JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAURICE LÉVY

Mémoire sur un nouveau cas intégrable du problème de l'élastique et l'une de ses applications

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 10 (1884), p. 5-42.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1884_3_10__5_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Mémoire sur un nouveau cas intégrable du problème de l'élastique et l'une de ses applications;

PAR M. MAURICE LÉVY.

INTRODUCTION.

Le problème de la flexion finie d'une ligne ou verge élastique sous l'action des forces données a été, comme on sait, résolu par Lagrange dans le cas d'une verge droite, en faisant abstraction des forces qui, comme la pesanteur, agissent sur la masse entière de la verge, pour ne tenir compte que de celles qui s'exercent en ses extrémités.

Le cas nouveau et plus général que nous avons traité est celui de la déformation plane d'une verge qui, dans son état naturel, serait soit droite, soit circulaire, et qui, outre des forces ou couples agissant en ses extrémités, supporterait une pression uniformément répartie sur sa fibre moyenne, normale à cette courbe et lui restant normale quelque déformation qu'elle prenne.

Le premier de ces deux cas ne dépend, comme on sait, que des fonctions elliptiques de première espèce; nous montrons que le second se ramène aussi à des quadratures elliptiques, mais comporte à la fois des fonctions elliptiques de première et de troisième espèce.

Le premier a trouvé une application extrêmement utile et importante en Résistance des matériaux, où il a fourni la solution, passée aujourd'hui dans la pratique, du problème si délicat de la stabilité des prismes droits dits *chargés debout* (colonnes, piliers, etc.). Le second (et c'est ce qui nous a amené à l'étudier) donne lieu à une application du même genre.

De même qu'une colonne comprimée suivant son axe reste théoriquement droite, mais se trouve dans une sorte d'équilibre instable en ce sens que la moindre déviation la fait rompre par flexion si elle est trop longue par rapport à ses dimensions transversales, de même une pièce circulaire (un manchon cylindrique mince par exemple), pressée normalement et uniformément de l'extérieur vers l'intérieur, se comprime en restant circulaire, mais se trouve aussi dans cette sorte d'équilibre instable, en ce sens que la moindre déviation accidentelle l'aplatit plus ou moins si son épaisseur est trop faible par rapport à son rayon.

Quelle épaisseur faut-il lui donner pour être certain qu'un tel accident ne pourra pas se produire? C'est, comme on voit, l'extension aux pièces circulaires du problème des pièces droites chargées debout [1].

---

[1] On peut poser un problème plus général et nouveau qui mériterait d'être appelé le *problème des pièces courbes chargées debout.* Toute pièce courbe dont la fibre moyenne satisfait à la double condition : 1° de coïncider avec l'une quelconque des courbes funiculaires relatives aux forces extérieures données qui la sollicitent; 2° d'être placée, par rapport à ces forces, de façon à être pressée et non tendue, est exactement dans le même état d'équilibre instable que les pièces droites chargées debout, parce qu'elle ne subit qu'une compression longitudinale sans flexion. Le cas des pièces circulaires que nous traitons ici est le plus simple après celui des pièces droites. Le cas le plus simple après paraît être celui de l'arc parabolique comprimé (pont suspendu renversé); mais nous n'avons pas réussi à le résoudre.

C'est une question qui nous a été plusieurs fois posée par des constructeurs qu'elle intéresse, en raison des pressions de plus en plus considérables aujourd'hui usitées dans certaines industries; et, à notre connaissance, elle n'est pas sortie du domaine de l'empirisme.

Pour la résoudre rationnellement, il faut commencer par chercher toutes les déformations de *grandeur finie* susceptibles de se produire sous l'influence d'une déviation accidentelle. Suivant que l'épaisseur du manchon (ou plus généralement le moment d'inertie de la section de l'anneau considéré) est plus ou moins faible, on reconnaît que ces déformations peuvent être, ou en nombre illimité, ou en nombre limité (on trouve dans les deux cas que la fibre moyenne affecte la forme de courbes étoilées rappelant celles du problème de la toupie en Mécanique) ou impossibles. La question est de savoir quelles dimensions il faut adopter pour être certain de se trouver dans ce dernier cas.

Pour cela, on observe que l'intégration de l'équation différentielle du second ordre de la fibre moyenne déformée introduit deux constantes arbitraires; ces constantes se déterminent par la double condition :

a. Que la courbe déformée est fermée;

b. Que sa longueur totale est sensiblement la même que celle de la fibre circulaire au moment où elle est simplement comprimée avant toute flexion.

L'expression de la condition *a* introduit naturellement dans la question un nombre entier n entièrement arbitraire, ce qui montre de suite qu'*en général* il pourra se produire une infinité de modes de flexion. Mais, si les dimensions de l'anneau sont suffisamment grandes, on conçoit que les deux conditions *a* et *b* pourront n'être plus compatibles que pour *certaines* valeurs de l'entier n, et, si ces dimensions sont plus grandes encore, on comprend de même que les deux conditions pourront devenir incompatibles, *quel que soit cet entier* n. Ce sont ces dernières dimensions qui assureront la pièce contre toute flexion accidentelle et qu'il s'agit de découvrir.

Les deux conditions *a* et *b* se traduisent analytiquement par un système de deux équations modulaires simultanées, auxquelles, après diverses transformations, nous avons donné la forme suivante, où U et u sont les deux constantes de l'intégration qu'il faut déterminer, constantes que nous avons choisies de façon qu'elles soient purement numériques, toutes deux positives et la seconde moindre que 1; E, I, p, ρ_0 sont respectivement le coefficient d'élasticité de la matière, le moment d'inertie de la section de l'anneau $\left(\text{si l'anneau est un simple manchon cylindrique d'épaisseur } \varepsilon \text{ et de longueur } 1,\ I = \frac{\varepsilon^3}{12}\right)$, la pression par unité de longueur de la fibre moyenne, le rayon de cette fibre après la compression simple sans flexion due à la pression p; enfin n est le nombre entier dont il vient d'être parlé :

$$\frac{\varpi}{n}\left(\frac{EI}{p\rho_0^3}\right)^{-\frac{1}{3}} U^{-\frac{2}{3}} = \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{U^2 + U(1+uy) - \frac{u^2}{4}(1-y^2)}},$$

$$\frac{2\varpi}{n} = \int_{-1}^{+1} \frac{2U(1+uy) - u^2(1-y^2)}{(1+2uy+u^2)\sqrt{1-y^2}\sqrt{U^2 + U(1+uy) - \frac{u^2}{4}(1-y^2)}}.$$

On peut observer d'abord que ces deux équations qui fournissent les deux constantes U et u en fonction des données E, I, p, ρ_0 du problème et du nombre entier n ont ceci de remarquable :

1° La seconde est absolument indépendante de la nature et des dimensions de l'anneau; elle donne, pour chaque valeur de n, la constante U en fonction de celle u; on pourrait donc construire, une fois pour toutes, une Table numérique de cette relation, Table qui serait applicable à tous les anneaux imaginables, quelles que soient leur forme, les dimensions de leur section transversale, leur rayon et la matière dont ils sont formés.

