi(z)|$  est minimum pour  $\omega = 0$  et  $\omega = \pi$ .

Si  $R > R'_2$ ,  $|\varphi(z)|$  est maximum absolu, sur la circonférence  $R$ , pour  $\omega = 0$ , minimum pour  $\omega = \pi$ .

**16.** 1° Étude de  $|\varphi(z)|$  le long de la partie négative de l'axe

des abscisses. — Faisons  $\omega = \pi$  dans l'équation (33); il vient

$$|\varphi(z)| = \alpha \sin^2 \frac{\psi}{2} \frac{\left(R + \cot \frac{\psi}{2}\right)^2}{R} \left[ R E^{\frac{\sin \psi}{2} \left(R - \frac{1}{R}\right)} \right]^{-\theta}.$$

On en tire

$$\frac{1}{|\varphi(z)|} \frac{d|\varphi(z)|}{dR} = \frac{1}{2R^2 \left(R + \cot \frac{\psi}{2}\right)} \left[ 2R \left(R - \cot \frac{\psi}{2}\right) - \theta \sin \psi \left(R + \tan \frac{\psi}{2}\right) \left(R + \cot \frac{\psi}{2}\right)^2 \right].$$

Le facteur entre crochets donne son signe à  $\frac{d|\varphi(z)|}{dR}$  puisque  $R$  est positif. Ce facteur s'obtient en changeant  $z$  en  $-R$  dans  $U(z)$  (17). Les valeurs absolues des racines réelles négatives de  $U(z)$ , s'il y en a, sont donc racines positives de  $\frac{d|\varphi(z)|}{dR}$ .

Soit d'abord  $\theta < 0$  : Si  $\theta < \theta'$ ,  $U(z)$  n'a pas de racines négatives et, par suite,  $\frac{d|\varphi(z)|}{dR} > 0$ ;  $|\varphi(z)|$  décroît donc lorsque la variable  $z$  marche dans le sens des abscisses croissantes.

Si  $0 > \theta > \theta'$ ,  $U(z)$  a toutes ses racines réelles et deux sont négatives.  $|\varphi(z)|$  décroît, lorsque  $z$  marche dans le sens des abscisses croissantes, jusqu'à ce que  $z$  atteigne la plus petite racine  $Z$ , croît ensuite jusqu'à la seconde racine négative de  $U(z)$  qui est inférieure à 1 en valeur absolue. Ainsi  $|\varphi(z)|$  passe par un minimum lorsque  $z$ , décrivant l'axe des abscisses, passe par la plus petite racine  $Z$  de  $U(z)$  qui annule  $\varphi'(z)$ . C'est là un point essentiel.

Soit en second lieu  $\theta > 0$  : Si  $\theta < \theta'$ ,  $U(z)$  a ses racines réelles, deux sont négatives.  $|\varphi(z)|$  passe par un minimum lorsque  $z$  passe par la plus grande racine négative  $Z$  [racine moyenne de  $U(z)$ ];  $|\varphi(z)|$  croît ensuite lorsque  $z$  va de  $Z$  à l'origine.

Si  $\theta > \theta'$ ,  $U(z)$  a des racines imaginaires et pas de racine négative;  $|\varphi(z)|$  croît lorsque  $z$  marche dans le sens des abscisses croissantes.

2° Étude de  $|\varphi(z)|$  le long de la partie positive de l'axe des

*abscisses.* — Faisons  $\omega = 0$  dans l'équation (33); il vient

$$|\varphi(z)| = \alpha \sin^2 \frac{\psi}{2} \frac{\left(R - \cot \frac{\psi}{2}\right)^2}{R} \left[ R e^{-\frac{\sin \psi}{2} \left(R - \frac{1}{R}\right)} \right]^{-1}.$$

On en tire

$$\frac{1}{|\varphi(z)|} \frac{d|\varphi(z)|}{dR} = \frac{2R \left(R + \cot \frac{\psi}{2}\right) + \theta \sin \psi \left(R - \tan \frac{\psi}{2}\right) \left(R - \cot \frac{\psi}{2}\right)^2}{2R^2 \left(R - \cot \frac{\psi}{2}\right)}.$$

Le numérateur du second membre donne son signe à l'expression  $\frac{d|\varphi(z)|}{dR}$ . Ce facteur s'obtient en changeant  $z$  en  $R$  dans  $U(z)$ .

*Soit d'abord  $\theta < 0$*  : Il nous suffira de savoir comment varie  $|\varphi(z)|$  lorsque  $R < \cot \frac{\psi}{2}$  et  $\theta < \theta''$ .  $U(z)$  a ses racines réelles et positives;  $|\varphi(z)|$  ou, ce qui revient au même ici,  $\varphi(z)$  décroît donc lorsque  $z$  croît à partir de zéro et devient minimum lorsque  $z$  passe par la plus petite racine  $Z$  de  $U(z)$ , laquelle annule  $\varphi'(z)$ .

*Soit en second lieu  $\theta > 0$*  : Il nous suffira de savoir comment varie  $|\varphi(z)|$  lorsque  $R > \cot \frac{\psi}{2}$ .  $U(z)$  n'a pas de racines supérieures à  $\cot \frac{\psi}{2}$ ;  $|\varphi(z)|$  croît donc lorsque  $z$  croît à partir de  $\cot \frac{\psi}{2}$ .

**17.** De cette discussion nous allons tirer quelques conséquences :

1° Admettons que l'équation  $U(z) = 0$  ait ses racines réelles. Comment varie  $|\varphi(z)|$  le long de la circonférence  $D$  ayant l'origine pour centre et passant par le point  $Z^{(1)}$ .

On vient de voir que  $|\varphi(z)|$  devient minimum lorsque  $z$ , décrivant l'axe des abscisses, passe par le point  $Z$ . Il en résulte, puisque  $\varphi'(z) = 0$ , que  $|\varphi(z)|$  devient maximum pour  $z = Z$ , lorsque  $z$  décrit un contour normal à l'axe des abscisses au point  $Z^{(2)}$ . Ainsi  $|\varphi(z)|$  passe par un maximum pour  $z = Z$ , lorsque  $z$  décrit la circonférence  $D$ . Ce maximum se produisant pour une valeur réelle de  $z$  est unique et absolu le long

(<sup>1</sup>) Se reporter au n° 14.

(<sup>2</sup>) Se reporter au n° 5.

de la circonférence (1). Nous arrivons ainsi à cette conclusion capitale que, lorsque la variable  $z$  suit la circonférence  $D$ ,  $|\varphi(z)|$  prend sa plus grande valeur au point  $Z$  pour lequel  $\varphi'(Z) = 0$ .

2° Plaçons-nous, en second lieu, dans l'hypothèse où l'équation  $U = 0$  a des racines imaginaires. Figurons, dans le plan représentatif de la variable  $z$ , les racines  $Z_i$  et  $Z_{-i}$  et désignons maintenant par  $D$  la circonférence décrite de l'origine comme centre avec  $|Z_i|$  pour rayon.

Je dis que  $|\varphi(z)|$  passe par des maxima égaux et absolus lorsque  $z$ , cheminant sur la circonférence  $D$ , atteint les valeurs  $z = Z_i$ ,  $z = Z_{-i}$ .

En effet,  $\varphi'(z)$  étant nulle pour  $z = Z_i$  et  $z = Z_{-i}$ , la dérivée de  $|\varphi(z)|$  par rapport à la variable réelle indépendante dont dépend le point  $Z$ , le long du contour  $D$ , doit s'annuler lorsque cette variable atteint les valeurs qui rendent  $z = Z_i$ ,  $z = Z_{-i}$  (2).

La variable indépendante le long de  $D$  est l'argument  $\omega$  de  $z$ , en sorte que, si  $\omega_1$  représente l'argument de  $Z_i$ ,  $\frac{d|\varphi(z)|}{d\omega}$  est nulle pour  $\omega = \omega_1$  et  $\omega = 2\pi - \omega_1$ .  $\omega_1$  est différent de zéro et de  $\pi$ ; nous savons (1), dans ces conditions, que  $|\varphi(z)|$  est maximum absolu le long de la circonférence  $D$  pour les valeurs  $\omega = \omega_1$ ,  $\omega = 2\pi - \omega_1$ . C. Q. F. D.

Ainsi, lorsque la variable  $z$  décrit la circonférence  $D$ ,  $|\varphi(z)|$  prend sa plus grande valeur aux points  $z = Z_i$  et  $z = Z_{-i}$ , pour lesquels  $\varphi'(Z_i) = \varphi'(Z_{-i}) = 0$ .

## V.

### 18. Les racines des équations (13)

$$(13) \quad \begin{cases} \alpha \sin \psi z^2 + 2(1 - \alpha)z + \alpha \sin \psi = 0, \\ \alpha \sin \psi z^2 - 2(1 + \alpha)z + \alpha \sin \psi = 0 \end{cases}$$

sont réelles, du moment où les orbites des planètes ne se rencontrent pas en un point réel. Ces racines sont inverses deux à deux; celles de

(1) Se reporter au n° 15.

(2) Se reporter au n° 5.

la première équation sont négatives et moins écartées de la circonférence  $|z| = 1$  que les racines de la seconde équation qui sont positives.

$\alpha$  étant inférieur à 1, les nombres  $\tan \frac{\psi}{2}$ ,  $\cot \frac{\psi}{2}$  sont intérieurs aux racines de la seconde équation; les nombres  $-\tan \frac{\psi}{2}$ ,  $-\cot \frac{\psi}{2}$  sont intérieurs aux racines de la première seulement lorsque  $\alpha < \frac{1}{2}$ .

Cela étant, considérons une circonférence, de rayon variable, concentrique à l'origine, coïncidant au point de départ avec la circonférence  $|z| = 1$  et venant se confondre avec la circonférence D du Chapitre précédent. Cette circonférence variable ne rencontre pas, en chemin, les racines des équations (13) si  $\theta < 0$  et  $\alpha < \frac{1}{2}$ , vu les limites entre lesquelles sont alors compris  $|Z|$  ou  $|Z_i|$  (<sup>1</sup>). Mais, si  $\theta$  et  $\alpha$  ne vérifient pas ces inégalités, la circonférence variable peut rencontrer l'une des racines de chacune des équations (13). La première racine rencontrée appartient nécessairement à la première équation (13), puisque, des deux racines des équations (13) situées d'un même côté de la circonférence  $|z| = 1$ , la plus rapprochée de cette circonférence vérifie la première équation.

*Définition.* — Nous désignerons désormais par  $z_1$  et  $z_2$  ( $z_1 < z_2 < 0$ ) les racines de la première équation (13) et par  $z'_1$ ,  $z'_2$  celles de la seconde ( $z'_1 > z'_2 > 0$ ).

## VI.

Revenons à l'intégrale (9) prise le long de la circonférence  $|z| = 1$ ;

$$I = \frac{1}{2i\pi} \int J dz.$$

On a vu (<sup>2</sup>) que  $J$  est une fonction uniforme dans le voisinage de la circonférence  $|z| = 1$ ; ses points singuliers sont  $z = 0$ ,  $z = \infty$  et les racines des équations (13). On peut donc remplacer la circonférence

(<sup>1</sup>) Se reporter au n° 14.

(<sup>2</sup>) Se reporter au n° 8.

d'intégration  $|z| = 1$  par un autre contour  $C$ , entourant l'origine, à condition que, dans l'intervalle compris entre  $C$  et la circonférence  $|z| = 1$ , les équations (13) n'aient pas de racines.

19. En choisissant convenablement le contour  $C$ , on parvient rapidement, dans deux cas particuliers que nous examinerons tout d'abord, à l'évaluation approchée de  $I$ .

1° L'équation  $U(z) = 0$  a toutes ses racines réelles ( $\theta < \theta''$  ou  $\theta'' < \theta < \theta'$ ) et de plus  $|z_1| > |Z| > |z_2|$ .

On peut prendre, comme nouveau contour  $C$ , la circonférence  $D$  décrite de l'origine comme centre avec  $|Z|$  pour rayon. Effectivement, d'après l'hypothèse, on a, *a fortiori* <sup>(1)</sup>,  $z'_1 > |Z| > z'_2$ .

Il s'ensuit que  $J$  n'a pas de singularités dans l'espace compris entre la circonférence  $D$  et la circonférence  $|z| = 1$ , les intervalles compris entre  $|z_1|$  et  $|z_2|$ , d'une part, entre  $z'_1$  et  $z'_2$ , d'autre part, comprenant l'unité.

L'expression (15) de  $J$  est valable pour tous les points de la circonférence  $D$ . On peut donc écrire

$$I = \frac{m_1^{s-1}}{2i\pi} \int_D \Psi(z) \left(1 + \frac{R}{m_1}\right) \varphi^{m_1}(z) dz.$$

Le maximum de  $|\varphi(z)|$ , le long de  $D$ , correspond à la valeur  $z = Z$  qui annule  $\varphi'(z)$  <sup>(2)</sup>. L'expression approchée de  $I$  s'obtient donc, sur-le-champ, en appliquant le théorème II de l'Introduction. On trouve, en conservant seulement le terme principal et remarquant que le produit  $R \Psi(z)$  est fini pour  $z = Z$  <sup>(3)</sup>,

$$(37) \quad I = \frac{m_1^{s-1}}{2i\pi} \sqrt{-2 \frac{\varphi(Z)}{\varphi''(Z)}} \sqrt{\frac{\pi}{m_1}} \Psi(Z) \varphi^{m_1}(Z) \left(1 + \frac{K}{m_1}\right),$$

$K$  restant fini lorsque  $m_1$  croît indéfiniment.

2° L'équation  $U(z) = 0$  a des racines imaginaires ( $\theta'' < \theta < \theta'$  ou  $\theta' < \theta < \theta''$ ) et de plus  $|z_1| > |Z| > |z_2|$ .

<sup>(1)</sup> Se reporter au n° 18.

<sup>(2)</sup> Se reporter au n° 17.

<sup>(3)</sup> Se reporter au n° 11 et au n° 4 (note).



On peut prendre comme nouveau contour C, pour les mêmes raisons que précédemment, la circonférence D ayant pour rayon  $|Z_i| = |Z_{-i}|$ . En remplaçant J par sa valeur (15), qui est valable pour tous les points du contour D, on a

$$I = \frac{m_1^{s-1}}{2i\pi} \int_D \Psi(z) \left(1 + \frac{R}{m_1}\right) \varphi^{m_1}(z) dz.$$

Le long de D,  $|\varphi(z)|$  passe par deux maxima absolus égaux pour  $z = Z_i$  et  $z = Z_{-i}$ ; on a en outre  $\varphi'(Z_i) = \varphi'(Z_{-i}) = 0$  (1).