2° La première renferme toutes les données du problème *en bloc*, c'est-à-dire dans le seul terme $\left(\frac{EI}{p\rho_0^3}\right)^{-\frac{1}{3}}$, de sorte qu'on pourrait aussi faire de l'intégrale définie du second membre une Table applicable à toute espèce d'anneaux.

En discutant ces équations (sans les ramener à la forme normale, ce qui nous a paru très compliqué comme calcul), nous trouvons : 1° que l'entier n ne peut jamais être 1, qu'on a, au moins, $n = 2$; 2° que les deux équations sont incompatibles, quel que soit n, et que, par suite, aucune flexion ne peut se produire, si l'on prend

$$\frac{EI}{p\rho_0^3} > \frac{4}{9} \quad (^1),$$

inégalité qui fournit ainsi une solution très commode et très pratique du problème posé, quoique l'analyse qui y amène soit très laborieuse.

Nous sommes conduit, en passant, à quelques remarques simples, mais utiles et qui, à notre connaissance, n'ont pas encore été faites, sur les verges planes de forme quelconque soumises à une pression normale uniforme. Ainsi, nous montrons que, si une telle verge est arrivée à l'état d'équilibre et que, suivant la théorie soit de l'Élasticité, soit de la Résistance, on remplace les forces élastiques qui se développent dans chaque section transversale par une force unique F passant par le centre de gravité de cette section et par un couple unique :

1° Si, en chaque point de la fibre moyenne, on mène une perpendiculaire à la force élastique F qui y passe, toutes ces perpendiculaires concourent en un même point que nous nommons le *centre des forces élastiques*.

2° La force F est proportionnelle à la distance r de son point d'application à ce centre et le coefficient de proportionnalité est la pression donnée p, en sorte que $F = pr$.

En un mot, les forces élastiques F aux différents points de la fibre moyenne déformée sont égales en grandeur, direction et sens aux vitesses que prendraient ces points si l'on imprimait à la courbe une rotation instantanée, numériquement égale à la pression donnée p, autour d'un point convenablement choisi du plan, point que nous appelons le *centre des forces élastiques*.

3° Le moment de flexion M est, à une constante près, égal à $\frac{pr^2}{2}$.

---

(1) Ainsi que nous l'observons dans le corps de ce Mémoire, le chiffre $\frac{4}{9}$ ne représente pas la limite la plus faible possible; il est vraisemblable, d'après les considérations indiquées (p. 37), que cette dernière limite est $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Nous avons indiqué cette limite, dès 1882, au Collège de France, où ce travail a été exposé en entier.

Ces résultats permettent de donner à l'équation différentielle du second ordre à intégrer la forme la plus simple possible.

§ I. — Propriétés générales des forces élastiques résultant d'une pression uniforme exercée normalement à la fibre moyenne d'une pièce plane de forme quelconque.

Je considère une verge élastique qui, dans son état naturel, soit symétrique par rapport à un plan contenant sa fibre moyenne.

Celle-ci supporte une pression normale et uniformément répartie sur toute sa longueur à raison de p kilogrammes par unité de longueur. Sous l'influence de cette pression, la pièce se déformera, mais sans que sa fibre moyenne sorte de son plan.

Je ne suppose d'ailleurs pas que cette déformation soit très petite. J'admets qu'elle peut atteindre une grandeur quelconque si les dimensions transversales de la pièce sont assez petites pour que cela puisse avoir lieu sans rupture et sans que la limite d'élasticité de la matière soit dépassée.

Considérons la pièce dans son état d'équilibre définitif, état qu'il s'agit de déterminer.

On sait que, suivant les règles de la Résistance des matériaux et aussi suivant les déductions approchées des principes de la théorie mathématique de l'Élasticité, les forces élastiques qui agissent dans une section transversale quelconque peuvent être remplacées par :

1° Une force unique F appliquée au centre de gravité de la section, c'est-à-dire au point où elle coupe la fibre moyenne;

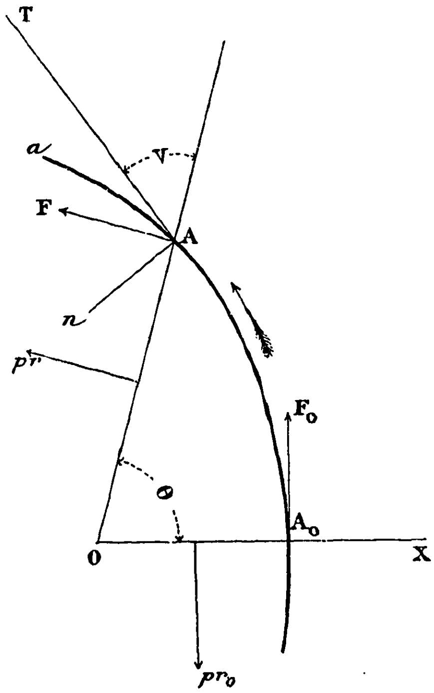
2° Un couple unique M qu'on nomme le *couple de flexion* ou moment fléchissant.

Rappelons encore que la projection de la force F sur la normale à la fibre moyenne se nomme l'*effort tranchant*.

Pour préciser le sens de ces forces, soit (*fig.* 1) A un point quelconque de la fibre moyenne, point dont nous pouvons définir la position par l'arc $A_0A = s$ qui le sépare d'un point fixe A_0, les s positifs étant comptés dans le sens de la flèche.

Nous appelons force élastique F et moment de flexion M au point A la résultante de translation et le moment résultant des pressions élastiques exercées par la partie A_0A de la pièce sur la partie Aa, en sorte que les pressions inverses exercées par cette dernière partie sur la première auront respectivement $-F$ et $-M$ pour résultante et pour moment résultant.

Fig. 1.



Cela posé, voici quelques propositions très simples, mais qui nous seront très utiles :

Théorème I. — *Quelle que soit la forme d'équilibre que prend une verge élastique plane (primitivement droite ou courbe) sous l'influence d'une pression p uniforme et normale à sa fibre moyenne, la force élastique* F *qui s'exerce en un point quelconque* A *de cette fibre est égale en grandeur, direction et sens à la vitesse que prendrait ce point, si l'on imprimait à la verge une rotation instantanée dont la vitesse angulaire serait numériquement égale à p, autour d'un point convenablement choisi du plan. En d'autres termes, si, par chaque point* A *de la fibre moyenne, on mène une perpendiculaire à la force élastique* F *qui s'y produit : 1° toutes ces perpendiculaires concourent en un même point* O *que* *j'appelle le* centre des forces élastiques; 2° *on a* $F = p \times OA = pr$, *en désignant par r le rayon vecteur* OA *issu du point* O; 3° *toutes les forces* F *tendent à faire tourner la verge dans le même sens autour du point* O. *Ce sens est celui qui va de la partie* A_0A *qui, en vertu de nos conventions, exerce la force élastique, vers la partie* Aa *qui la subit.*

Pour démontrer cette proposition, soient (*fig.* 1) F et M la force élastique et le couple de flexion au point quelconque A; F_0 et M_0 les quantités analogues au point A_0.

Par ce dernier point je mène A_0O perpendiculaire à F_0 et je prends sur cette perpendiculaire une longueur $A_0O = r_0$, telle qu'on ait

$$(a) \qquad F_0 = pr_0.$$

Je porte cette longueur à la gauche d'un observateur placé en A_0 et regardant F_0. Je dis que le point O est le *centre* des forces élastiques, c'est-à-dire que, si on le joint au point A, la force élastique F est perpendiculaire au rayon vecteur $OA = r$, située à la gauche de ce rayon comme F_0 l'est par rapport au rayon OA_0 et que, de plus, $F = pr$.

En effet, la portion A_0A de la verge est en équilibre sous l'influence :

1° Des forces élastiques F_0, $-F$ exercées en A_0 et A et de la pression p exercée sur l'arc A_0A;

2° Des couples M_0 et $-M$.

Il faut donc que la somme des projections de ces diverses forces sur un axe quelconque et la somme de leurs moments relativement à un point quelconque du plan soient nulles.

Mais on sait que, si une pression uniforme p s'exerce normalement à la courbe plane A_0A, la somme des projections des pressions élémentaires sur un axe quelconque et la somme de leurs moments relativement à un point du plan sont indépendantes de la forme de la courbe; on ne change donc pas ces sommes, ni, par suite, les conditions d'équilibre de translation et de rotation, en remplaçant cette pression par une pression pareille exercée sur le contour brisé AOA_0, ou par deux forces pr et pr_0 respectivement appliquées aux milieux des deux lignes AO et OA_0 perpendiculairement à ces lignes et dans les sens indiqués sur la figure.

Or, en vertu de la relation (a), les forces F_0 et pr_0 forment un couple; donc les forces dont nous avons à écrire les conditions d'équilibre se réduisent en définitive à :

1° Trois couples M_0, $-M$, (F_0, pr_0);

2° Deux forces pr, $-F$.

Pour que ces deux dernières puissent équilibrer les couples, il faut qu'elles forment elles-mêmes un couple; par suite, les forces pr et $+F$ doivent être égales, parallèles et de même sens, ce qui démontre la proposition énoncée.

Théorème II. — *Le moment fléchissant en un point quelconque de la fibre moyenne est, à une constante près, égal à $\frac{1}{2}pr^2$, c'est-à-dire au demi-produit de la pression p par le carré de la distance du point* A *considéré au centre des forces élastiques.*

En effet, les forces pr et $-F$ formant un couple, il doit y avoir équilibre entre les quatre couples

$$M_0, \quad -M, \quad (F_0, pr_0), \quad (pr, -F).$$

Je regarderai les moments comme positifs lorsqu'ils tendront à faire tourner leurs bras de levier de *droite à gauche*, c'est-à-dire lorsqu'ils tendront à augmenter la courbure de la courbe A_0A telle qu'elle est représentée sur la figure; alors les deux couples (F_0, pr_0) et $(pr, -F)$ sont, le premier négatif, le second positif, et leurs moments respectifs seront en grandeur et signe

$$-\frac{pr_0^2}{2}, \quad +\frac{pr^2}{2}.$$

Donc, l'équilibre entre les quatre couples exige que

$$M_0 - M - \frac{pr_0^2}{2} + \frac{pr^2}{2} = 0$$

ou

$$M - \frac{pr^2}{2} = M_0 - \frac{pr_0^2}{2} = \text{const.},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire I. — Les points où le moment fléchissant est maximum ou minimum sont ceux où le rayon vecteur r issu du centre des forces élastiques est lui-même maximum ou mximimum, c'est-à-dire les pieds des normales abaissées de ce point sur la fibre moyenne.

Corollaire II. — Aux points où le moment fléchissant est maximum ou minimum, l'effort tranchant est nul (car, en vertu du théorème I, la force élastique F y est tangente à la fibre moyenne ou perpendiculaire à la section droite de la pièce).

Cela, du reste, résulterait aussi du théorème suivant qui est vrai, même quand les forces extérieures ne se réduisent pas à une pression uniforme.

Théorème III. — *L'effort tranchant en chaque point de la fibre moyenne est égal à la dérivée du moment fléchissant relativement à l'arc s qui définit ce point.*

En effet, de l'expression ci-dessus trouvée pour M, on tire

$$\frac{dM}{ds} = pr\frac{dr}{ds} = F\frac{dr}{ds}.$$

Mais $\frac{dr}{ds}$ est le cosinus de l'angle que forme le rayon vecteur OA (*fig.* 1) avec la tangente AT à la fibre moyenne en ce point, ou le cosinus de l'angle que la force F perpendiculaire au rayon vecteur fait avec la normale n. Donc le second membre est bien la projection de la force F sur la section droite de la pièce, c'est-à-dire l'effort tranchant.

§ II. — Équation de la flexion finie d'une verge circulaire soumise a une pression normale uniforme.

Supposons que la verge qui, sous l'influence de la pression normale p, affecte la forme A_0A, ait, à l'état naturel, la forme d'un arc de cercle de rayon ρ_0 (ce qui comprend le cas où elle aurait été d'abord rectiligne en supposant $\rho_0 = \infty$.)

Désignons par ρ le rayon de courbure au point A de la courbe d'équilibre, dans sa forme finale. Si E est le coefficient d'élasticité de la matière qui forme la verge et I le moment d'inertie de sa section droite relativement à un axe perpendiculaire au plan de la figure et passant par le point A, on a, d'après les principes de la Résistance et aussi ceux de la théorie mathématique de l'Élasticité (en écartant le cas où la compression longitudinale de la fibre moyenne serait comme infinie par rapport aux autres forces élastiques) :

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{EI}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) = \mathrm{M}.$$

Nous avons vu que

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{M} - \frac{pr^2}{2} = \mathrm{M}_0 - \frac{pr_0^2}{2} = \mathrm{C} = \text{const}.$$

La constante C n'est pas connue *a priori;* elle est à déterminer par les conditions du problème.

On tire de là

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{EI}} + \frac{pr^2}{2\,\mathrm{EI}}$$

ou, en posant

$$\text{(3)} \qquad \frac{1}{\rho_0} + \frac{\mathrm{C}}{2\,\mathrm{EI}} = \frac{p}{2\,\mathrm{EI}}\mu,$$

μ étant une autre constante indéterminée remplaçant celle de C, il viendra

$$\text{(4)} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{p}{2\,\mathrm{EI}}(r^2 + \mu),$$

équation différentielle du second ordre qu'il s'agit d'intégrer.