Il faut donc, pour avoir l'expression de I, faire la somme des résultats que l'on obtient en appliquant successivement le théorème II de l'Introduction aux points  $Z_i$  et  $Z_{-i}$ . Ainsi on a, en conservant seulement le terme principal et remarquant que  $R\Psi(z)$  est fini pour  $z = Z_i$  et  $z = Z_{-i}$  (2)

$$(37)' \quad \left\{ I = \frac{m_1^{s-1}}{2i\pi} \sqrt{\frac{\pi}{m_1}} \left[ \sqrt{-2 \frac{\varphi(Z_i)}{\varphi'(Z_i)}} \Psi(Z_i) \varphi^{m_1}(Z_i) + \sqrt{-2 \frac{\varphi(Z_{-i})}{\varphi'(Z_{-i})}} \Psi(Z_{-i}) \varphi^{m_1}(Z_{-i}) \right] \left(1 + \frac{K'}{m_1}\right), \right.$$

$K'$  restant fini lorsque  $m_1$  augmente indéfiniment.

*Remarque.* — Les radicaux qui entrent dans les formules (37) et (37)' ont un sens bien défini d'après la règle qui a été donnée dans l'Introduction. Il reste à choisir la détermination du facteur  $(\alpha_i^2 - r^2)^{-s}$  qui fait partie de  $\Psi$ .

On peut prendre l'argument de  $\alpha_i^2 - r^2$  égal à zéro pour  $|z| = 1$ , car  $(\alpha_i^2 - r^2)^{-s}$  est alors réel et positif (2). Or on a (7) et (12)

$$\begin{aligned} \alpha_i^2 - r^2 = & - \frac{\alpha_i^2}{4z^3} [\alpha \sin \psi z^2 + 2(1 - \alpha)z + \alpha \sin \psi] \\ & \times [\alpha \sin \psi z^2 - 2(1 + \alpha)z + \alpha \sin \psi]. \end{aligned}$$

Les deux facteurs entre crochets sont les premiers membres des

(1) Se reporter au n° 17.

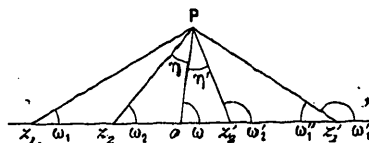
(2) Se reporter au n° 11 et au n° 4 (note).

équations (13). Figurons leurs racines en  $z_1, z_2, z'_1, z'_2$ , et joignons un point P du plan à ces points et à l'origine (fig. 6). L'argument de  $a_1^2 - r^2$  lorsque la variable  $z$  occupe la position P a pour valeur

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega'_2 + \omega'_1 - 2\omega - \pi.$$

En effet, si le point P vient sur l'axe des abscisses à une distance de l'origine égale à 1 (P est alors, soit entre  $z'_2$  et  $z'_1$ , soit entre  $z_1$  et  $z_2$ ),  $\Omega$  est bien nul.

Fig. 6.



Des relations faciles entre les angles marqués sur la figure permettent d'écrire

$$\Omega = \omega_1 - \omega'_1 + \eta' - \eta.$$

Mais, dans le triangle  $z_1 P z'_1$ , on a

$$\omega_1 + \eta + \eta' + \omega'_1 < \pi;$$

on peut donc écrire *a fortiori*

$$|\Omega| < \pi.$$

Si le point P est sur un contour assujéti à rencontrer l'axe des abscisses seulement entre les points  $z_1, z_2$  et entre les points  $z'_1, z'_2$ , condition que réalise un contour équivalent, pour l'intégrale I, à la circonférence  $|z| = 1$ , cette inégalité a lieu dans toutes les positions de P.

Le véritable argument du facteur  $(a_1^2 - r^2)^{-s}$  s'obtient donc en multipliant par  $-s$  l'argument de  $a_1^2 - r^2$  compris entre  $-\pi$  et  $+\pi$ .

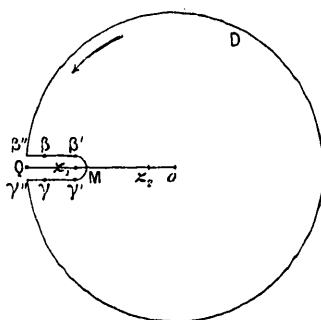
**20.** Lorsque  $|Z|$  ou  $|Z_i|$  n'est pas compris entre  $|z_1|$  et  $|z_2|$ , on peut encore prendre la circonférence D comme nouveau chemin d'intégra-

tion, à condition de la déformer comme on l'indiquera bientôt. Mais on n'arrive plus aussi directement que précédemment à la détermination de l'intégrale I. Il convient alors de décomposer I en deux parties et d'évaluer séparément chacune de ces parties.

Supposons d'abord  $|Z|$  ou  $|Z_i|$  supérieur à  $|z_1|$  ( $|z_1|$  étant supérieur à 1, cette hypothèse correspond nécessairement à  $\theta > \theta''$ )<sup>(1)</sup>. Le nouveau chemin d'intégration doit être construit de façon à ne pas renfermer le point  $z_1$ .

Décrivons (*fig. 7*) du point  $z_1$  comme centre une demi-circonfé-

Fig. 7.



rence  $\beta'M\gamma'$ , avec un rayon très petit. Menons à l'axe des abscisses les parallèles  $\beta'\beta''$ ,  $\gamma'\gamma''$ , limitées à la circonférence D. Prenons, sur ces droites, des points  $\beta$ ,  $\gamma$ , symétriques par rapport à l'axe des abscisses et à distance finie du point  $z_1$ , mais assez rapprochés de ce point pour qu'un développement que nous rencontrerons plus loin, qui converge dans le domaine de  $z_1$ , soit valable jusqu'en  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Le rayon de la circonférence  $\beta'M\gamma'$  étant très petit, les angles  $\beta z_1 M$ ,  $\gamma z_1 M$  sont voisins de  $\pi$ .

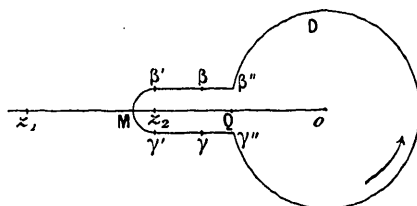
Le contour  $M\gamma'\gamma\gamma''D\beta''\beta\beta'M$ , que nous désignerons par C, est équivalent à la circonférence  $|z| = 1$  pour l'intégrale I. Toutefois, ce nouveau contour, qui contient toujours la plus petite racine  $z_2$  de la seconde équation (13), ne doit pas renfermer la plus grande racine  $z_1$  de cette équation. Cette circonstance peut se présenter lorsque  $\theta > 0$ <sup>(1)</sup>; mais nous verrons au n° 21 qu'il n'y a pas lieu de s'en préoccuper.

(1) Se reporter aux n°s 14 et 18.

Supposons maintenant  $|Z|$  ou  $|Z_i|$  inférieur à  $|z_2|$  ( $|z_2|$  étant inférieur à 1, cette hypothèse correspond nécessairement à  $\theta < 0$ )<sup>(1)</sup>. Le nouveau contour doit être construit de façon à renfermer le point  $z_2$ .

Décrivons (*fig. 8*), du point  $z_2$  comme centre, une demi-circonférence  $\beta'M\gamma'$ , avec un rayon très petit. Menons, à l'axe des abscisses, les parallèles  $\beta'\beta''$ ,  $\gamma'\gamma''$  limitées à la circonférence D. Prenons sur ces

Fig. 8.



droites des points  $\beta$ ,  $\gamma$ , symétriques par rapport à l'axe des abscisses et à distance finie du point  $z_2$ , mais assez rapprochés de ce point pour qu'un développement que nous rencontrerons plus loin, qui converge dans le domaine de  $z_2$ , soit valable jusqu'en  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Le contour  $M\gamma'\gamma''D\beta''\beta\beta'M$  que nous désignerons par C, comme précédemment, est équivalent à la circonférence  $|z| = 1$  pour l'intégrale I. La circonférence D renferme en effet, dans notre hypothèse, la plus petite racine  $z'_2$  de la seconde équation (13) et ne contient pas la plus grande racine  $z'_1$  de cette équation<sup>(1)</sup>.

Nous désignerons dorénavant par C' le contour  $\beta\beta'M\gamma'\gamma$  et par C'' le contour  $\gamma\gamma''D\beta''\beta$  (*fig. 7* et 8). Nous appellerons I' la partie de l'intégrale I qui correspond au contour C', et I'' la partie de l'intégrale I qui correspond au contour C''.

**Détermination de I''.** — Tous les points du contour C'' sont à distance finie du point  $z_1$  (*fig. 7*) ou du point  $z_2$  (*fig. 8*). On peut donc, dans l'intégrale

$$I'' = \int_{C''} J dz,$$

<sup>(1)</sup> Se reporter aux nos 14 et 18.

remplacer J par sa valeur (15), ce qui donne

$$(38) \quad I'' = \frac{m_1^{s-1}}{2i\pi} \int_{C''} \Psi(z) \left[ 1 + \frac{R(z)}{m_1} \right] \varphi^{m_1}(z) dz.$$

Avant d'évaluer  $I''$ , il convient de remarquer que la plus grande valeur de  $|\varphi(z)|$  le long de  $\beta''\beta$  et de  $\gamma''\gamma$ , savoir  $|\varphi(\beta)| = |\varphi(\gamma)|$ , est inférieure à  $|\varphi(z_1)|$  (*fig. 7*) ou à  $|\varphi(z_2)|$  (*fig. 8*).  $|\varphi(z)|$  croît effectivement lorsque  $z$  décrit le segment  $Qz_1M$  (*fig. 7*) puisque le point  $M$ , très rapproché de  $z_1$ , est compris entre  $z_1$  et  $-1$  <sup>(1)</sup>. De même,  $|\varphi(z)|$  croît lorsque  $z$  décrit le segment  $Qz_2M$  (*fig. 8*), le sens  $Qz_1M$  étant le sens des abscisses décroissantes <sup>(1)</sup>.

Ainsi on a, dans le cas de la *fig. 7*,

$$\begin{aligned} |\varphi(\beta'')| &< |\varphi(\beta)| < |\varphi(z_1)| < |\varphi(M)|, \\ |\varphi(\gamma'')| &< |\varphi(\gamma)| < |\varphi(z_1)| < |\varphi(M)|; \end{aligned}$$

dans le cas de la *fig. 8*,

$$\begin{aligned} |\varphi(\beta'')| &< |\varphi(\beta)| < |\varphi(z_2)| < |\varphi(M)|, \\ |\varphi(\gamma'')| &< |\varphi(\gamma)| < |\varphi(z_2)| < |\varphi(M)|. \end{aligned}$$

Rappelons enfin que la plus grande valeur de  $|\varphi(z)|$ , le long de la circonférence  $D$ , est  $|\varphi(Z)|$  si l'équation  $U = 0$  a ses racines réelles et  $|\varphi(Z_i)|$  si cette équation a des racines imaginaires <sup>(2)</sup>.

Pour donner à l'expression de  $I''$  sa forme définitive, nous distinguerons trois cas.

PREMIER CAS. — 1° La plus grande valeur de  $|\varphi(z)|$  le long du contour  $C''$  est inférieure à  $|\varphi(z_1)|$  (*fig. 7*) dans les deux hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} \theta' > \theta > \theta'' \text{ (U a ses racines réelles) et } Z < z_1; \\ \theta > \theta' \text{ (U a des racines imaginaires), } |Z_i| > |z_1| \text{ et } |\varphi(Z_i)| < |\varphi(z_1)|. \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> Se reporter au n° 16.

<sup>(2)</sup> Se reporter au n° 17.

2° La plus grande valeur de  $|\varphi(z)|$  le long du contour  $C''$  est inférieure à  $|\varphi(z_2)|$  (*fig. 8*) dans les trois hypothèses suivantes :

- $0 > \theta > \theta''$  (U a ses racines réelles) et  $Z > z_2$ ;  
 $\theta'' > \theta > \theta'''$  (U a des racines imaginaires),  $|Z_i| < |z_2|$  et  $|\varphi(Z_i)| < |\varphi(z_2)|$ ;  
 $0 < \theta'''$  (U a ses racines réelles),  $Z < |z_2|$  et  $|\varphi(Z)| < |\varphi(z_2)|$ .

Pour obtenir  $I''$ , dans ce cas, nous appliquerons un théorème dû à M. Darboux (<sup>1</sup>). En désignant par  $\tau$  un facteur de module inférieur à 1, par  $l''$  la longueur du chemin  $C''$  et par  $\xi$  l'affixe d'un point convenable de ce contour, l'intégrale (38) peut se mettre sous la forme

$$(38)' \quad I'' = \tau l'' \frac{m_1^{-1}}{2i\pi} \Psi(\xi) \left[ 1 + \frac{R(\xi)}{m_1} \right] \varphi^{m_1}(\xi).$$

Il importe de remarquer que l'on a :

Dans le cas de la *fig. 7*

$$|\varphi(\xi)| < |\varphi(z_1)|;$$

dans le cas de la *fig. 8*

$$|\varphi(\xi)| < |\varphi(z_2)|;$$

ces inégalités ne pouvant d'ailleurs pas se transformer en égalités.

DEUXIÈME CAS. — Supposons que l'une des deux circonstances suivantes se présente

- $\theta > \theta'$  (U a des racines imaginaires),  $|Z_i| > |z_1|$  et  $|\varphi(Z_i)| > |\varphi(z_1)|$ ;  
 $\theta'' > \theta > \theta'''$  (U a des racines imaginaires),  $|Z_i| < |z_2|$  et  $|\varphi(Z_i)| > |\varphi(z_2)|$ .

Les plus grandes valeurs de  $|\varphi(z)|$  le long du contour  $C''$  correspondent alors aux racines  $z = Z_i$  et  $z = Z_{-i}$  de  $\varphi'(z)$ . On peut donc obtenir l'expression de  $I''$  en appliquant le théorème II de l'Introduction à l'intégrale (38), comme on l'a déjà fait pour arriver à la formule (37)'.

(<sup>1</sup>) Cours de M. Hermite, 4<sup>e</sup> édition, p. 65; Hermann.

Ainsi on peut prendre comme valeur de  $I''$

$$(38)'' \quad \left\{ \begin{aligned} I'' = \frac{m_1^{s-1}}{2i\pi} \sqrt{\frac{\pi}{m_1}} & \left[ \sqrt{-2 \frac{\varphi(Z_i)}{\varphi''(Z_i)}} \Psi(Z_i) \varphi^{m_1}(Z_i) \right. \\ & \left. + \sqrt{-2 \frac{\varphi(Z_{-i})}{\varphi''(Z_{-i})}} \Psi(Z_{-i}) \varphi^{m_1}(Z_{-i}) \right] \left( 1 + \frac{K''}{m_1} \right), \end{aligned} \right.$$

$K''$  restant fini lorsque  $m_1$  augmente indéfiniment.

TROISIÈME CAS. — On a

$$\theta < \theta''' \quad (U \text{ a ses racines réelles}), \quad Z < |z_2| \quad \text{et} \quad \varphi(Z) > |\varphi(z_2)|.$$

La plus grande valeur de  $|\varphi(z)|$  le long du contour  $C''$  correspond à la racine  $z = Z$  de  $\varphi'(z)$ . On peut donc obtenir l'expression  $I''$  en appliquant le théorème II de l'Introduction à l'intégrale (38), comme on l'a déjà fait pour parvenir à la formule (37).