Rapportons la courbe cherchée à un axe polaire $\mathrm{OA}_0\mathrm{X}$ issu du centre des forces élastiques et passant par le point arbitrairement choisi A_0 à partir duquel nous comptons les arcs s. Désignons par θ l'angle polaire et par V l'angle que la tangente AT prolongée dans le sens des s positifs fait avec le rayon vecteur OA : alors la courbure, comptée comme positive lorsque la courbe présente sa concavité à l'axe polaire, sera

$$\frac{d(\mathrm{V} + \theta)}{ds}$$

ou

$$\frac{1}{\rho} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{ds} + \frac{d\theta}{ds}.$$

Mais on a

$$\cos V = \frac{dr}{ds}, \quad \sin V = r\frac{d\theta}{ds};$$

d'où enfin

$$\frac{1}{\rho} = \cos V\frac{dV}{dr} + \frac{1}{r}\sin V = \frac{1}{r}\frac{d(r\sin V)}{dr}.$$

Donc l'équation différentielle de la courbe est

$$\frac{1}{r}\frac{dr\sin V}{dr} = \frac{p}{2EI}(r^2 + \mu),$$

μ étant, comme il a été dit, une constante arbitraire à déterminer par les conditions du problème.

On tire de là

$$(5) \qquad \sin V = \frac{p}{2EI}\left(\frac{r^3}{4} + \frac{\mu r}{2} + \frac{A}{r}\right),$$

A étant une nouvelle constante,

$$(5\ bis) \qquad \cos V = \frac{dr}{ds} = \pm\sqrt{1 - \frac{p^2}{4E^2I^2}\left(\frac{r^3}{4} + \frac{\mu r}{2} + \frac{A}{r}\right)^2},$$

ou

$$\frac{dr^2}{ds} = \pm\sqrt{4r^2 - \frac{p^2}{E^2I^2}\left(\frac{r^4}{4} + \frac{\mu r^2}{4} + A\right)^2},$$

qui montre que r^2 s'obtient en fonction de l'arc s par une quadrature elliptique

$$(6) \qquad s = \int_{b^2}^{r^2} \frac{dr^2}{\pm\sqrt{4r^2 - \frac{p^2}{E^2I^2}\left(\frac{r^4}{4} + \frac{\mu r^2}{2} + A\right)^2}},$$

en remplaçant la lettre $r_0 = OA_0$ par celle b.

D'ailleurs, de l'équation (5) qui donne $\sin V$ on tire

$$\sin V = r\frac{d\theta}{ds} = r\frac{d\theta}{dr}\frac{dr}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d\theta}{dr}\frac{dr^2}{ds}$$

ou

$$\frac{p}{2\mathrm{EI}}\left(\frac{r^3}{4}+\frac{\mu r}{2}+\frac{\mathrm{A}}{r}\right)=\pm\frac{1}{2}\frac{d\theta}{dr}\sqrt{4r^2-\frac{p^2}{\mathrm{E}^2\mathrm{I}^2}\left(\frac{r^4}{4}+\frac{\mu r^2}{2}+\mathrm{A}^2\right)}$$

ou, en divisant les deux membres par r, il vient

$$\frac{d\theta}{dr^2}=\frac{p}{2\mathrm{EI}}\left(\frac{r^2}{4}+\frac{\mu}{2}+\frac{\mathrm{A}}{r^2}\right)\frac{1}{\pm\sqrt{4r^2-\frac{p^2}{\mathrm{E}^2\mathrm{I}^2}\left(\frac{r^4}{4}+\frac{\mu r^2}{2}+\mathrm{A}\right)^2}},$$

et

$$(7)\qquad \theta=\frac{p}{2\mathrm{EI}}\int_{b^2}^{r^2}\frac{\left(\frac{r^2}{4}+\frac{\mu}{2}+\frac{\mathrm{A}}{r^2}\right)dr^2}{\pm\sqrt{4r^2-\frac{p^2}{\mathrm{E}^2\mathrm{I}^2}\left(\frac{r^4}{4}+\frac{\mu r^2}{2}+\mathrm{A}\right)^2}},$$

qui est l'équation même de la courbe cherchée en coordonnées polaires. Elle n'exige, comme celle qui donne l'arc, que des intégrations elliptiques.

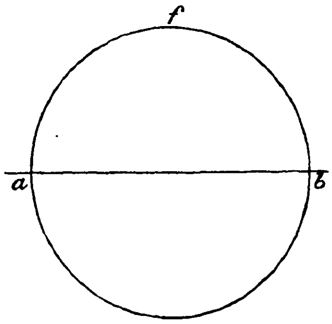
Il reste à déterminer les trois constantes A, μ, b par les conditions particulières de chaque problème. Une fois ces constantes connues, la courbe de flexion l'est elle-même, par suite aussi (théorème I) la force élastique F dont les composantes normales et tangentielles à la courbe donnent respectivement l'effort tranchant et la compression longitudinale de la fibre moyenne. D'ailleurs, la constante μ connue, on en déduit par la formule (3) celle C qui entre dans l'expression du moment fléchissant : celui-ci sera donc également déterminé.

On aura ainsi tous les éléments nécessaires pour calculer, d'après les règles habituelles, l'aire et le moment d'inertie de la section de la pièce, de façon que la compression, l'extension et l'effort tranchant maxima ne dépassent pas les limites assignées à la matière que l'on emploie.

§ III. — Application a la stabilité d'un anneau fermé et uniformément comprimé sur tout son pourtour.

Supposons (*fig.* 2) que, dans son état naturel, la fibre moyenne forme un anneau circulaire fermé de rayon donné ρ_1. Sous l'influence de la pression p que je suppose agir de l'extérieur vers l'intérieur, la pièce se contractera en restant circulaire. Si l'on fait une section diamétrale quelconque, qu'on appelle $\mathfrak{S}$ l'aire de la section de la pièce et qu'on

Fig. 2.



désigne par R la compression par unité de surface qu'on ne veut pas dépasser, on devra avoir, d'après la formule habituelle qui exprime l'équilibre du demi-anneau *afb*,

$$2R\mathfrak{S} = 2\rho_1 p,$$

d'où

$$\mathfrak{S} = \frac{p\rho_1}{R}.$$

Si la pression s'exerçait du dedans au dehors, cette formule suffirait; mais ici, si l'on ne donnait à la pièce que la section ainsi déterminée, l'équilibre serait instable, ainsi qu'il a été expliqué en commençant, et le moindre dérangement pourrait lui faire prendre une déformation très grande. Il s'agit de déterminer les dimensions à adopter pour éviter un tel accident. Pour cela il est indispensable d'étudier, suivant la théorie qui précède, *toutes les déformations finies susceptibles de se produire*. Ces déformations sont, comme nous le verrons, en nombre plus ou moins grand, suivant les dimensions de la pièce; plus les dimensions sont faibles, plus le nombre des déformations distinctes qui pourraient se produire sera grand. Si, au contraire, les dimensions sont suffisamment grandes, il ne pourra s'en produire aucune et l'équilibre stable sera assuré. Ce sont les dimensions assurant cette stabilité qu'il s'agit de déterminer.

Quelle que soit la section $\mathfrak{S}$, la pression par unité de surface qui se produit sous l'influence de la compression uniforme laissant la pièce circulaire sera

$$\frac{p\rho_1}{\mathfrak{S}}.$$

La contraction correspondante sera

$$\frac{1}{E}\frac{p\rho_1}{\mathfrak{S}},$$

E étant le coefficient d'élasticité de la matière.

Donc, en appelant ρ_0 le rayon de la circonférence comprimée, on aura

$$\frac{\rho_1-\rho_0}{\rho_0}=\frac{1}{E}\frac{p\rho_1}{\mathfrak{S}},$$

d'où

$$\frac{\rho_1}{\rho_0}=1+\frac{1}{E}\frac{p\rho_1}{\mathfrak{S}}$$

et

$$\frac{1}{\rho_0}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{E}\frac{p}{\mathfrak{S}}.$$

C'est cette valeur qu'on adoptera pour le rayon initial (c'est-à-dire avant toute flexion) de la circonférence comprimée; elle diffère du reste très peu de celle donnée $\frac{1}{\rho_1}$.

Admettons maintenant que, par une circonstance fortuite, il se produise une flexion finie. L'équation de la courbe déformée dans son état d'équilibre final sera celle (7), et la longueur s d'une partie de cette courbe sera fournie par l'équation (6). Pour que ces équations déterminent le problème, il faut trouver les trois constantes arbitraires A, μ, b qui y entrent.

Puisque la courbe cherchée est fermée, il s'ensuit que le rayon vecteur r passe au moins par un minimum et au moins par un maximum. Les maximum et minimum du rayon vecteur répondent aux normales abaissées du centre des forces élastiques O sur la courbe; ce sont donc les valeurs de r pour lesquelles $\cos V=0$; ce sont les racines de l'équation obtenue en égalant à zéro la quantité sous le radical qui entre dans l'équation de la courbe, soit les racines de l'équation

$$4r^2 - \frac{p^2}{E^2 I^2}\left(\frac{r^4}{4} + \frac{\mu r^2}{2} + A\right)^2 = 0.$$

Cette équation a donc ici au moins deux racines réelles.

Nous avons, jusqu'à présent, laissé la direction de l'axe polaire OA_0 (*fig.* 1) arbitraire; plaçons cet axe suivant la direction du plus petit de tous les rayons r, en sorte que b désigne ce plus petit rayon et, par suite, b est l'une des racines de l'équation ci-dessus. Désignons par a le plus grand de tous les rayons, en sorte que a sera une autre racine, et l'on aura deux relations

$$4a^2 = \frac{p^2}{E^2 I^2}\left(\frac{a^4}{4} + \frac{\mu a^2}{2} + A\right)^2,$$
$$4b^2 = \frac{p^2}{E^2 I^2}\left(\frac{b^4}{4} + \frac{\mu a^2}{2} + A\right)^2,$$

qui permettent de déterminer les constantes indéterminées A et μ en fonctions de celles a, b, et de n'avoir plus que ces deux dernières à la place des trois A, μ, b que nous avions d'abord.

Des deux équations ci-dessus on tire, en extrayant la racine carrée des deux membres,

$$\frac{a^4}{4} + \frac{\mu a^2}{2} + A = \pm \frac{2EI}{p} a,$$
$$\frac{b^4}{4} + \frac{\mu b^2}{2} + A = \pm \frac{2EI}{p} b.$$

Mais les signes supérieurs sont seuls admissibles. En effet, soit (*fig.* 3) $OA_0 = b$ le plus petit de tous les rayons vecteurs; en ce point la tangente A_0T_0, comptée dans le sens des s positifs ou de la flèche, fait, avec le prolongement du rayon vecteur, un angle $T_0A_0R_0 = \frac{\varpi}{2}$, en sorte que, pour $r = b$, on a

$$\sin V = +1;$$

soit $OA_1 = a$ le plus grand de tous les rayons vecteurs; je dis qu'on a aussi en ce point

$$\sin V = +1;$$

car, pour qu'on eût $\sin V = -1$, il faudrait que, comme dans la *fig.* 3, l'angle V s'annulât en changeant de signe pour un certain rayon vecteur $O\alpha S$; mais alors la courbe présenterait forcément quelque part un

Fig. 3.

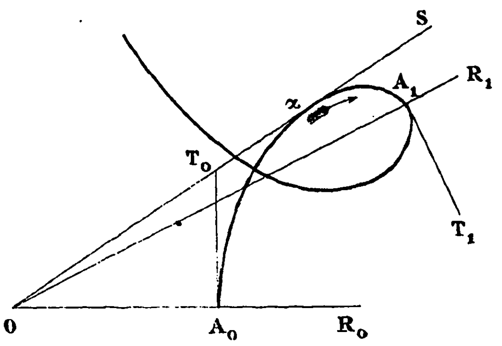
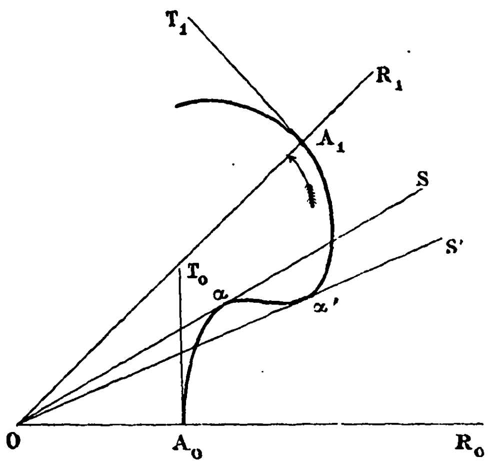


Fig. 4.



point double, ce qui, dans la question physique qui nous occupe, est impossible; si donc V s'annule pour un rayon $O\alpha S$, il faut qu'il s'annule une seconde fois pour un autre rayon $O\alpha' S'$, comme dans la *fig.* 4, de façon que, pour $r = a$ aussi bien que pour $r = b$, on ait

$$\sin V = +1;$$

donc, à cause de (5), les premiers membres des équations ci-dessus et, par suite, les seconds sont positifs, et l'on en tire

$$\mu = \frac{4EI}{p(a+b)} - \frac{a^2+b^2}{2},$$

$$A = \frac{2EI\,ab}{p(a+b)} + \frac{a^2b^2}{4},$$

d'où

$$\frac{r^4}{4} + \frac{\mu r^2}{2} + A = \frac{(r^2-a^2)(r^2-b^2)}{4} + \frac{2EI}{p(a+b)}(r^2+ab).$$

D'ailleurs les équations (6) et (7) peuvent s'écrire

$$\frac{ps}{\mathrm{EI}} = \int_{b^2}^{r^2} \frac{dr^2}{\sqrt{\frac{4\mathrm{E}^2\mathrm{I}^2}{p^2} r^2 - \left(\frac{r^4}{4} + \frac{\mu r^2}{2} + \mathrm{A}\right)^2}},$$

$$2\theta = \int_{b^2}^{r^2} \frac{\left(\frac{r^4}{4} + \frac{\mu r^2}{2} + \mathrm{A}\right) dr^2}{r^2 \sqrt{\frac{4\mathrm{E}^2\mathrm{I}^2}{p^2} r^2 - \left(\frac{r^4}{4} + \frac{\mu r^2}{2} + \mathrm{A}\right)^2}}.$$