Ainsi, dans ce troisième cas, on peut prendre comme valeur de  $I''$

$$(38)''' \quad I'' = \frac{m_1^{s-1}}{2i\pi} \sqrt{-2 \frac{\varphi(Z)}{\varphi''(Z)}} \sqrt{\frac{\pi}{m_1}} \Psi(Z) \varphi^{m_1}(Z) \left( 1 + \frac{K'''}{m_1} \right),$$

$K'''$  restant fini lorsque  $m_1$  augmente indéfiniment.

*Remarque.* — On voit que  $I''$  est de la forme

$$I'' = m_1^{s-1} G''(\xi'') \varphi^{m_1}(\xi'');$$

la fonction  $G''$  restant finie lorsque  $m_1$  augmente indéfiniment et  $\xi''$  représentant,  $\xi$  dans le premier cas,  $Z_i$  dans le second cas,  $Z$  dans le troisième cas.

On peut effectivement, dans la formule (38)'', mettre  $\varphi^{m_1}(Z_i)$  en facteur et faire rentrer, dans  $G''$ , le facteur

$$1 + \left[ \frac{\varphi(Z_{-i})}{\varphi(Z_i)} \right]^{m_1},$$

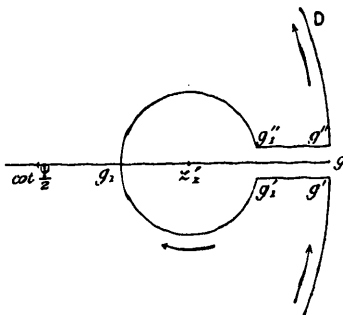
qui reste fini, lorsque  $m_1$  augmente indéfiniment, puisque

$$|\varphi(Z_i)| = |\varphi(Z_{-i})|.$$

21. Nous avons admis implicitement, lorsque  $\theta > 0$ , que la plus grande racine  $z'_i$  de la seconde équation (13) est extérieure à la circonférence D. Il est facile de s'affranchir de cette restriction.

Considérons le point  $g$  où la circonférence D (fig. 9) rencontre la partie positive de l'axe des abscisses. On a  $|\varphi(g)| < |\varphi(Z)|$  ou  $|\varphi(g)| < |\varphi(Z_i)|$  puisque, suivant que U a ou non ses racines réelles,  $|\varphi(z)|$  est maximum, le long de la circonférence D, pour  $z = Z$  ou pour  $z = Z_i$  et  $z = Z_{-i}$ .

Fig. 9.



Si  $g$  est plus éloigné de l'origine que le point singulier  $z'_i$  de J, il est *a fortiori* à une distance de l'origine supérieure à  $\cot \frac{\psi}{2}$  <sup>(1)</sup>. On a donc, pour tout point  $z$  pris sur le segment  $z'_i g$  de l'axe des abscisses <sup>(2)</sup>,  $|\varphi(z)| < |\varphi(g)|$  et, *a fortiori*,

$$|\varphi(z)| < |\varphi(Z)| \quad \text{ou} \quad |\varphi(z)| < |\varphi(Z_i)|,$$

suivant que l'équation  $U = 0$  a ou non ses racines réelles. Il en est de même si le point  $z$  est pris le long des droites  $g'g'_1$ ,  $g''g''_1$ , très voisines de l'axe des abscisses.

Décrivons, autour de  $z'_i$ , une circonférence de rayon fini  $g'_1, g_1, g''_1$ , rencontrant l'axe des abscisses en un point  $g_1$ , situé à une distance de l'origine supérieure à  $\cot \frac{\psi}{2}$ . En vertu de la continuité de la fonction  $\varphi(z)$ , on peut choisir le rayon de cette circonférence de façon que, pour tout point  $z$  pris sur cette ligne, la différence  $|\varphi(z)| - |\varphi(z'_i)|$

(1) Se reporter au n° 18.

(2) Se reporter au n° 16.



ne dépasse pas un nombre fini donné. On peut donc faire en sorte que, le long de l'arc  $g', g'', g'''$ ,

$$|\varphi(z)| < |\varphi(Z)| \quad \text{ou} \quad |\varphi(z)| < |\varphi(Z_i)|,$$

suivant que  $U$  a ou non ses racines réelles.

En faisant subir à la circonférence  $D$  la déformation  $g' g', g', g'', g''$ , le point  $z'$  reste à l'extérieur du contour  $C$ . Comme tous les points de cette déformation sont à distance finie du point  $z'$  et du point  $\cot \frac{\psi}{2}$ , l'expression (15) de  $J$  est valable, comme auparavant, pour tous les points du contour  $C''$ , modifié comme il vient d'être dit.

Les résultats précédemment acquis, en ce qui regarde  $I''$ , sont fondés sur ce que la plus grande valeur de  $|\varphi(z)|$ , le long de la circonférence  $D$ , est  $|\varphi(Z)|$  ou  $|\varphi(Z_i)|$ . L'introduction dans le contour  $C''$  du chemin  $g' g', g', g'', g''$ , le long duquel  $|\varphi(z)|$  est inférieur à  $|\varphi(Z)|$  ou à  $|\varphi(Z_i)|$ , ne modifie donc en rien nos conclusions.

Il reste, pour avoir la valeur complète de  $I$  dans les cas énumérés n° 20 du présent Chapitre, à déterminer la valeur de  $I'$ . Cette question va faire l'objet des Chapitres qui suivent.

## VII. — TRANSFORMATION DE LA FONCTION $F(x, z)$ .

Posons

$$(39) \quad x_1 = \frac{1}{\varphi(z_1)}, \quad x_2 = \frac{1}{\varphi(z_2)}.$$

Nous nous proposons de mettre la fonction  $F(x, z)$  sous une forme particulière dans le voisinage des valeurs  $z = z_1$ ,  $x = x_1$  d'une part,  $z = z_2$ ,  $x = x_2$  d'autre part.

**22.** Supposons  $z$  voisin de  $z_1$  et  $x$  de  $x_1$ .

La valeur (11)'' de  $F(x, z)$  contient l'expression du carré de la distance des planètes

$$(40) \quad \Delta = -a_1^2 \frac{[x\varphi(z) - 1] \left[ x - \frac{r^2}{a_1^2} \frac{1}{\varphi(z)} \right]}{x},$$

élevé à la puissance  $-s$ .

$\Delta$  est une fonction holomorphe de  $x - x_1$  et de  $z - z_1$  dans un certain domaine.  $r^2$  devenant égal à  $\alpha_1^2$  pour  $z = z_1$  (<sup>1</sup>), cette fonction a deux racines égales à  $z_1$  pour  $x = x_1$ .

Il résulte de là que, pour  $x$  voisin de  $x_1$ ,  $\Delta$  a deux racines  $\sigma'$ ,  $\sigma''$  voisines de  $z_1$  et que l'on peut poser identiquement (<sup>2</sup>)

$$(41) \quad \Delta = (z - \sigma')(z - \sigma'') \times \frac{1}{H(z - z_1, x - x_1)}.$$

Dans cette formule, le polynôme  $(z - \sigma')(z - \sigma'')$  a pour coefficients des fonctions holomorphes de  $x - x_1$ ; la fonction  $\frac{1}{H(z - z_1, x - x_1)}$  est holomorphe en  $z - z_1$  et  $x - x_1$ , dans un certain domaine, et ne s'annule pas pour  $x = x_1$ ,  $z = z_1$ . Il en résulte que  $H(z - z_1, x - x_1)$  ne s'annule pas pour  $x = x_1$ ,  $z = z_1$  et est elle-même holomorphe en  $z - z_1$ ,  $x - x_1$  dans un certain domaine.

Il est aisé de calculer les racines  $\sigma'$ ,  $\sigma''$  des équations

$$x\varphi(z) - 1 = 0, \quad x\varphi(z) - \frac{r^2}{\alpha_1^2} = 0,$$

considérées comme équations en  $z$ , lorsque  $x$  est voisin de  $x_1$ .

L'équation  $x\varphi(z) - 1 = 0$  peut s'écrire

$$x = \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{\varphi(z_1)} - \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi^2(z_1)}(z - z_1) - \frac{\varphi(z_1)\varphi''(z_1) - 2\varphi'^2(z_1)}{2\varphi^3(z_1)}(z - z_1)^2 + \dots$$

On en tire, en introduisant les notations (39),

$$- \frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)} \frac{x - x_1}{x_1} = (z - z_1) \left\{ 1 + \left[ \frac{\varphi''(z_1)}{2\varphi'(z_1)} - 2 \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)} \right] (z - z_1) + \dots \right\};$$

(<sup>1</sup>) Se reporter aux nos 10 et 18.

(<sup>2</sup>) POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, p. 316 et 317. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 241.

d'où

$$z - z_1 = - \frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)} \frac{x - x_1}{x_1} \left\{ 1 + \left[ \frac{\varphi''(z_1)}{2\varphi'(z_1)} - 2 \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)} \right] (z - z_1) + \dots \right\}^{-1}.$$

On déduit de là  $z - z_1$ , par la série de Lagrange, et

$$(42) \quad \sigma' = z_1 - \frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)} \frac{x - x_1}{x_1} + \dots$$

On obtient le développement de la racine  $\sigma''$  voisine de  $z_1$  de l'équation  $x - \frac{r^2}{a_1^2} \frac{1}{\varphi(z)} = 0$  en procédant d'une façon analogue. On commence par développer  $\frac{r}{a_1}(\gamma)$  suivant les puissances de  $z - z_1$ . En remarquant que  $\frac{r}{a_1} = 1$  pour  $z = z_1$ , on a

$$\frac{r}{a_1} = 1 - \frac{\alpha \sin \psi}{2z_1^2} (z_1^2 - 1)(z - z_1) + \dots;$$

d'où

$$x = \frac{r^2}{a_1^2} \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{\varphi(z_1)} - \left[ \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi^2(z_1)} + \frac{1}{\varphi(z_1)} \frac{\alpha \sin \psi}{z_1^2} (z_1^2 - 1) \right] (z - z_1) + \dots$$

On en déduit, en raisonnant comme précédemment,

$$(43) \quad \sigma'' = z_1 - \frac{1}{\frac{\varphi'(z_1)}{\varphi^2(z_1)} + \frac{\alpha \sin \psi}{z_1^2} (z_1^2 - 1)} \frac{x - x_1}{x_1} + \dots$$

Les coefficients des puissances de  $\frac{x - x_1}{x_1}$ , dans les développements (42), (43) de  $\sigma'$  et de  $\sigma''$ , sont réels. En effet,  $r$  est une fonction réelle de  $z$  (7);  $\frac{1}{\varphi(z)}$  et  $\frac{r^2}{a_1^2} \frac{1}{\varphi(z)}$  ont donc même argument lorsque  $z$  est réel. Mais il y a plus : étant donnée la forme de  $\varphi(z)$  (12), cet argument est invariable pour toutes les valeurs de  $z$  réelles négatives; il est égal, par conséquent, à l'argument de  $x_1$  et de  $x_2$  (39).

Cela posé, en donnant à  $\sigma'$  une valeur réelle négative *quelconque* voisine de  $z_1$ , l'équation (42) doit être identiquement vérifiée lorsque l'on y remplace  $x$  par la valeur,  $\frac{1}{\varphi(\sigma')}$ , qui a même argument que  $x_1$ .

Or  $\frac{x-x_1}{x_1}$  est alors réel; il faut donc, puisque le premier membre est réel, que les coefficients du développement soient eux-mêmes réels.

De même les coefficients de  $\sigma''$  sont réels ainsi que les coefficients des développements

$$(44) \quad \begin{cases} h = \frac{\sigma' + \sigma''}{2} = z_1 - \frac{1}{2} \left[ \frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)} + \frac{1}{\frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)} + \frac{\alpha \sin \psi}{z_1^2} (z_1^2 - 1)} \right] \frac{x - x_1}{x_1} + \dots, \\ k = \left( \frac{\sigma' - \sigma''}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \left[ \frac{\frac{\alpha \sin \psi}{z_1^2} (z_1^2 - 1) \frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)}}{\frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)} + \frac{\alpha \sin \psi}{z_1^2} (z_1^2 - 1)} \right]^2 \left( \frac{x - x_1}{x_1} \right)^2 + \dots \end{cases}$$

La formule (41) peut s'écrire

$$(45) \quad \Delta = - \frac{a_1^2 [x \varphi(z) - 1] \left[ x \varphi(z) - \frac{r^2}{a_1^2} \right]}{x \varphi(z)} = \frac{(z - h)^2 - k}{H(z - z_1, x - x_1)}.$$

La valeur  $H(0, 0)$  de  $H(z - z_1, x - x_1)$ , pour  $z - z_1 = x - x_1 = 0$ , s'obtient en tirant  $H(z - z_1, x - x_1)$  de l'identité (45), faisant  $x = x_1$ , et levant l'indétermination, pour  $z = z_1$ , en appliquant deux fois la règle de l'Hospital. On obtient, en tenant compte des formules (39),

$$(46) \quad \frac{1}{H(0, 0)} = -a_1^2 \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)} \left[ \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)} + \alpha \sin \psi \frac{z_1^2 - 1}{z_1^2} \right].$$

23. La fonction  $F(x, z)$  (11)'' peut s'écrire, d'après la formule (45),

$$F(x, z) = \left[ \frac{H(z - z_1, x - x_1)}{(z - h)^2 - k} \right]^s \frac{1}{z} \frac{r}{a} f_1(t^{-\theta} x) f(z)$$

ou

$$(47) \quad F(x, z) = \frac{\lambda^{(s)}(z - z_1, x - x_1)}{[(z - h)^2 - k]^s},$$

$\lambda^{(s)}(z - z_1, x - x_1)$  étant holomorphe pour les valeurs assez petites de  $x - x_1$ , et de  $z - z_1$ . Cette fonction est définie par

$$(48) \quad \lambda^{(s)}(z - z_1, x - x_1) = [H(z - z_1, x - x_1)]^s \frac{1}{z} \frac{r}{a} f_1(t^{-\theta} x) f(z).$$

Sa valeur pour  $x = x_1$  et  $z = z_1$  est, en tenant compte des formules (46), (39), (12), (8), (7) et se rappelant que  $r = a_1$  pour  $z = z_1$ ,

$$(49) \quad \lambda^{(s)}(0, 0) = [H(0, 0)]^s \frac{1}{a z_1} f_1 \left[ \frac{z_1}{a \sin^2 \frac{\psi}{2} \left( z_1 - \cot \frac{\psi}{2} \right)^2} \right] f(z_1).$$

Nous définirons en temps utile la détermination du facteur  $[H(0, 0)]^s$  qui rentre dans cette formule.

$\lambda^{(s)}(z - z_1, x - x_1)$  est développable suivant les puissances de  $z - z_1$  et de  $x - x_1$  et  $h$  suivant les puissances de  $x - x_1$ ; cette fonction est donc développable suivant les puissances de  $z - h$  puisque  $h$  se réduit à  $z_1$  pour  $x = x_1$  (44). Ainsi on peut écrire

$$(50) \quad F(x, z) = \frac{D_0 + (z - h) D_1 + (z - h)^2 D_2 + \dots}{[(z - h)^2 - h]^s},$$

les fonctions de  $x$ ,  $D_0, D_1, \dots$  étant holomorphes en  $x - x_1$ .