Le polynôme sous le radical est le produit

$$\begin{aligned}
&-\left(\frac{r^4}{4} + \frac{\mu r^2}{2} + \mathrm{A} + \frac{2\mathrm{EI}}{p} r\right)\left(\frac{r^4}{4} + \frac{\mu r^2}{2} + \mathrm{A} - \frac{2\mathrm{EI}}{p} r\right) \\
&= -\left[\frac{(r^2 - a^2)(r^2 - b^2)}{4} + \frac{2\mathrm{EI}}{p(a+b)}(r+a)(r+b)\right] \\
&\quad \times \left[\frac{(r^2 - a^2)(r^2 - b^2)}{4} + \frac{2\mathrm{EI}}{p}(r-a)(r-b)\right] \\
&= \frac{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}{16}\left[(r^2 - a^2)(r^2 - b^2) + \frac{16\mathrm{EI}}{p(a+b)}(r^2 + ab) + \frac{64\mathrm{E}^2\mathrm{I}^2}{p^2(a+b)^2}\right].
\end{aligned}$$

Donc, en posant

$$(8) \quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{R} &= (r^2 - a^2)(r^2 - b^2) + \frac{16\mathrm{EI}}{p(a+b)}\left[(r^2 + ab) + \frac{64\mathrm{E}^2\mathrm{I}^2}{p^2(a+b)^2}\right] \\
&= r^4 + \left[\frac{16\mathrm{EI}}{p(a+b)} - (a^2 - b^2)\right] r^2 + \left[ab + \frac{8\mathrm{EI}}{p(a+b)}\right] \\
&= \left[r^2 + \frac{8\mathrm{EI}}{p(a+b)} - \frac{a^2 + b^2}{2}\right]^2 + \frac{8\mathrm{EI}(a+b)}{p} - \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^2,
\end{aligned}\right.$$

on aura

$$(9) \quad \left\{\begin{aligned}
\frac{p}{4\mathrm{EI}} s &= \int_{b^2}^{r^2} \frac{dr^2}{\sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}\sqrt{\mathrm{R}}}, \\
2\theta &= \int_{b^2}^{r^2} \frac{\left[(r^2 - a^2)(r^2 - b^2) + \frac{2\mathrm{EI}}{p(a+b)}(r^2 + ab)\right] dr^2}{r^2\sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}\sqrt{\mathrm{R}}}.
\end{aligned}\right.$$

Comme b^2 est le minimum de r^2, pour $r^2 = b^2$, on aura

$$\frac{dr^2}{ds} > 0;$$

c'est pourquoi on a pris, dans la première des deux équations, les radicaux avec le signe $+$ au lieu de conserver le double signe de l'équation (6). De même, pour $r^2 = b^2$, on a

$$\frac{dr^2}{d\theta} > 0;$$

et comme, pour $r^2 = b^2$, la quantité hors des radicaux, dans l'expression de 2θ, est positive, on doit aussi, dans la dernière, prendre les radicaux avec le signe $+$.

Le carré du rayon vecteur est une fonction périodique de θ dont la période est le double de l'intégrale du second membre prise de b^2 à a^2. Pour que la courbe soit fermée, il faut que cette période soit une partie aliquote de 2ϖ, soit $\frac{2\varpi}{n}$, n désignant un entier.

La longueur totale de la courbe est $2\varpi\rho_0$, c'est-à-dire sensiblement égale à la circonférence de l'anneau comprimé avant la flexion; la longueur correspondante à l'angle $\frac{2\varpi}{n}$ représentant la période sera donc $\frac{2\varpi\rho_0}{n}$. Donc on a, pour déterminer les deux constantes a et b, les deux équations

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{p}{4\mathrm{EI}}\,\frac{\varpi\rho_0}{n} &= \int_{b^2}^{a^2} \frac{dr^2}{\sqrt{(a^2-r^2)(b^2-r^2)}\sqrt{\mathrm{R}}},\\ \frac{2\varpi}{n} &= \int_{b^2}^{a^2} \frac{(r^2-a^2)(r^2-b^2)+\dfrac{2\mathrm{EI}}{p(a+b)}(r^2+ab)}{r^2\sqrt{(a^2-r^2)(b^2-r^2)}\sqrt{\mathrm{R}}}\,dr^2. \end{aligned}\right.$$

Faisons

$$(11)\qquad r^2 = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{2}y.$$

La nouvelle variable y sera purement numérique et comprise entre

— 1 et + 1. On aura

$$(12)\quad \begin{cases} R = \left(\dfrac{a^2-b^2}{2}\right)^2(y^2-1) + \dfrac{8\,EI(a-b)}{p}y + \dfrac{8\,EI(a+b)}{p} + \dfrac{64\,E^2I^2}{p^2(a+b)^2}, \\ \text{ou} \\ R = \left[\dfrac{a^2-b^2}{2}y + \dfrac{8\,EI}{p(a+b)}\right]^2 + \dfrac{8\,EI(a+b)}{p} - \left(\dfrac{a^2-b^2}{2}\right)^2. \end{cases}$$

De plus, aux deux constantes a et b, substituons les suivantes :

$$(13)\qquad u = \frac{a-b}{a+b},\quad U = \frac{8\,EI}{p(a+b)^3},$$

dont la première est évidemment numérique et, de plus, comprise entre o et 1 puisque b et a sont positifs; la seconde est aussi numérique, comme on le déduit aisément de l'homogénéité de l'équation (4). Posons enfin

$$(14)\qquad R = (a+b)^4 R',$$

$$(15)\qquad \begin{cases} R' = \left(U + \dfrac{uy}{2}\right)^2 + U - \dfrac{u^2}{4} \\ \quad = U^2 + U - \dfrac{u^2}{4} + Uuy + \dfrac{u^2y^2}{4}, \end{cases}$$

et les équations (10) deviendront

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{p}{4EI}\dfrac{\varpi}{n}\rho_0(a+b)^2 = \dfrac{\varpi}{n}\left(\dfrac{EI}{p\rho_0^3}\right)^{-\frac{1}{3}}U^{-\frac{2}{3}} = \displaystyle\int_{-1}^{+1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{R'}}, \\ \dfrac{2\varpi}{n} = \displaystyle\int_{-1}^{+1}\frac{U\dfrac{uy+1}{2} - \dfrac{u^2}{4}(1-y^2)}{\left(\dfrac{1+u^2}{4}+\dfrac{uy}{2}\right)\sqrt{1-y^2}\sqrt{R'}}. \end{cases}$$

Ces deux équations, qui servent à déterminer les constantes U et u, ont ceci de remarquable que : 1° la seconde ne renferme plus aucune des données du problème; elle fournit entre les deux constantes U et u une relation purement numérique, applicable à tous les anneaux, quelles que soient leur nature et leurs dimensions. Si donc on voulait déterminer ces deux constantes, on pourrait construire une Table donnant U en fonction de u pour les diverses valeurs de l'entier n; 2° la première équation ne contient plus les données E, I, p, ρ_0 que par le seul terme $\left(\frac{\mathrm{EI}}{p\rho_0^3}\right)$ placé hors du signe d'intégration, en sorte qu'on pourrait aussi construire une Table du second membre de cette équation, applicable à tous les anneaux.

Cela étant, pour que le radical $\sqrt{\mathrm{R}'}$ soit réel pour toutes les valeurs de y comprises entre -1 et $+1$, il faut et il suffit que

$$(17) \qquad \mathrm{U} > \frac{u^2}{4}.$$

Cette condition est évidemment suffisante; elle est aussi nécessaire : car, si $\mathrm{U} < \frac{u^2}{4}$, on a, *a fortiori*, puisque u est moindre que 1, $\mathrm{U} < \frac{u}{2}$; par suite, la quantité $\mathrm{U} + \frac{uy}{2}$ est de signes contraires pour $y = +1$ et $y = -1$: donc le premier terme de la première expression (15) de R' s'annule pour une certaine valeur de y et, pour cette valeur, le radical $\sqrt{\mathrm{R}'}$ deviendrait imaginaire.

Soient R'_1 et R'_0 la plus grande et la plus petite valeur que puisse atteindre R' pour les valeurs de y comprises entre $+1$ et -1.

La première a évidemment lieu pour $y = +1$.

La seconde a lieu pour $y = -1$ si le terme $\left(\mathrm{U} + \frac{uy}{2}\right)^2$ ne s'annule pas, c'est-à-dire si $\mathrm{U} > \frac{u}{2}$; dans le cas contraire, cette plus petite valeur a lieu pour $\mathrm{U} + \frac{uy}{2} = 0$. Ainsi

$$(18) \qquad \mathrm{R}'_1 = \mathrm{U}^2 + \mathrm{U} + \mathrm{U}u$$

et

$$(19) \qquad \begin{cases} \mathrm{R}'_0 = \mathrm{U}^2 + \mathrm{U} - \mathrm{U}u & \text{pour} \quad \mathrm{U} > \frac{u}{2}, \\ \mathrm{R}'_0 = \mathrm{U}^2 - \frac{u^2}{4} & \text{pour} \quad \mathrm{U} < \frac{u}{2}. \end{cases}$$

Cela posé, occupons-nous d'abord de la première des équations (16)

Si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{\mathrm{EI}}{p\rho_0^3} = h,$$

elle devient

$$(19\ bis)\quad \frac{\varpi}{n} h^{-\frac{1}{3}} \mathrm{U}^{-\frac{2}{3}} = \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{\mathrm{U}^2+\mathrm{U}+\mathrm{U}uy-\frac{u^2}{4}(1-y^2)}}.$$

On tire évidemment de là

$$\frac{\varpi}{n} h^{-\frac{1}{3}} \mathrm{U}^{-\frac{2}{3}} > \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{\mathrm{U}^2+\mathrm{U}+\mathrm{U}uy}}$$

ou

$$\frac{\varpi}{n} h^{-\frac{1}{3}} \mathrm{U}^{-\frac{2}{3}} > \int_{0}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{U}^2+\mathrm{U}+\mathrm{U}uy}} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{U}^2+\mathrm{U}-\mathrm{U}uy}} \right).$$

Or la parenthèse est plus grande que $\frac{2}{\sqrt{\mathrm{U}^2+\mathrm{U}}}$, comme on le voit en comparant les carrés de ces deux quantités. Donc, on aura *a fortiori*

$$\frac{\varpi}{n} h^{-\frac{1}{3}} \mathrm{U}^{-\frac{2}{3}} > \frac{2}{\sqrt{\mathrm{U}^2+\mathrm{U}}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

ou

$$\frac{1}{n} h^{-\frac{1}{3}} \mathrm{U}^{-\frac{2}{3}} > \frac{1}{\sqrt{\mathrm{U}^2+\mathrm{U}}}$$

ou

$$h^{-\frac{1}{3}} > \frac{n\mathrm{U}^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\mathrm{U}^2+\mathrm{U}}},$$

ou

$$(20)\qquad h^{\frac{1}{3}} < \frac{1}{n}\sqrt{\mathrm{U}^{\frac{2}{3}}+\mathrm{U}^{-\frac{1}{3}}},$$

ou

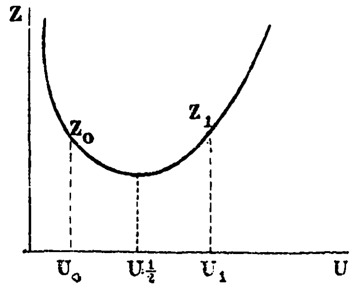
$$(20\ bis)\qquad h^{\frac{1}{3}} < \mathrm{Z},$$

en posant

$$(20\ ter)\qquad \mathrm{Z} = \frac{1}{n}\sqrt{\mathrm{U}^{\frac{2}{3}}+\mathrm{U}^{-\frac{1}{3}}}.$$

On voit que Z est infini pour $U = 0$ et pour $U = \infty$, passe par un minimum unique pour $U = \frac{1}{2}$ et n'admet pas de maximum, de sorte que, si l'on représente cette quantité par l'ordonnée d'une courbe dont U est l'abscisse, cette courbe aura la forme indiquée ci-dessous.

Fig. 5.



Il résulte de là que, si l'on peut établir que la quantité U est nécessairement comprise entre deux valeurs déterminées U_0 et U_1 répondant à deux valeurs Z_0 et Z_1 de l'ordonnée Z, celle-ci sera nécessairement comprise entre Z_0 et Z_1, et, par suite, $h^{\frac{1}{3}}$ sera inférieur à la plus grande des deux valeurs numériques Z_0 et Z_1.

Il reste donc, pour trouver une valeur numérique en dessous de laquelle $h^{\frac{1}{3}}$ doive nécessairement se trouver pour que la flexion répondant à l'entier n puisse se produire :

1° A déterminer une limite inférieure U_0 et une limite supérieure U_1 de la constante inconnue U;

2° A porter ces deux valeurs dans l'expression

$$(21) \qquad \frac{1}{n}\sqrt{U^{\frac{2}{3}} + U^{-\frac{4}{3}}};$$

3° A prendre le plus grand des résultats de ces deux substitutions, et ce sera là une limite supérieure de $h^{\frac{1}{3}}$; ce qui revient à dire que, pour qu'il puisse y avoir flexion, il faudra que $h^{\frac{1}{3}}$ soit compris entre

$$\frac{1}{n}\sqrt{U_0^{\frac{2}{3}} + U_0^{-\frac{2}{3}}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\sqrt{U_1^{\frac{2}{3}} + U_1^{-\frac{2}{3}}},$$

ou h compris entre

$$(21\ bis)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{U_0+1}{n^3}\sqrt{1+\dfrac{1}{U_0}}, \\ \text{et} \\ \dfrac{U_1+1}{n^3}\sqrt{1+\dfrac{1}{U_1}}. \end{array}\right.$$

J'observe d'abord qu'il existe nécessairement deux limites entre lesquelles se trouve comprise la constante U. En effet, on ne peut pas avoir $U=0$, autrement tous les éléments de l'intégrale qui forme le second membre de la seconde équation (16) seraient négatifs, et cette équation ne pourrait pas avoir lieu.