La valeur de la fonction  $D_0$  pour  $x = x_1$  n'est autre que  $\lambda^{(s)}(0, 0)$  (49), puisque, pour  $x = x_1$ ,  $h$  se réduit à  $z_1$ .

*Remarque.* — Les formules (16) et (17) donnent

$$(51) \quad \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{U(z)}{2 z^2 \left( z - \cot \frac{\psi}{2} \right)}.$$

Le rapport  $\frac{\varphi'}{\varphi}$  est donc réel lorsque  $z$  est réel.

Reportons-nous à la *fig.* 7 qui est relative au cas où l'on a  $|Z| > |z_1|$  si  $U(z)$  a ses racines réelles ou  $|Z_i| > |z_1|$  si  $U(z)$  a des racines imaginaires. Appelons  $\gamma$  l'abscisse d'un point quelconque pris sur l'axe des abscisses entre les points  $Q$  et  $z_1$ . Il est aisé de voir que l'on a

$$U(\gamma) < 0 \quad (1);$$

il en résulte

$$\frac{\varphi'(\gamma)}{\varphi(\gamma)} > 0.$$

---

(1) Se reporter aux définitions de la circonférence  $D$  (n° 17) de  $Z$  et de  $Z_i$  (n° 14) et s'appuyer sur ce que (17)  $U(-\infty)$  a le signe de  $-\theta$ .

On a donc, en observant que  $y < z_1 < -1$ ,

$$(52) \quad 0 < \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} < \alpha \sin \psi \frac{y^2 - 1}{y^2} + \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}.$$

Ces inégalités sont d'ailleurs applicables pour  $y = z_1$ . Il en résulte que  $H(0, 0) < 0$  (46) lorsque  $|Z|$  ou  $|Z_i|$  est supérieur à  $|z_1|$ .

**24.** Le développement de  $F(x, z)$  dans le voisinage de  $x = x_2$  et de  $z = z_2$  se déduit du développement (50) en y changeant  $x_1$  en  $x_2$  et  $z_1$  en  $z_2$ .

La nouvelle constante  $\lambda^{(5)}(0, 0)$  se déduit de la formule (49) en y changeant  $x_1$  en  $x_2$  et  $z_1$  en  $z_2$ . La nouvelle constante  $H(0, 0)$  se déduit de la formule (46) en y changeant  $x_1$  en  $x_2$  et  $z_1$  en  $z_2$ ; elle est négative lorsque  $|Z|$  ou  $|Z_i|$  est inférieur à  $|z_2|$ .

Si, en effet, on se reporte à la *fig. 8* et que l'on désigne par  $y$  l'afixe d'un point quelconque pris sur l'axe des abscisses entre les points  $Q$  et  $z_2$ , on a  $U(y) > 0$  et, par suite,  $\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} < 0$ . On a donc, en observant que  $-1 < z_2 < y < 0$ ,

$$(52)' \quad 0 > \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} > \alpha \sin \psi \frac{y^2 - 1}{y^2} + \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}.$$

Ces inégalités sont applicables pour  $y = z_2$ . Il en résulte bien  $H(0, 0) < 0$ , comme précédemment.

## VIII.

**25.**  $J$  est défini par l'intégrale (10) prise le long du contour  $|x| = 1$ , lorsque  $|z| = 1$ . Dans cette hypothèse, l'élément différentiel de  $J$ , en tant que fonction de  $x$ , possède à l'intérieur du contour  $|x| = 1$  deux points singuliers, l'origine et le point  $v$  et, à l'extérieur, le point  $\mu$  et l' $\infty$ . Si l'on donne à  $z$  des valeurs de module différent de 1, à l'exception des valeurs  $z = 0$ ,  $z = \infty$  et de celles qui satisfont aux équations (13), on peut toujours modifier le contour de façon que le

point  $\mu$  ne puisse y pénétrer ni le point  $\nu$  et l'origine en sortir <sup>(1)</sup>.

C'est en particulier ce que l'on peut faire, lorsque  $z$  est l'affixe d'un point du chemin  $C'$  <sup>(2)</sup>, qui a été obtenu en déformant la circonférence  $|z|=1$ , sans rencontrer les racines des équations (13).  $z$  étant alors voisin de l'une des racines des équations (13), on peut faire suivre, dans le plan des  $x$ , à la variable d'intégration de  $J$ , une circonférence ayant son centre à l'origine et de rayon supérieur aux quantités voisines  $|\mu|$ ,  $|\nu|$ , à la condition de déformer cette circonférence, dans le voisinage des points  $\mu$  et  $\nu$ , de façon que  $\mu$  soit à l'extérieur et  $\nu$  à l'intérieur de ce contour. Effectivement, à part  $x=0$ ,  $x=\infty$ , les seuls points qui limitent la déformation du contour, le long duquel est prise l'intégrale  $J$ , sont les points  $\mu$  et  $\nu$ .

Voici encore une remarque qui sera utilisée dans le cours de ce Chapitre.

Prenons, dans le plan de la variable  $z$ , un point quelconque  $M$  sur la partie négative de l'axe des abscisses, entre les points  $z_1$ ,  $z_2$ . Au  $z$  de  $M$  correspond, dans le plan de la variable  $x$ , un point  $\mu$  et un point  $\nu$  qui sont en ligne droite avec les points  $x_1$ ,  $x_2$  et l'origine <sup>(3)</sup>. Soit  $N$  un point quelconque de cette droite  $\mu\nu$  pris entre les points  $\mu$  et  $\nu$ . Je dis que le facteur  $\frac{1}{\Delta^s}$ , qui fait partie de  $F(x, z)$  <sup>(4)</sup>, que l'on peut écrire

$$\frac{1}{\Delta^s} = \left[ \frac{\mu x}{-a_1^2(x-\mu)(x-\nu)} \right]^s,$$

est réel et positif lorsque l'on y remplace  $x$  par l' $x$  de  $N$  et  $z$  par le  $z$  de  $M$ .

En effet, l'argument de  $\frac{1}{\Delta^s}$  est indépendant de la position de  $N$  sur le segment de droite dont les extrémités sont  $\mu$  et  $\nu$ , les arguments de  $x$ ,  $x-\mu$ ,  $x-\nu$  demeurant invariables lorsque le point  $N$  se déplace sur le segment.

L'argument de  $\mu$  et de  $\nu$  conserve aussi la même valeur quelle que

<sup>(1)</sup> Se reporter au n° 11.

<sup>(2)</sup> Se reporter au n° 20.

<sup>(3)</sup> Se reporter au n° 22 après la formule (43).

<sup>(4)</sup> Se reporter au n° 9.

soit, dans le plan de la variable  $z$ , la position de  $M$  sur le segment  $z_1 z_2$  de l'axe des abscisses.

Cela étant, prenons un point  $M$  particulier, le point  $z = -1$ . Les points  $\mu$  et  $\nu$  qui correspondent, dans le plan de la variable  $x$ , à  $z = -1$  sont séparés par la circonférence  $|x| = 1$ ; on peut donc prendre le point  $N$  à la rencontre de cette circonférence avec la droite  $x_1 x_2$ .

Or  $\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$  est réel et positif pour  $|x| = 1$  et  $|z| = 1$ , comme égal à la distance réelle de deux points pris sur les orbites des planètes  $P, P_1$ .  $\frac{1}{\Delta^2} = \frac{1}{[\sqrt{\Delta}]^2}$  est donc bien réel et positif pour l' $x$  de  $N$  et le  $z$  de  $M$ .

**26.** Ces principes posés, occupons-nous de I'. Considérons le cas où le contour  $C'$  est voisin du point  $z_1$  (<sup>1</sup>). On a vu que

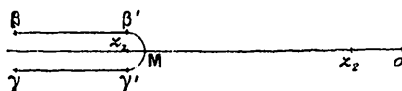
$$|\varphi(\beta)| < |\varphi(z_1)| < |\varphi(M)|$$

et que

$$|\varphi(\gamma)| < |\varphi(z_1)| < |\varphi(M)|.$$

Figurons, dans le plan de la variable  $z$ , l'axe des abscisses, les points  $z_1, z_2$  et le contour  $C'$  (fig. 10). A chaque point  $z$  pris sur ce contour

Fig. 10.



correspondent, dans le plan de la variable  $x$ , des positions particulières pour les points  $\mu, \nu$ . Nous allons construire le lieu de ces points lorsque  $z$  décrit le contour  $C'$  et mettre à cet effet les expressions de  $\mu$  et de  $\nu$  sous des formes particulières.

1°  $z$  est un point de la très petite circonférence  $\beta'M\gamma'$ . — La formule de Taylor et les expressions (12), (7), (39) donnent, en observant que  $r = a_1$ , pour  $z = z_1$ ,

$$(53) \quad \begin{cases} \frac{\mu - x_1}{x_1} = - \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)} (z - z_1), \\ \frac{\nu - x_1}{x_1} = - \left[ \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)} + \frac{\alpha \sin \psi}{z_1^2} (z_1^2 - 1) \right] (z - z_1). \end{cases}$$

(<sup>1</sup>) Se reporter au n° 20.



2°  $z$  est un point de  $\beta\beta'$ . — Appelons  $\varepsilon$  l'ordonnée positive du point  $z$ , qui est constante le long de  $\beta\beta'$ , et  $y$  son abscisse; on a

$$z = y + \varepsilon\sqrt{-1}.$$

En appelant  $\left(\frac{r}{a_1}\right)_y$  le résultat obtenu en remplaçant  $z$  par  $y$  dans la dernière formule (7) et posant

$$(54) \quad x' = \frac{1}{\varphi(y)},$$

on peut écrire, en développant les formules (12) et (7) suivant les puissances de la très petite quantité  $\varepsilon$ ,

$$(55) \quad \begin{cases} \frac{1-x'}{x'} = -\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \varepsilon\sqrt{-1}, \\ \frac{y-x'}{x'} = \left(\frac{r}{a_1}\right)_y^2 - 1 - \left[\alpha \sin \psi \frac{y^2-1}{y^2} + \left(\frac{r}{a_1}\right)_y \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right] \left(\frac{r}{a_1}\right)_y \varepsilon\sqrt{-1}. \end{cases}$$

3°  $z$  est un point de  $\gamma\gamma'$ . — Changer  $\varepsilon$  en  $-\varepsilon$  dans les formules (55).

*Remarque.* — Les coefficients de  $\varepsilon\sqrt{-1}$  dans les formules (55) sont réels puisque  $y$  est réel (51). On a d'ailleurs les inégalités

$$(56) \quad \left(\frac{r}{a_1}\right)_y \left[\alpha \sin \psi \frac{y^2-1}{y^2} + \left(\frac{r}{a_1}\right)_y \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right] > \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} > 0.$$

En effet, elles sont vérifiées en vertu des inégalités (52) lorsque l'on y remplace  $\left(\frac{r}{a_1}\right)_y$  par l'unité. Elles le sont donc *a fortiori* lorsqu'on laisse  $\left(\frac{r}{a_1}\right)_y$ , car  $\left(\frac{r}{a_1}\right)_y$  est supérieur à 1 lorsque  $y$  est inférieur à  $z_1$ . Cela résulte de ce que

$$\frac{r}{a_1} - 1 = -\frac{\alpha \sin \psi (z - z_1)(z - z_2)}{2z} \quad (1),$$

expression évidemment positive pour les valeurs réelles de  $z$  inférieures à  $z_1$ .

---

(1) Se reporter aux formules (7) et au n° 18.

distance finie de ce point, pour que la plus grande valeur de  $\frac{\varphi'(\gamma)}{\varphi(\gamma)}$ ,

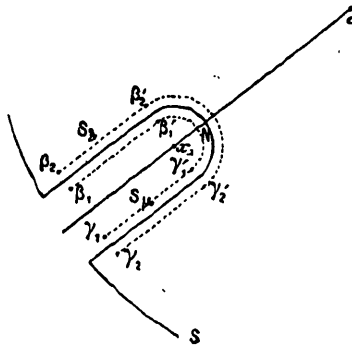
$$\left(\frac{r}{a_1}\right)_y \left[ \alpha \sin \psi \frac{y^2 - 1}{y^2} + \left(\frac{r}{a_1}\right)_y \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \right]$$

le long de  $\beta\beta'$ .

l'origine au point  $x_i = \frac{1}{\varphi(z_i)}$  et construisons le lieu du point  $\mu$ ,  $S_\mu$ ,

et négatives de  $z$  ('). Lorsque  $z$  chemine sur  $\beta\beta'$ , le point  $x'$  (54) chemine sur  $\Omega x$ , à une distance de l'origine supérieure à  $\Omega x$ , puisque,

**Fig. 11.**



rence  $\beta'M\gamma'$ . Le correspondant du point  $M$  sur la demi-circonférence  $\beta'\gamma'$  est situé sur  $ox$ , entre  $x$  et l'origine, car  $|\varphi(M)| > |\varphi(x)|$ . Le

On construirait de la même façon le lieu  $\beta_2\beta_2'\gamma_2'\gamma_2$  du point  $v$ . En vertu des inégalités (56) et des remarques qui les suivent, les points

(<sup>1</sup>) Se reporter au n° 22, après la formule (43).

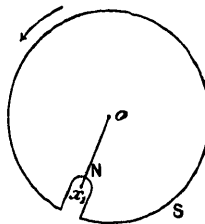
de  $\beta_2, \beta'_2$  sont tous plus éloignés de  $ox_1$  que les points de  $\beta_1, \beta'_1$ ; le rayon de la demi-circonférence  $\beta'_2, \gamma'_2$  est supérieur au rayon de la demi-circonférence  $\beta'_1, \gamma'_1$ .

De ce qui précède il résulte que les trajectoires  $S_\mu, S_\nu$  des points  $\mu$  et  $\nu$  sont ouvertes en  $\beta_1, \gamma_1, \beta_2, \gamma_2$  et n'ont pas de points communs <sup>(1)</sup>.

**27.** Le contour le long duquel est prise, dans le plan de la variable  $x$ , l'intégrale qui définit  $J$  doit être déformé, pour chaque valeur de  $z$ , prise sur le chemin  $C'$ , de telle sorte que le point  $\mu$  soit à l'extérieur, le point  $\nu$  et l'origine à l'intérieur du contour. Dans le cas actuel, l'intégrale  $J$  peut être prise le long d'un contour  $S$ , *invariable quelle que soit la position du point  $z$  sur le chemin  $C'$* . Ce contour  $S$  est constitué par une circonférence, décrite de l'origine comme centre avec un rayon supérieur à  $ox_1$ , <sup>(2)</sup>, déformée de façon que la courbe  $S_\nu$  soit à l'intérieur de  $S$  et la courbe  $S_\mu$  à l'extérieur.

La partie du contour  $S$  voisine de  $x_1$  est représentée en traits pleins (*fig. 11*). Dans la *fig. 12* le contour  $S$  est représenté en entier.

Fig 12.



Le point  $N$  où ce contour rencontre  $ox_1$  est très près de  $x_1$ , entre  $x_1$  et l'origine.

On peut écrire <sup>(3)</sup>, en remplaçant  $J$  par sa valeur (10), (11),

$$I' = \frac{1}{2i\pi} \int_{C'} dz \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{F(x, z)}{x^{m_1+1}} dx.$$

La fonction  $\frac{F(x, z)}{x^{m_1+1}}$  est bien déterminée, finie et continue le long des

<sup>(1)</sup> Il aurait pu arriver que le point  $\mu$ , correspondant à une certaine valeur de  $z$ , coïncidât avec le point  $\nu$  correspondant à une autre valeur de  $z$ .

<sup>(2)</sup> Se reporter au n° 25.

<sup>(3)</sup> Se reporter au n° 20.

contours  $C'$  et  $S$  (*fig. 12*). Cette circonstance, jointe à ce que les intégrations par rapport aux variables complexes sont au fond des intégrations par rapport à des variables réelles, rend légitime le changement de l'ordre des intégrations. Effectivement, le contour  $S$  ne dépendant pas de  $z$ , les limites de l'intégrale relative à  $x$  sont des constantes, aussi bien que les limites de l'intégrale relative à  $z$ . Ainsi on peut écrire

$$(57) \quad I' = \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{\Phi(x)}{x^{m_1+1}} dx,$$

en faisant

$$\Phi(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C'} F(x, z) dz.$$

On est ramené à trouver, pour  $m_1$  très grand, la valeur de l'intégrale (57).

Le problème est complètement transformé au point de vue analytique : la déformation du contour  $S$  n'est plus limitée maintenant, dans le voisinage du point  $x = x_1$ , que par les points singuliers de la fonction  $\Phi(x)$ .

Je dis que le point  $x = x_1$  est un point singulier de  $\Phi(x)$ . Pour l'établir il faut montrer que, lorsque  $x$  tend vers  $x_1$ , deux points singuliers de  $F(x, z)$ , en tant que fonction de  $z$ , séparés par le contour  $C'$ , tendent l'un vers l'autre <sup>(1)</sup>.

Considérons la partie irrationnelle de  $F(x, z)$ , à savoir le facteur  $\frac{1}{\Delta^2}$ . Pour  $x$  voisin de  $x_1$  et  $z$  voisin de  $z_1$ ,  $\Delta$  est donnée par la formule (45)

$$\Delta = \frac{(z - h)^2 - k}{H(z - z_1, x - x_1)}.$$

Les valeurs de  $z$  voisines de  $z_1$  qui annulent le numérateur sont des points singuliers de  $F(x, z)$ , en tant que fonction de  $z$ .

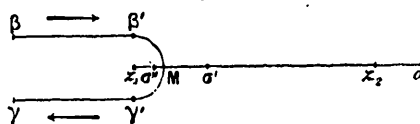
Remplaçons, dans cette expression,  $x$  par l'afixe de  $N$  (*fig. 12*);  $h$  et  $k$  ont alors des valeurs réelles <sup>(2)</sup>.

<sup>(1)</sup> POINCARÉ, *Les nouvelles méthodes de la Mécanique céleste*, t. I, p. 282.

<sup>(2)</sup> Se reporter au n° 25 et à ce qui a été dit à propos des formules (42), (43), (44).

$\frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}$  étant réel (51), le premier terme de la seconde formule (44) est positif;  $k$  est donc positif puisque l' $x$  de  $N$  est très voisin de  $x_1$ . Il en résulte que les racines  $\sigma'$  et  $\sigma''$  (42) et (43) du numérateur de  $\Delta$  sont réelles. Figurons-les sur l'axe des abscisses, dans le plan de la variable  $z$  (*fig. 13*), en  $\sigma'$  et  $\sigma''$  <sup>(1)</sup>.

Fig. 13.



Pour démontrer que le point  $M$ , où le contour  $C'$  rencontre l'axe des abscisses, est compris entre  $\sigma'$  et  $\sigma''$ , il suffit d'établir que le  $z$  de ce point rend négatif le trinome  $(z - h)^2 - k$ .

$\Delta$  est réel et positif lorsque l'on y remplace  $x$  par l'affixe de  $N$  et  $z$  par l'affixe de  $M$  <sup>(2)</sup>; il faut donc établir que la valeur de la fonction  $H(z - z_1, x - x_1)$  pour l' $x$  de  $N$  et le  $z$  de  $M$ , qui est nécessairement réelle, est négative. Or, comme  $M$  est très près de  $z_1$  et  $N$  de  $x_1$ , le signe de  $H(z - z_1, x - x_1)$  est le même que celui de  $H(0, 0)$  et l'on a démontré que  $H(0, 0) < 0$ , à propos des inégalités (52). C. Q. F. D.

Cela étant, si l'on fait tendre  $x$  vers  $x_1$ , en suivant  $Nx_1$  (*fig. 12*), les points singuliers  $\sigma'$  et  $\sigma''$  de  $F(x, z)$  tendent l'un et l'autre vers le point  $z_1$ , en restant sur l'axe des abscisses. Il devient impossible d'empêcher ces points de venir sur le contour  $C'$  (*fig. 13*), lorsque  $x$  arrive en  $x_1$ ; le point  $x = x_1$  est donc un point singulier de  $\Phi(x)$ .

#### IX. — DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION $\Phi(x)$ .

**28.** Nous supposerons pour obtenir commodément ce développement que le point représentatif de la variable  $x$  coïncide avec le point  $N$  de la *fig. 12* placé très près de  $x_1$ , sur  $ox_1$ , entre  $x_1$  et l'origine.

(1) En partant des inégalités (52) et en tenant compte de ce que le point  $N$  (*fig. 12*) est plus près de l'origine que  $x_1$ , on reconnaît aisément que les points  $z_1$ ,  $\sigma'$ ,  $\sigma''$  occupent la position indiquée *fig. 13*.

(2) Se reporter au n° 25.

En remplaçant  $F(x, z)$  par son expression (50), il vient

$$\Phi(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{D_0 + (z-h)D_1 + (z-h)^2 D_2 + \dots}{[(z-h)^2 - k]^s} dz,$$

$D_0, D_1, \dots$  étant des fonctions holomorphes de  $x - x_1$  et  $D_0$  n'étant pas nul pour  $x = x_1$  (50).

En posant

$$(58) \quad J_p^{(s)} = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{(z-h)^p}{[(z-h)^2 - k]^s} dz,$$

on a

$$(59) \quad \Phi(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} D_p J_p^{(s)}.$$

Les intégrales  $J_p^{(s)}$  peuvent s'exprimer en fonction des intégrales  $J_p^{(\frac{1}{2})}$ . On a en effet l'identité

$$(60) \quad J_p^{(s)} = \frac{2^{s-\frac{1}{2}}}{1.3 \dots (2s-2)} \frac{d^{s-\frac{1}{2}}}{dk^{s-\frac{1}{2}}} J_p^{(\frac{1}{2})}.$$

29. Calcul de  $J_0^{(\frac{1}{2})}$  (1). — On a

$$2i\pi J_0^{(\frac{1}{2})} = \int_C \frac{dz}{\sqrt{(z-h)^2 - k}} = \{ \log [z - h + \sqrt{(z-h)^2 - k}] \}_C.$$

$\sqrt{\Delta}$  est réel et positif lorsque l'on y remplace  $z$  par le  $z$  du point M (fig. 13) (2); il en résulte, pour les valeurs particulières de  $x$  et de  $z$  que nous considérons,

$$\frac{\sqrt{(z-h)^2 - k}}{\sqrt{H(0,0)}} > 0 \quad (3).$$

Les deux termes de la fraction sont des imaginaires sans parties réelles; si donc on convient de prendre comme détermination de

(1) Cette intégrale a été étudiée par M. Poincaré, *loc. cit.*, t. I, p. 322.

(2) Se reporter au n° 25.

(3) Se reporter aux n°s 23 et 27.

$\sqrt{H(0,0)}$  celle dont le coefficient de  $\sqrt{-1}$  est positif, on devra prendre aussi pour détermination de  $\sqrt{(z-h)^2-k}$  au point M celle dont le coefficient de  $\sqrt{-1}$  est positif, c'est-à-dire celle qui a  $\frac{\pi}{2}$  pour argument.

Le contour C' (fig. 13) renfermant le point singulier  $\sigma''$  du radical et les points  $\beta$  et  $\gamma$  étant très près de l'axe des abscisses par rapport à  $\beta\sigma''$ , l'argument du radical au point  $\beta$  est supérieur de  $\frac{\pi}{2}$ , à très peu près, à l'argument de cette fonction au point M. La valeur du radical au point  $\beta$  est donc, à très peu près, réelle et négative; de même la valeur du radical au point  $\gamma$  est, à très peu près, réelle et positive.

Il résulte de ce qui précède que

$$2i\pi J_0^{(\frac{1}{2})} = \log \frac{\gamma - h + \sqrt{(\gamma - h)^2 - k}}{\beta - h - \sqrt{(\beta - h)^2 - k}},$$

en convenant de prendre, pour détermination des radicaux, celle dont la partie réelle est positive.

Le point  $z = h$  étant compris au milieu du segment  $\sigma'\sigma''$ , les parties réelles de  $\gamma - h$ ,  $\beta - h$  sont négatives; donc le dénominateur de la fraction est fini, même pour  $x = x_1$ , puisque sa partie réelle est finie.

Multiplions les deux termes de la fraction par l'expression finie  $\gamma - h - \sqrt{(\gamma - h)^2 - k}$ , il vient

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} 2i\pi J_0^{(\frac{1}{2})} &= \log k - \log [\beta - h - \sqrt{(\beta - h)^2 - k}] \\ &\quad - \log [\gamma - h - \sqrt{(\gamma - h)^2 - k}]. \end{aligned} \right.$$

Les deux derniers logarithmes népériens écrits dans le second membre sont des fonctions holomorphes de  $x - x_1$ . En effet, pour  $x = x_1$ ,  $h$  se réduit à  $z_1$  et  $k$  à zéro; donc, pour  $x - x_1$  assez petit, les radicaux sont des fonctions holomorphes de  $x - x_1$ , les différences  $\beta - z_1$ ,  $\gamma - z_1$  étant finies. Ainsi les fonctions sous les signes log sont holomorphes et non nulles pour  $x = x_1$ . Il en résulte bien que ces logarithmes sont des fonctions holomorphes de  $x - x_1$  pour des valeurs de  $x - x_1$  suffisamment petites, mais finies.

Mais il y a plus : les dérivées de ces logarithmes par rapport à  $k$  sont

aussi des fonctions holomorphes de  $x - x_1$ . C'est ce qu'on voit sur-le-champ en remarquant que les dérivées de  $\log [\beta - h - \sqrt{(\beta - h)^2 - k}]$ , par exemple, sont formées d'une somme d'expressions contenant en numérateur un coefficient numérique et en dénominateur le produit d'une puissance positive de  $\sqrt{(\beta - h)^2 - k}$  par une puissance positive de  $[\beta - h - \sqrt{(\beta - h)^2 - k}]$ .

**30. Calcul de  $J_p^{(s)}$ . — 1°  $p$  est impair.**

On a

$$(62) \quad 2i\pi J_1^{(s)} = \int_{\beta}^{\gamma} \frac{z-h}{[(z-h)^2-k]^s} dz = -\frac{1}{2(s-1)} \left\{ \frac{1}{[(z-h)^2-k]^{s-1}} \right\}_{\beta}^{\gamma}.$$

$J_1^{(s)}$  est une fonction holomorphe de  $x - x_1$  puisque  $[(z-h)^2-k]^{-s}$  devient une fonction holomorphe de  $x - x_1$  lorsqu'on y remplace  $z$  par  $\beta$  ou par  $\gamma$ .

En partant de l'identité

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (z-h)^{p-1} [(z-h)^2-k]^{-s+1} \\ = \frac{(p-2s+1)(z-h)^p - (p-1)k(z-h)^{p-2}}{[(z-h)^2-k]^s}, \end{aligned}$$

on trouve, en intégrant entre les limites  $\beta, \gamma$ ,

$$(63) \quad \begin{cases} (p-2s+1)J_p^{(s)} - (p-1)kJ_{p-2}^{(s)} \\ = \frac{1}{2i\pi} \left\{ (z-h)^{p-1} [(z-h)^2-k]^{-s+1} \right\}_{\beta}^{\gamma}. \end{cases}$$

Le second membre de cette équation est holomorphe en  $x - x_1$ .

En partant de la formule (62) et calculant de proche en proche  $J_p^{(s)}$  pour  $p = 3, 5, 7, \dots$ , au moyen de l'équation (63), on reconnaît aisément que  $J_p^{(s)}$  est holomorphe en  $x - x_1$ , lorsque  $p$  est impair.

2°  $p$  est pair. — Faisons  $s = \frac{1}{2}$  dans l'équation (63). Il vient

$$pJ_p^{(\frac{1}{2})} - (p-1)kJ_{p-2}^{(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2i\pi} [(z-h)^{p-1} \sqrt{(z-h)^2-k}]_{\beta}^{\gamma}.$$

En multipliant par des facteurs convenables les relations obtenues



en faisant dans cette équation de récurrence successivement

$$p = 2, 4, 6, \dots, p,$$

il vient

$$\begin{aligned} p J_p^{(\frac{1}{2})} &= \frac{1.3.5 \dots (p-1)}{2.4 \dots (p-2)} k^{\frac{p}{2}} J_0^{(\frac{1}{2})} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \sum \left[ \frac{(p-1)(p-3) \dots (q+1)}{(p-2)(p-4) \dots q} k^{\frac{p-q}{2}} (z-h)^{q-1} \sqrt{(z-h)^2 - k} \right]_{\beta}^{\gamma}, \end{aligned}$$

le nombre  $q$ , dans le second membre, devant prendre toutes les valeurs entières paires depuis 2 jusqu'à  $p$ . Cette équation et l'équation (61) donnent

$$2i\pi J_p^{(\frac{1}{2})} = \frac{1.3 \dots (p-1)}{2.4 \dots p} k^{\frac{p}{2}} \log k + \Phi_p^{(\frac{1}{2})},$$

en posant

$$\begin{aligned} \Phi_p^{(\frac{1}{2})} &= -\frac{1.3 \dots (p-1)}{2.4 \dots (p-2)p} k^{\frac{p}{2}} \log [\beta - h - \sqrt{(\beta - h)^2 - k}] [\gamma - h - \sqrt{(\gamma - h)^2 - k}] \\ &\quad + \sum_p \left[ \frac{(p-1)(p-3) \dots (q+1)}{p(p-2) \dots q} k^{\frac{p-q}{2}} (z-h)^{q-1} \sqrt{(z-h)^2 - k} \right]_{\beta}^{\gamma}. \end{aligned}$$

En vertu d'une remarque déjà faite, cette fonction  $\Phi_p^{(\frac{1}{2})}$  est holomorphe en  $x - x_1$  ainsi que ses dérivées par rapport à  $k$ . La formule (60) permet donc d'écrire

$$\begin{aligned} 2i\pi J_p^{(s)} &= \frac{2^{s-\frac{1}{2}}}{1.3 \dots (2s-2)} \frac{1.3 \dots (p-1)}{2.4 \dots p} \frac{d^{s-\frac{1}{2}}}{dk^{s-\frac{1}{2}}} \left( k^{\frac{p}{2}} \log k \right) \\ &\quad + \text{fonction holomorphe de } x - x_1. \end{aligned}$$

Le calcul de la dérivée qui fait partie de cette expression comprend deux cas :

Soit  $\frac{p}{2} \geq s - \frac{1}{2}$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{d^{s-\frac{1}{2}}}{dk^{s-\frac{1}{2}}} \left( k^{\frac{p}{2}} \log k \right) &= \log k \frac{d^{s-\frac{1}{2}}}{dk^{s-\frac{1}{2}}} k^{\frac{p}{2}} + \text{fonction entière de } k \\ &= \frac{p}{2} \left( \frac{p}{2} - 1 \right) \dots \left( \frac{p}{2} - s + \frac{3}{2} \right) k^{\frac{p}{2}-s+\frac{1}{2}} \log k \\ &\quad + \text{fonction holomorphe de } x - x_1, \end{aligned}$$

et

$$2i\pi J_p^{(s)} = \frac{1.3 \dots (p-1)}{1.3 \dots (2s-2)} \frac{p(p-2) \dots (p-2s+3)}{p(p-2) \dots 2} k^{\frac{p-2s+1}{2}} \log k$$

+ fonction holomorphe de  $x - x_1$ ,

ou, en remarquant que  $\log k$  peut s'écrire, en vertu de la seconde formule (44),

$$\log k = 2 \log \left( 1 - \frac{x}{x_1} \right) + \text{fonction holomorphe de } x - x_1,$$

$$(64) \quad \left\{ \begin{aligned} 2i\pi J_p^{(s)} &= \frac{2s(2s+2) \dots (p-1)}{2.4 \dots (p-2s+1)} 2k^{\frac{p-2s+1}{2}} \log \left( 1 - \frac{x}{x_1} \right) \\ &+ \text{fonction holomorphe de } x - x_1. \end{aligned} \right.$$

Cette formule convient, même lorsque  $s = \frac{1}{2}$  et  $p = 0$ , mais à condition de remplacer, dans ce cas, le facteur  $\frac{2s(2s+2) \dots (p-1)}{2.4 \dots (p-2s+1)}$  par 1.

Soit en second lieu  $0 \leq \frac{p}{2} \leq s - \frac{3}{2}$ . On a

$$\frac{d^{s-\frac{1}{2}}}{dk^{s-\frac{1}{2}}} \left( k^{\frac{p}{2}} \log k \right) = \frac{p}{2} \left( \frac{p}{2} - 1 \right) \dots 1 \frac{d^{s-\frac{1}{2}-\frac{p}{2}} \log k}{dk^{s-\frac{1}{2}-\frac{p}{2}}}$$

+ fonction holomorphe de  $x - x_1$ ,

$$= \frac{(-1)^{s-\frac{3}{2}-\frac{p}{2}}}{k^{s-\frac{1}{2}-\frac{p}{2}}} \frac{p}{2} \left( \frac{p}{2} - 1 \right) \dots 1.1.2 \dots \left( s - \frac{3}{2} - \frac{p}{2} \right)$$

+ fonction holomorphe de  $x - x_1$ .

Il en résulte

$$2i\pi J_p^{(s)} = - \frac{(-2)^{s-\frac{1}{2}-\frac{p}{2}}}{(p+1)(p+3) \dots (2s-2)} 1.2 \dots \left( s - \frac{3}{2} - \frac{p}{2} \right) \frac{1}{k^{s-\frac{1}{2}-\frac{p}{2}}}$$

+ fonction holomorphe de  $x - x_1$ ,

$$(64)' \quad \left\{ \begin{aligned} 2i\pi J_p^{(s)} &= 2 \frac{2.4 \dots (2s-3-p)}{(p+1)(p+3) \dots (2s-2)} \frac{(-1)^{s-\frac{3}{2}-\frac{p}{2}}}{k^{s-\frac{1}{2}-\frac{p}{2}}} \\ &+ \text{fonction holomorphe de } x - x_1. \end{aligned} \right.$$

Cette formule convient, même lorsque  $s = \frac{3}{2}$  et  $p = 0$ , à la condition de remplacer alors le facteur  $\frac{2.4 \dots (2s-3-p)}{(p+1)(p+3) \dots (2s-2)}$  par l'unité.

31. Les formules (64), (64)' et (59) conduisent au développement suivant de  $\Phi(x)$  dans le domaine du point  $x = x_1$ ,

$$(65) \quad \left\{ \begin{aligned} 2i\pi \Phi(x) &= \sum_{p=0}^{p=2s-3} 2 \frac{2.4 \dots (2s-3-p)}{(p+1)(p+3) \dots (2s-2)} \frac{(-1)^{s-\frac{3}{2}-\frac{p}{2}}}{k^{s-\frac{1}{2}-\frac{p}{2}}} D_p \\ &+ \log\left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \sum_{p=2s-1}^{p=\infty} 2 \frac{2s(2s+2) \dots (p-1)}{2.4 \dots (p-2s+1)} k^{\frac{p+1}{2}-s} D_p + \Phi_1(x) \end{aligned} \right.$$

$\Phi_1(x)$  désignant une fonction holomorphe dans le domaine de  $x = x_1$ , et l'entier  $p$  ne devant recevoir que des valeurs paires positives, y compris zéro.

Cherchons, dans la partie non holomorphe du développement (65), le terme qui contient la plus petite puissance de  $x - x_1$ .

Ce terme correspond évidemment à  $p = 0$ ; il y a d'ailleurs deux cas à distinguer :

1° Si  $s = \frac{1}{2}$ , le premier signe  $\Sigma$  disparaît du développement (65) et le premier terme du second signe  $\Sigma$  a pour valeur

$$2D_0 \log\left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \quad \left(s = \frac{1}{2}\right).$$

$D_0$  est une fonction holomorphe de  $x - x_1$ ; son terme constant, pour  $s = \frac{1}{2}$ , a pour valeur  $\lambda^{(\frac{1}{2})}(0, 0)$  (49) et (50). Le terme que nous cherchons est donc

$$2\lambda^{(\frac{1}{2})}(0, 0) \log\left(1 - \frac{x}{x_1}\right).$$

Ainsi on peut écrire le développement (65) pour  $s = \frac{1}{2}$ ,

$$(66) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{2i\pi} \Phi_1(x) + \frac{\lambda^{(\frac{1}{2})}(0, 0)}{i\pi} \log\left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \\ &\times \left[1 + \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \times \text{fonction holomorphe de } \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\right]. \end{aligned} \right.$$

2° Si  $s \geq \frac{3}{2}$ , le terme du développement (65) qui correspond à  $p = 0$

est sous le premier signe  $\Sigma$ . Il a pour expression

$$2 \frac{2.4 \dots (2s-3)}{1.3 \dots (2s-2)} \frac{(-1)^{s-\frac{3}{2}}}{k^{s-\frac{1}{2}}} D_0.$$

Le terme que nous cherchons s'obtient en remplaçant  $D_0$  par son terme constant  $\lambda^{(s)}(0, 0)$  (49), et  $k$  par son premier terme (44).

Le terme demandé est donc

$$2 \frac{2.4 \dots (2s-3)}{1.3 \dots (2s-2)} (-1)^{s-\frac{3}{2}} \lambda^{(s)}(0, 0) \left[ \frac{1 + \frac{z_1^2}{\alpha \sin \psi(z_1^2 - 1)} \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}}{\frac{1}{2} \frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)}} \right]^{2s-1} \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^{2s-1}}.$$

Ainsi nous pouvons écrire pour  $s \geq \frac{3}{2}$ ,

$$(67) \left\{ \begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{2i\pi} \Phi_1(x) - \frac{2.4 \dots (2s-3)}{1.3 \dots (2s-2)} \frac{\lambda^{(s)}(0, 0)}{i\pi} (-1)^{s-\frac{1}{2}} \\ &\times \left[ \frac{1 + \frac{z_1^2}{\alpha \sin \psi(z_1^2 - 1)} \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}}{\frac{1}{2} \frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)}} \right]^{2s-1} \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^{2s-1}} \\ &\times \left[ 1 + \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \times \text{fonction holomorphe de } \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^{2s-1} \log \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \times \text{fonction holomorphe de } \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Nous rappelons que pour  $s = \frac{3}{2}$  le facteur  $\frac{2.4 \dots (2s-3)}{1.3 \dots (2s-2)}$  doit être remplacé par 1.

Le facteur  $\lambda^{(s)}(0, 0)$  qui rentre dans les développements (66), (67) est susceptible de deux déterminations. On a en effet (49)

$$\lambda^{(s)}(0, 0) = [H(0, 0)]^s \frac{1}{\alpha z_1} f_1 \left[ \frac{z_1}{\alpha \sin^2 \frac{\psi}{2} \left(z_1 - \cot \frac{\psi}{2}\right)^2} \right] f(z_1),$$

et le facteur  $[H(0, 0)]^s$  a deux déterminations.

Il est aisé de faire un choix entre ces déterminations. On peut écrire

$$[H(o, o)]^s = [\sqrt{H(o, o)}]^{2s}.$$

$\sqrt{H(o, o)}$  ayant pour argument  $\frac{\pi}{2}$  (<sup>1</sup>), on déduit de là

$$[H(o, o)]^s = i(-1)^{s-\frac{1}{2}}[-H(o, o)]^s,$$

$[-H(o, o)]^s$  étant pris dans le sens arithmétique.

Il en résulte

$$\frac{(-1)^{s-\frac{1}{2}} \lambda^{(s)}(o, o)}{i} = [-H(o, o)]^s \frac{1}{\alpha z_1} f_1 \left[ \frac{z_1}{\alpha \sin^2 \frac{\psi}{2} \left( z_1 - \cot \frac{\psi}{2} \right)^2} \right] f(z_1).$$

En posant

$$B^{(s)} = \frac{(-1)^{s-\frac{1}{2}} \lambda^{(s)}(o, o)}{i} \left[ \frac{1 + \frac{z_1^2}{\alpha \sin \psi (z_1^2 - 1)} \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}}{\frac{1}{2} \frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)}} \right]^{2s-1},$$

on a, d'après les formules (46) et (12),

$$(68) \quad \left\{ \begin{aligned} B^{(s)} &= \frac{1}{\alpha^{2s}} \frac{1}{z_1} \left[ \frac{2 z_1^2}{\sin \psi (z_1^2 - 1)} \right]^{2s-1} \left\{ \left[ \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)} \right]^2 + \alpha \sin \psi \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)} \frac{z_1^2 - 1}{z_1^2} \right\}^{s-1} \\ &\quad \times f_1 \left[ \frac{z_1}{\alpha \sin^2 \frac{\psi}{2} \left( z_1 - \cot \frac{\psi}{2} \right)^2} \right] f(z_1). \end{aligned} \right.$$

On en déduit : pour  $s = \frac{1}{2}$ ,

$$(66)' \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{2i\pi} \Phi_1(x) + \frac{B^{(\frac{1}{2})}}{\pi} \log \left( 1 - \frac{x}{x_1} \right) \\ &\quad \times \left[ 1 + \left( 1 - \frac{x}{x_1} \right) \times \text{fonction holomorphe de } \left( 1 - \frac{x}{x_1} \right) \right]; \end{aligned} \right.$$

---

(<sup>1</sup>) Se reporter au n° 29.

pour  $s \geq \frac{3}{2}$ ,

$$(67)' \left\{ \begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{2i\pi} \Phi_1(x) - \frac{B^{(s)}}{\pi} \frac{2.4 \dots 2s-3}{1.3 \dots 2s-2} \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^{2s-1}} \\ &\times \left[ 1 + \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \times \text{fonction holomorphe de } \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^{2s-1} \log\left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \times \text{fonction holomorphe de } \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \right], \end{aligned} \right.$$

$\Phi_1(x)$  étant une fonction holomorphe dans le domaine de  $x = x_1$ .

## X. — CALCUL DE $I'$ .

52.  $I'$  est défini par l'intégrale (57)

$$I' = \frac{1}{2i\pi} \int_S \Phi(x) \frac{dx}{x^{m_1+1}}.$$

Le contour d'intégration  $S$  (fig. 12) est une circonférence de rayon supérieur à  $|x_1|$ , déformée le long de la droite  $ox_1$ , de façon à laisser le point singulier  $x_1$  de  $\Phi(x)$  à l'extérieur du contour. Dès lors le point  $x_1$  est de tous les points singuliers de  $\Phi(x)$ , extérieurs au contour  $S$ , le plus rapproché de l'origine. La considération de ce point singulier conduit donc à la valeur asymptotique de  $I'$  <sup>(1)</sup>.

En partant des développements (66)', (67)', l'application de la méthode de M. Darboux donne : pour  $s = \frac{1}{2}$ ,

$$I' = \frac{B^{(\frac{1}{2})}}{\pi} \times \left[ \text{coefficient de } x^{m_1} \text{ dans } \log\left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \right] \left(1 + \frac{K'}{m_1}\right);$$

pour  $s = \frac{3}{2}$ ,

$$I' = - \frac{B^{(s)}}{\pi} \frac{2.4 \dots 2s-3}{1.3 \dots 2s-2} \times \left[ \text{coefficient de } x^{m_1} \text{ dans } \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^{1-2s} \right] \left(1 + \frac{K''}{m_1}\right);$$

$K'$  et  $K''$  restant finis lorsque  $m_1$  augmente indéfiniment.

(1) Se reporter au n° 1 (généralisation du théorème I).

Le coefficient de  $x^{m_1}$  dans  $\log \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)$  est

$$-\frac{1}{m_1} \frac{1}{x_1^{m_1}},$$

et dans  $\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^{1-2s}$ ,

$$\frac{1}{m_1^{2(1-s)}} \frac{1}{x_1^{m_1}} \frac{1}{\Gamma(2s-1)} \left(1 + \frac{K}{m_1}\right)^{(1)}.$$

On peut donc écrire, en remplaçant (39)  $x_1$  par  $\frac{1}{\varphi(z_1)}$ ,

$$(69) \quad I' = - \frac{B^{(s)}}{\pi[1.3 \dots 2s-2]^2} \frac{1}{m_1^{2(1-s)}} \varphi^{m_1}(z_1) \left(1 + \frac{K}{m_1}\right),$$

$K$  restant fini lorsque  $m_1$  augmente indéfiniment. Cette expression convient au cas où  $s = \frac{1}{2}$ .

**53.** La valeur de  $I'$ , que nous venons d'obtenir, correspond au cas où le contour  $C'$  est voisin du point  $z = z_1$  <sup>(2)</sup>.

Le cas où le contour  $C'$  est voisin du point  $z = z_2$  <sup>(1)</sup> donne lieu à des raisonnements identiques à ceux qui ont été exposés dans les Chapitres VII, VIII, IX. Les extrémités  $\beta, \gamma$  du contour  $C'$  (fig. 8) sont, dans ce cas, plus rapprochées de l'origine que le point  $z_2$ ; d'autre part les inégalités (52)' remplacent les inégalités (52). Il n'en résulte pas de modifications essentielles.

En définitive, la valeur de  $I'$ , lorsque le contour  $C'$  est voisin du point  $z = z_2$ , s'obtient en remplaçant  $z_1$  par  $z_2$  dans les formules (69) et (68).

## XI. — CONCLUSIONS.

**54.** Il est facile maintenant de conclure la valeur de  $I$  dans les cas énumérés au n° 20.

$I'$  et  $I''$  sont en effet de la forme

$$I' = m_1^{q'} G'(\xi') \varphi^{m_1}(\xi'),$$

$$I'' = m_1^{q''} G''(\xi'') \varphi^{m_1}(\xi''),$$

<sup>(1)</sup> Se reporter au n° 2.

<sup>(2)</sup> Se reporter au n° 20.

les fonctions  $G'$  et  $G''$  restant finies lorsque  $m_1$  croît indéfiniment;  $q'$  et  $q''$  étant des nombres fixes;  $\xi'$  représentant, suivant les cas,  $z_1$  ou  $z_2$ ;  $\xi''$  représentant, suivant les cas,  $\xi$ ,  $Z$  ou  $Z_i$ .

Cela étant, supposons

1°  $|\varphi(\xi')| > |\varphi(\xi'')|$ . On a

$$I = I' + I'' = m_1^{q'} \left\{ G'(\xi') + m_1^{q''-q'} G''(\xi'') \left[ \frac{\varphi(\xi'')}{\varphi(\xi')} \right]^{m_1} \right\} \varphi^{m_1}(\xi').$$

Lorsque  $m_1$  croît indéfiniment, le produit  $m_1^{q''-q'} \left[ \frac{\varphi(\xi'')}{\varphi(\xi')} \right]^{m_1}$  tend vers zéro même si  $q'' > q'$ . On a donc asymptotiquement  $I = I'$ .

2°  $|\varphi(\xi'')| > |\varphi(\xi')|$ . On a asymptotiquement  $I = I''$ , pour le même motif.

#### RÉSUMÉ.

**35.** Nous nous proposons, dans ce qui suit, de résumer tout ce qui est essentiel pour déterminer pratiquement la valeur de  $I$ .

Nous commencerons par rappeler l'énoncé du problème.

*On considère deux planètes  $P, P_1$  se mouvant dans le même plan.  $P$  décrit une orbite elliptique ( $u$ , anomalie excentrique;  $r$ , rayon vecteur;  $e = \sin \psi$ , excentricité;  $a$ , demi grand axe;  $\zeta$  anomalie moyenne);  $P_1$  décrit une orbite circulaire qui enveloppe l'orbite de  $P$  ( $a_1$ , rayon vecteur et demi grand axe;  $\zeta_1$ , anomalie).*

*On se propose,  $m$  et  $m_1$  désignant deux entiers très grands ( $m_1 > 0$ ), de trouver la valeur asymptotique des coefficients de  $\frac{\cos}{\sin}(m\zeta + m_1\zeta_1)$  dans le développement de*

$$\frac{f(E^{iu}) f_1(E^{i\zeta_1})}{\Delta^s}$$

[ $E$ , base des logarithmes népériens;  $i = \sqrt{-1}$ ;  $f(E^{iu})$ , fonction entière réelle de  $\sin u$  et de  $\cos u$ ;  $f_1(E^{i\zeta_1})$ , fonction entière réelle de  $\sin \zeta_1$  et  $\cos \zeta_1$ ;  $\Delta$ , carré de la distance  $PP_1$ ;  $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ ].

Le coefficient de  $\cos(m\zeta + m_1\zeta_1)$  a pour valeur la partie réelle, et le coefficient de  $\sin(m\zeta + m_1\zeta_1)$  est égal au multiplicateur de  $-\sqrt{-1}$ , dans une certaine imaginaire  $I$ , qui se calcule comme on va l'indiquer;



Il est aisé de prévoir que ce dernier coefficient est nul, lorsque la fonction à développer provient d'un premier développement de la fonction perturbatrice ordinaire effectué par rapport à l'inclinaison.

Il convient, pour simplifier l'exposition, d'introduire quelques notations.

### 36. Posons

$$\frac{m}{m_1} = \theta;$$

$$\theta' = \frac{1}{8} \sec^3 \frac{\psi}{3}, \quad \theta'' = -\frac{1}{8} \sec^3 \left( 60^\circ - \frac{\psi}{3} \right), \quad \theta''' = -\frac{1}{8} \sec^3 \left( 60^\circ + \frac{\psi}{3} \right) \quad (1);$$

$$\alpha = \frac{a}{a_1} < 1;$$

$$r = -\frac{\alpha \sin \psi}{2z} \left( z - \tan \frac{\psi}{2} \right) \left( z - \cot \frac{\psi}{2} \right);$$

$$\varphi^{m_1}(z) = \left[ \frac{\alpha \sin^2 \frac{\psi}{2}}{z} \left( z - \cot \frac{\psi}{2} \right)^2 \right]^{m_1} \left[ z E^{-\frac{\sin \psi}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right)} \right]^{-m}.$$

Faisons

$$H(z) = \frac{E}{2z} \frac{r}{a} f_1 \left[ \frac{z}{\alpha \sin^2 \frac{\psi}{2} \left( z - \cot \frac{\psi}{2} \right)^2} \right] f(z) \frac{(a_1^2 - r^2)^{-s}}{\sqrt{\pi} \Gamma(s)} m_1^{s-\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{2\varphi(z)}{\varphi''(z)}} \varphi^{m_1}(z) \quad (2).$$

Pour les valeurs qui seront substituées à  $z$ , dans  $H(z)$ , l'argument du facteur  $(a_1^2 - r^2)^{-s}$  s'obtient en multipliant par  $-s$  l'argument de  $a_1^2 - r^2$  compris entre  $-\pi$  et  $+\pi$ .

La détermination de  $\sqrt{\frac{2\varphi}{\varphi''}}$  s'obtient d'après la règle suivante : si l'argument  $\omega$  de  $z$  est compris entre  $-\frac{\pi}{4}$  et  $+\frac{\pi}{4}$ , la partie réelle du radical est positive; si  $\frac{\pi}{4} < \omega < \frac{3\pi}{4}$ , la partie imaginaire du radical est

(1) On trouvera plus loin une Table donnant  $\theta'$ ,  $\theta''$ ,  $\theta'''$  en fonction de l'excentricité  $e = \sin \psi$ .

(2) L'expression entre crochets, écrite après  $f_1$ , n'est pas un facteur; c'est ce que l'on doit substituer à  $E^{\mathcal{L}_1}$  dans la fonction  $f_1(E^{\mathcal{L}_1})$ .

positive; si  $\frac{3\pi}{4} < \omega < \frac{5\pi}{4}$ , la partie réelle du radical est négative; si  $\frac{5\pi}{4} < \omega < \frac{7\pi}{4}$ , la partie imaginaire du radical est négative.

Les valeurs  $Z$ ,  $Z_i$  ou  $Z_{-i}$  qui seront substituées à  $z$  dans  $H(z)$  annulent l'expression

$$\theta \sin \psi \left( z - \tan \frac{\psi}{2} \right) \left( z - \cot \frac{\psi}{2} \right)^2 + 2z \left( z + \cot \frac{\psi}{2} \right);$$

aussi doit-on faire dans  $H(z)$

$$2 \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)} = \frac{4z^2 \left( z - \cot \frac{\psi}{2} \right)}{\theta \sin \psi \left( z - \cot \frac{\psi}{2} \right) \left[ 2 \left( z - \tan \frac{\psi}{2} \right) + z - \cot \frac{\psi}{2} \right] + 4z + 2 \cot \frac{\psi}{2}}.$$

Valeurs de  $Z$ ,  $Z_i$ ,  $Z_{-i}$ . — Si  $\theta < \theta''$  ou si  $\theta'' < \theta < \theta'$ , on aura à substituer à  $z$ , dans  $H(z)$ , la valeur réelle

$$Z = \cot \frac{\psi}{2} \frac{\nu + 1}{\nu - 1},$$

en posant

$$\cos \chi = -\theta \left( \frac{1 - 2\theta \cos \psi}{3} \right)^{-\frac{3}{2}}, \quad 0 < \chi < 180^\circ;$$

$$\nu = -2 \sqrt{\frac{1 - 2\theta \cos \psi}{3}} \cos \left( 60^\circ + \frac{\chi}{3} \right).$$

$Z$  est positif lorsque  $\theta < \theta''$ , négatif lorsque  $\theta'' < \theta < \theta'$ .

Si  $\theta'' < \theta < \theta'$  ou si  $\theta' < \theta < \frac{1}{2 \cos \psi}$ , on aura à substituer à  $z$ , dans  $H(z)$ , les valeurs

$$Z_i = \cot \frac{\psi}{2} \frac{\nu + 1}{\nu - 1}, \quad Z_{-i} = \text{l'imaginaire conjuguée de } Z_i,$$

en posant

$$\sin 2\chi = -\frac{1}{\theta} \left( \frac{1 - 2\theta \cos \psi}{3} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad \tan \xi = \sqrt[3]{\tan \chi},$$

$$\nu = -\sqrt{\frac{1 - 2\theta \cos \psi}{3}} \frac{1}{\sin 2\xi} + \sqrt{-1} \sqrt{1 - 2\theta \cos \psi} \cot 2\xi. = \left( \cot \frac{\theta}{2} \frac{\nu + 1}{\nu - 1} \right)$$

Si  $\theta > \frac{1}{2 \cos \psi}$ , on aura à substituer à  $z$ , dans  $H(z)$ , les valeurs

$$Z_i = \cot \frac{\psi}{2} \frac{\nu + 1}{\nu - 1}, \quad Z_{-i} = \text{l'imaginaire conjuguée de } Z_i,$$

en posant

conf. de  $\Xi$

$$\cot 2\chi = \theta \left( \frac{2\theta \cos \psi - 1}{3} \right)^{-\frac{3}{2}}, \quad \tan \xi = \sqrt[3]{\tan \chi},$$

$$v = \sqrt{\frac{2\theta \cos \psi - 1}{3}} \cot 2\xi + \sqrt{-1} \sqrt{2\theta \cos \psi - 1} \frac{1}{\sin 2\xi}.$$

Il convient de rappeler, pour achever de dire ce qui se rapporte à la fonction  $H(z)$ , que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}, \quad \dots$$

37. Nous aurons aussi à considérer la fonction

$$\Xi(z) = -\frac{1}{za^{2s}} \left[ \frac{2z^2}{\sin \psi (z^2 - 1)} \right]^{2s-1} \left\{ \left[ \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right]^2 + \alpha \sin \psi \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \frac{z^2 - 1}{z^2} \right\}^{s-1} \\ \times f_1 \left[ \frac{z}{\alpha \sin^2 \frac{\psi}{2} \left( z - \cot \frac{\psi}{2} \right)^2} \right] f(z) \frac{m_1^{2(s-1)} \varphi^{m_1}(z)}{\pi (1.3 \dots 2s-2)^2} \quad (').$$

Les valeurs de  $z$  que l'on aura à substituer dans cette fonction sont

$$z_1 = -\frac{1 - \alpha + \sqrt{(1 - \alpha)^2 - \alpha^2 \sin^2 \psi}}{\alpha \sin \psi}, \quad z_2 = \frac{1}{z_1}.$$

Pour ces valeurs de  $z$  le facteur élevé à la puissance  $s - 1$  dans  $\Xi(z)$  a une valeur réelle et positive.

L'expression de  $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$  est la suivante

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{\theta \sin \psi \left( z - \tan \frac{\psi}{2} \right) \left( z - \cot \frac{\psi}{2} \right)^2 + 2z \left( z + \cot \frac{\psi}{2} \right)}{2z^2 \left( z - \cot \frac{\psi}{2} \right)}.$$

38. Ces définitions données, voici les valeurs de  $I$ , dans tous les cas possibles, en appelant  $\epsilon$  une quantité de la forme  $\frac{K}{m_1}$ ,  $K$  restant fini lorsque  $m_1$  augmente indéfiniment.

(<sup>1</sup>) L'expression entre crochets, écrite après  $f_1$ , n'est pas un facteur; c'est ce que l'on doit substituer à  $E^{K_1}$  dans la fonction  $f_1(E^{K_1})$ .

TABLEAU I.

$\theta < \theta''$	1° Si $Z >  z_2 $ , on a $I = H(Z)(1 + \varepsilon);$
	2° Si $Z <  z_2 $ et si $ \varphi(Z)  >  \varphi(z_2) $ , on a $I = H(Z)(1 + \varepsilon);$
	3° Si $Z <  z_2 $ et si $ \varphi(Z)  <  \varphi(z_2) $ , on a $I = \Xi(z_2)(1 + \varepsilon).$
$\theta'' < \theta < \theta'$	4° Si $ Z_i  >  z_2 $ , on a $I = [H(Z_i) + H(Z_{-i})](1 + \varepsilon);$
	5° Si $ Z_i  <  z_2 $ et si $ \varphi(Z_i)  >  \varphi(z_2) $ , on a $I = [H(Z_i) + H(Z_{-i})](1 + \varepsilon);$
	6° Si $ Z_i  <  z_2 $ et si $ \varphi(Z_i)  <  \varphi(z_2) $ , on a $I = \Xi(z_2)(1 + \varepsilon).$
$\theta'' < \theta < \theta'$	7° Si $ z_2  <  Z  <  z_1 $ , on a $I = H(Z)(1 + \varepsilon);$
	8° Si $ Z  >  z_1 $ , on a $I = \Xi(z_1)(1 + \varepsilon);$
	9° Si $ Z  <  z_2 $ , on a $I = \Xi(z_2)(1 + \varepsilon).$
$\theta > \theta'$	10° Si $ Z_i  <  z_1 $ , on a $I = [H(Z_i) + H(Z_{-i})](1 + \varepsilon);$
	11° Si $ Z_i  >  z_1 $ et si $ \varphi(Z_i)  >  \varphi(z_1) $ , on a $I = [H(Z_i) + H(Z_{-i})](1 + \varepsilon);$
	12° Si $ Z_i  >  z_1 $ et si $ \varphi(Z_i)  <  \varphi(z_1) $ , on a $I = \Xi(z_1)(1 + \varepsilon) \text{ (}^1\text{)}.$

Lorsque  $\theta < 0$  et  $\alpha < \frac{1}{2}$ , on tombera toujours, suivant la valeur de  $\theta$ , dans l'un des cas 1°, 4°, 7°.

(<sup>1</sup>) Ces expressions sont tirées des formules (37), (37)', d'une part, et, d'autre part, des formules (38)", (38)", (69), en observant ce qui a été dit au n° 34.

Lorsque  $\theta > 0$  et  $\alpha > \frac{1}{2}$ , on tombera toujours dans l'un des cas  $8^\circ$ ,  $11^\circ$  ou  $12^\circ$ .

TABLEAU II.

Table donnant la valeur de  $\frac{1}{2 \cos \psi}$ ,  $\theta'$ ,  $\theta''$ ,  $\theta'''$ .  
(Argument  $e = \sin \psi$ ).

$e$ .	$\frac{1}{2 \cos \psi}$ .	$\theta'$ .	$\theta''$ .	$\theta'''$ .	$e$ .	$\frac{1}{2 \cos \psi}$ .	$\theta'$ .	$\theta''$ .	$\theta'''$ .
0,00	0,500	0,125	-1,000	-1,000	0,21	0,511	0,126	-0,713	-1,490
0,01	0,500	0,125	-0,983	-1,018	0,22	0,513	0,126	-0,702	-1,522
0,02	0,500	0,125	-0,966	-1,035	0,23	0,514	0,126	-0,691	-1,555
0,03	0,500	0,125	-0,950	-1,054	0,24	0,515	0,126	-0,681	-1,589
0,04	0,500	0,125	-0,934	-1,073	0,25	0,516	0,126	-0,671	-1,624
0,05	0,501	0,125	-0,919	-1,092	0,26	0,518	0,126	-0,661	-1,661
0,06	0,501	0,125	-0,903	-1,112	0,27	0,519	0,127	-0,652	-1,698
0,07	0,501	0,125	-0,889	-1,133	0,28	0,521	0,127	-0,642	-1,737
0,08	0,502	0,125	-0,874	-1,153	0,29	0,522	0,127	-0,633	-1,777
0,09	0,502	0,125	-0,860	-1,176	0,30	0,524	0,127	-0,624	-1,819
0,10	0,503	0,125	-0,846	-1,198	0,31	0,526	0,127	-0,615	-1,862
0,11	0,503	0,125	-0,833	-1,221	0,32	0,528	0,127	-0,606	-1,907
0,12	0,504	0,125	-0,819	-1,244	0,33	0,530	0,127	-0,597	-1,953
0,13	0,504	0,125	-0,806	-1,269	0,34	0,532	0,128	-0,588	-2,002
0,14	0,505	0,125	-0,794	-1,293	0,35	0,534	0,128	-0,580	-2,052
0,15	0,506	0,125	-0,782	-1,319	0,36	0,536	0,128	-0,572	-2,104
0,16	0,507	0,126	-0,769	-1,346	0,37	0,538	0,128	-0,564	-2,159
0,17	0,507	0,126	-0,757	-1,373	0,38	0,540	0,128	-0,556	-2,215
0,18	0,508	0,126	-0,746	-1,401	0,39	0,543	0,128	-0,548	-2,274
0,19	0,509	0,126	-0,735	-1,430	0,40	0,545	0,129	-0,541	-2,335
0,20	0,510	0,126	-0,724	-1,460					

## APPLICATIONS.

Nos formules permettent de tenir compte, dans le calcul d'une inégalité d'ordre élevé, de l'excentricité de la planète intérieure et de l'inclinaison des orbites; elles fournissent, avec une faible erreur relative, la partie du coefficient de l'inégalité qui est indépendante de l'excentricité de la planète extérieure. Cette partie, il est vrai, peut différer du coefficient exact, parce que les termes qui contiennent en facteur l'excentricité négligée sont multipliés par de grands fac-

teurs ('); mais, si elle est notable, il y a des chances pour que l'inégalité complète ait elle-même une valeur sensible, et il y aura lieu de la déterminer par les méthodes ordinaires.

1° *Application à Mercure.* — Proposons-nous de trouver le coefficient de l'inégalité de la longitude moyenne de Mercure, dont l'argument dépend de huit fois le moyen mouvement de Vénus moins cinq fois celui de Mercure.

Cette inégalité se trouve dans les Tables de Le Verrier (*Annales de l'Observatoire*, t. V) qui a tenu compte seulement de l'excentricité de Mercure. D'après Le Verrier, le coefficient de la fonction perturbatrice, multiplié par le demi grand axe de Vénus, a pour valeur  $-(1,815)e^2$ , celui de l'inégalité  $-0'',007$  ou, plus exactement,  $-0'',0067$  (p. 189, colonnes  $\alpha'R_1$  et  $\Lambda_1$ ).

Nous avons fait le calcul de nos expressions approchées, en tenant compte seulement de l'excentricité de Mercure, comme Le Verrier, c'est-à-dire en y faisant

$$f = f_1 = 1, \quad s = \frac{1}{2}.$$

Dans le cas actuel il faut prendre

$$m = -5, \quad m_1 = 8, \quad \theta = -0,625, \quad e = \sin \psi = 0,205618.$$

D'après le Tableau II,  $\theta$  est compris entre  $\theta'$  et  $\theta''$  pour  $e = 0,205, \dots$ . Il faut donc choisir, dans le Tableau I, entre les cas 7°, 8° et 9° et à cet effet calculer  $Z$ ,  $z_1$  et  $z_2 = \frac{1}{z_1}$ .

En prenant

$$\begin{aligned} a &= \text{distance moyenne de Mercure} = 0,3870987, \\ a_1 &= \quad \quad \quad \text{Vénus} = 0,7233322, \end{aligned}$$

on trouve

$$Z = -(0,12104), \quad z_1 = -(0,92059);$$

---

(1) Voir à ce sujet une Note de M. Callandreau (*Comptes rendus* du 5 septembre 1892).

les nombres étant représentés par leurs logarithmes écrits entre parenthèses. On a  $|z_2| < |Z| < |z_1|$ ; on tombe par suite dans le cas 7°.

On trouve successivement, en faisant  $z = Z$  dans les formules du n° 36,

$$\begin{aligned}\frac{r}{a_1} &= (\overline{1},81255), \\ (a_1^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} &= (0,25962), \\ \frac{1}{\pi\sqrt{m_1}} &= (\overline{1},05130), \\ \sqrt{\frac{2\varphi}{\varphi''}} &= -(0,57379), \\ \varphi^{m_1} &= -(\overline{2},44773).\end{aligned}$$

$\sqrt{\frac{2\varphi}{\varphi''}}$  est affecté du signe  $-$ , parce que  $Z$  est réel et négatif et a, par suite,  $\pi$  pour argument. On trouve ensuite

$$I = -(\overline{3},9944).$$

Tel est le coefficient de  $\cos(8l' - 5l)$  dans le développement de la fonction perturbatrice. Le coefficient de  $\sin(8l' - 5l)$  est nul puisque  $I$  n'a pas de partie imaginaire, ce à quoi on pouvait s'attendre en s'appuyant sur la forme de l'argument dans le développement ordinaire de la fonction perturbatrice.

L'inégalité correspondante  $\delta\rho$  a pour valeur, en appelant  $\mu_1$  la masse de la planète perturbatrice qui est ici Vénus ( $\log\mu_1 = \overline{6},39594$ ),  $n$  le moyen mouvement de la planète troublée (Mercure),  $n_1$  le moyen mouvement de la planète perturbatrice (Vénus),

$$\delta\rho = -\frac{3\alpha\mu_1 m}{\sin 1''} \frac{I}{\left(m + m_1 \frac{n_1}{n}\right)^2} \sin(ml + m_1 l_1) ('),$$

en prenant pour origine des longitudes l'un des nœuds des orbites.

Tout calcul fait on trouve

$$\delta\rho = -0'',0084 \sin(-5l + 8l_1).$$

---

(1) Voir TISSERAND, *loc. cit.*, Chap. XI.

En comparant le coefficient de  $\delta\rho$  à celui de Le Verrier, on voit que l'erreur relative du résultat est  $\frac{1}{5} = \frac{1}{m}$ . L'approximation est satisfaisante, bien que, dans le cas actuel, le nombre  $m$  ne soit pas très élevé.

2° *Seconde application à Mercure.* — En développant en fraction continue le rapport  $\frac{n}{n_1}$ , on trouve la réduite  $\frac{23}{9}$ .

Proposons-nous de chercher l'ordre de grandeur du coefficient de l'inégalité de la longitude moyenne de Mercure dont l'argument dépend de vingt-trois fois le moyen mouvement de Vénus, moins neuf fois celui de Mercure.

Cette inégalité a été considérée par M. Newcomb dans son étude sur les passages de Mercure (*Astronomical Papers*, t. I).

Nous négligerons l'excentricité de Vénus et l'inclinaison de l'orbite de Mercure sur celle de Vénus qui, en raison de leur petitesse, n'apportent vraisemblablement pas un fort appoint à la partie du coefficient qui dépend de la grande excentricité de Mercure.

Le calcul se conduit comme pour l'inégalité d'argument  $8l_1 - 5l$ , en partant des mêmes données. On rentre encore dans le cas 7° du Tableau I.

On trouve

$$I = (8,7230)$$

et

$$\delta\rho = 0'',015 \sin(23l_1 - 9l).$$

L'inégalité est donc extrêmement faible.

3° *Application à Jupiter et à Junon.* — La théorie de Junon a été entreprise par Damoiseau (*Connaissance des Temps*, 1846) en tenant compte de l'action de Jupiter et de Saturne et en se limitant, dans les approximations, aux quantités du 5° ordre.

Nous avons reconnu qu'il faudrait calculer, dans une théorie précise de Junon, une inégalité du 12° ordre, affectant la longitude moyenne de cette planète, et provenant des perturbations de son moyen mouvement causées par Jupiter. L'argument de cette inégalité est  $19l_1 - 7l$  ( $l_1$  longitude moyenne de Jupiter,  $l$  longitude moyenne de Junon, comptées à partir de l'un des nœuds des orbites).

Les éléments de calcul empruntés à l'*Annuaire du Bureau des*



*Longitudes* sont les suivants :

Pour Jupiter.	Pour Junon.
$n_1 = 299'', 12\ 8\ 4$	$n = 814'', 0766$
$a_1 = 5,202\ 800$	$a = 2,668256$
Masse $= \mu_1 = \frac{1}{1047,2}$	$e = 0,257857$

On a d'ailleurs

$$m = -7, \quad m_1 = 19, \quad \theta = -\frac{7}{19} = -0,368....$$

On reconnaît que l'on tombe encore dans le cas 7° du Tableau I.

En conduisant le calcul comme précédemment et tenant compte seulement de l'excentricité de Junon, on trouve

$$I = (7,5240)$$

et

$$\delta\rho = 10'',7 \sin(19\ l_1 - 7\ l).$$

La période de l'inégalité est de 235 ans.

Le coefficient serait vraisemblablement modifié si l'on ne négligeait pas l'inclinaison des orbites et surtout l'excentricité de Jupiter qui est notable.

#### ADDITION AU MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

Les racines de l'équation  $U(z) = 0$  (17) sont données (18), (19) par

$$(70) \quad z = \cot \frac{\psi}{2} \frac{\varphi + 1}{\varphi - 1},$$

$\varphi$  étant définie par l'équation

$$(71) \quad \varphi^3 - (1 - 2\theta \cos \psi) \varphi + 2\theta = 0.$$

Nous nous proposons de déterminer la valeur de  $Z$ , c'est-à-dire, lorsque l'équation  $U = 0$  a toutes ses racines réelles, la plus petite racine de cette équation si  $\theta < 0$ , ou la racine moyenne si  $\theta > 0$ .

$$(72) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \text{Lorsque } \nu \text{ croît de } -\infty \text{ à } -1, & z \text{ décroît de } \cot \frac{\psi}{2} \text{ à } 0, \\ \text{id.} & -1 \text{ à } +1, & \text{id.} \quad 0 \text{ à } -\infty, \\ \text{id.} & +1 \text{ à } +\infty, & \text{id.} \quad +\infty \text{ à } \cot \frac{\psi}{2}. \end{array} \right.$$

Supposons d'abord  $\theta < 0$ .

L'équation (71), dont nous supposons les racines réelles, est vérifiée par

$$(73) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu_1 = 2\sqrt{\frac{1-2\theta\cos\psi}{3}} \cos \frac{\chi}{3}, \\ \nu_2 = -2\sqrt{\frac{1-2\theta\cos\psi}{3}} \cos \left(60^\circ - \frac{\chi}{3}\right), \\ \nu_3 = -2\sqrt{\frac{1-2\theta\cos\psi}{3}} \cos \left(60^\circ + \frac{\chi}{3}\right); \end{array} \right.$$

en posant

$$(74) \quad \cos \chi = -\theta \left( \frac{1-2\theta\cos\psi}{3} \right)^{-\frac{3}{2}}, \quad 0 < \chi < 90^\circ.$$

Les inégalités  $0 < \frac{\chi}{3} < 30^\circ$  entraînent les suivantes

$$\nu_1 > 0 > \nu_3 > \nu_2.$$

1°  $0 < \theta'''$ .  $U(z) = 0$  a ses trois racines positives : la plus grande est supérieure à  $\cot \frac{\psi}{2}$  et la racine  $Z$  que nous nous proposons de calculer est la plus petite.

Le Tableau (72) montre que la racine plus grande que  $\cot \frac{\psi}{2}$  ne peut être donnée que par  $\nu_1$ , et que  $\nu_2$  et  $\nu_3$  sont forcément compris entre  $-1$  et  $-\infty$ , sans quoi ces paramètres ne fourniraient pas pour  $z$  des valeurs positives. La plus petite valeur de  $z$  correspond d'ailleurs à  $\nu_3$ , qui est inférieur à  $\nu_2$  en valeur absolue.

Il faut donc, pour avoir  $Z$ , substituer dans la formule (70) le nombre  $\nu_3$ .

2°  $0 > \theta > \theta'$ .  $U(z) = 0$  a deux racines négatives et une racine positive supérieure à  $\cot \frac{\psi}{2}$ . La racine  $Z$  que nous nous proposons de calculer est la plus petite.

La racine supérieure à  $\cot \frac{\psi}{2}$  ne peut être donnée que par  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  et  $\nu_3$ , devant donner des valeurs négatives pour  $z$ , ces paramètres sont compris (72) entre 0 et  $-1$ . La plus petite valeur de  $z$  correspond à  $\nu_3$  qui est inférieur en valeur absolue à  $\nu_2$ .

Il faut donc pour avoir  $Z$  substituer  $\nu_3$  dans l'équation (70).

*Supposons, en second lieu,  $\theta' > \theta > 0$ .*

L'équation  $U(z) = 0$  a deux racines négatives et une racine positive comprise entre 0 et  $\tan \frac{\psi}{2}$ .

La racine  $Z$  que nous nous proposons de calculer est la racine moyenne.

Les racines de l'équation (71) sont encore (73)  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\nu_3$ , en posant

$$\cos \chi = -\theta \left( \frac{1 - 2\theta \cos \psi}{3} \right)^{-\frac{3}{2}}, \quad 90^\circ < \chi < 180^\circ.$$

Les inégalités

$$30^\circ < \frac{\chi}{3} < 60^\circ$$

entraînent les suivantes

$$\nu_1 > \nu_3 > 0 > \nu_2.$$

La racine positive de  $U(z)$ , qui est inférieure à  $\tan \frac{\psi}{2}$ , ne peut être donnée par  $\nu_2$  qui est négatif (72).

$\nu_1$  et  $\nu_3$  devant donner à  $z$  des valeurs négatives, on a (72)

$$1 > \nu_1 > \nu_3 > 0.$$

La racine négative de  $U(z)$ , la plus voisine de zéro, est donc donnée par  $\nu_3$ .

Il faut donc encore, pour avoir  $Z$ , substituer le nombre  $\nu_3$  dans l'équation (70).

Ainsi se trouvent établies les formules (23), (24), (25) données dans ce Mémoire sans démonstration.