On ne peut pas non plus avoir $U=\infty$, car la première (16), en y remplaçant R' par sa valeur, donne

$$h^{-\frac{1}{3}}=\int_{-1}^{+1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{U^{\frac{2}{3}}+(1+uy)U^{-\frac{1}{3}}-\frac{u^2}{u}(1-y^2)U^{-\frac{2}{3}}}},$$

ou, en faisant $y=\sin\varphi$,

$$h^{-\frac{1}{3}}=\int_{-\frac{\varpi}{2}}^{+\frac{\varpi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{U^{\frac{2}{3}}+(1-u\sin\varphi)U^{-\frac{1}{3}}-\frac{u^2}{4}U^{-\frac{2}{3}}\cos^2\varphi}}.$$

Pour $U=\infty$, tous les éléments de l'intégrale du second membre deviendraient nuls, et, comme h est fini, l'équation ne pourrait pas avoir lieu.

Cherchons d'abord une limite inférieure U_0 de U. La seconde (16 devient, en remplaçant R' par sa valeur (15),

$$(22)\qquad \frac{2\varpi}{n}=\int_{-1}^{+1}\frac{\left[U\frac{uy+1}{2}-\frac{u^2}{4}(1-y^2)\right]dy}{\left(\frac{1+u^2}{4}+\frac{uy}{2}\right)\sqrt{1-y^2}\sqrt{U^2+U(uy+1)-\frac{u^2}{4}(1-y^2)}}.$$

Ajoutons et retranchons au crochet la quantité

$$U^2 + U\frac{uy+1}{2}.$$

Il viendra

$$\frac{2\varpi}{n} = \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{\left(\frac{1+u^2}{4}+\frac{uy}{2}\right)\sqrt{1-y^2}} \left\{ \sqrt{U^2+U(uy+1)-\frac{u^2}{4}(1-y^2)} - \frac{U^2+U\frac{uy+1}{2}}{\sqrt{U^2+U(uy+1)-\frac{u^2}{4}(1-y^2)}} \right\},$$

$$\frac{2\varpi}{n} = \int_{-1}^{+1} \frac{dy\sqrt{U^2+U(uy+1)-\frac{u^2}{4}(1-y^2)}}{\left(\frac{1+u^2}{4}+\frac{uy}{2}\right)\sqrt{1-y^2}}$$
$$- \int_{-1}^{+1} \frac{\left(U^2+U\frac{uy+1}{2}\right)dy}{\left(\frac{1+u^2}{4}+\frac{uy}{2}\right)\sqrt{1-y^2}\sqrt{U^2+U(uy+1)-\frac{u^2}{4}(1-y^2)}}.$$

Les deux intégrales ont tous leurs éléments positifs. Si donc on supprime le terme $\frac{-u^2}{4}(1-y^2)$ sous chacun des deux radicaux où il entre, on augmente chaque élément de la première intégrale, et, par suite, on augmente cette intégrale elle-même, tandis qu'on diminue la seconde; par suite, on augmente le second membre de l'équation. On a donc

$$\frac{2\varpi}{n} < \int_{-1}^{+1} \frac{dy\sqrt{U^2+U(uy+1)}}{\left(\frac{1+u^2}{4}+\frac{uy}{2}\right)\sqrt{1-y^2}}$$
$$- \int_{-1}^{+1} \frac{\left(U^2+U\frac{uy+1}{2}\right)dy}{\left(\frac{1+u^2}{4}+\frac{uy}{2}\right)\sqrt{1-y^2}\sqrt{U^2+U(uy+1)}}$$

ou

$$\frac{2\varpi}{n} < \int_{-1}^{+1} \frac{U^2\frac{uy+1}{2}}{\left(\frac{1+u^2}{4}+\frac{uy}{2}\right)\sqrt{1-y^2}\sqrt{U^2+U(uy+1)}}$$

ou

$$\frac{\varpi}{n} < \int_{-1}^{+1} \frac{(uy+1)\,dy}{(1+u^2+2uy)\sqrt{1-y^2}\sqrt{1+\frac{uy+1}{U}}}.$$

Tous les éléments de cette intégrale étant évidemment positifs, l'inégalité sera remplie *a fortiori* si l'on remplace le second radical par sa valeur la plus petite, qui est

$$\sqrt{1+\frac{1-u}{U}}.$$

On aura donc

$$\frac{\varpi}{n} < \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1-u}{U}}} \int_{-1}^{+1} \frac{(1+uy)\,dy}{(1+u^2+2uy)\sqrt{1-y^2}}$$

où

$$\frac{2\varpi}{n}\sqrt{1+\frac{1-u}{U}} < \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + (1-u^2)\int_{-1}^{+1} \frac{dy}{(1+u^2+2uy)\sqrt{1-y^2}}.$$

La première de ces deux intégrales est égale à ϖ. D'autre part, on sait que

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a+x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\varpi}{\sqrt{a^2-1}},$$

d'où

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dy}{(1+u^2+2uy)\sqrt{1-y^2}} = \frac{\varpi}{1-u^2}.$$

Par suite, l'inégalité ci-dessus devient

$$\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1-u}{U}} < 1$$

ou

$$\sqrt{1+\frac{1-u}{U}} < n.$$

Comme on ne peut pas avoir $U = \infty$, on tire de cette inégalité cette première conséquence importante :

$$n > 1.$$

Ainsi, *l'entier n ne peut pas être égal à* 1; *il ne peut être que* 2, 3, 4, ...

On tire d'ailleurs de la même inégalité

$$U > \frac{1-u}{n^2-1}.$$

Cette inégalité ne suffirait pas à fournir une limite inférieure U_0 de U, puisque la quantité u qui entre dans le second membre n'est pas connue.

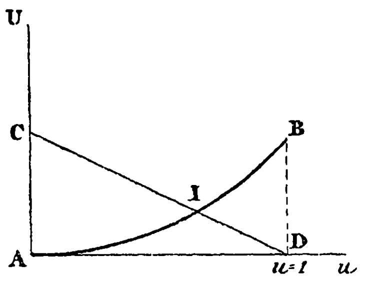
Mais nous avons encore l'inégalité (17)

$$U > \frac{u^2}{4}.$$

Ces deux inégalités réunies fournissent la limite cherchée.

En effet, si l'on représente les seconds membres de ces inégalités par des ordonnées, en prenant u pour abscisse, nous aurons (*fig.* 6) un arc

Fig. 6.



de parabole AB pour représenter la fonction $\frac{u^2}{4}$ et une droite CD coupant l'axe des abscisses au point $u = 1$ pour représenter la quantité $\frac{1-u}{n^2-1}$. Soit I le point d'intersection de cette droite et de la parabole; quel que soit u, U devra être supérieur à l'ordonnée correspondante de la ligne brisée CIB. Donc, U est supérieur à l'ordonnée minima de cette ligne, c'est-à-dire à l'ordonnée du point I. L'abscisse du point I est fournie par l'équation

$$\frac{u^2}{4} = \frac{1-u}{n^2-1}$$

ou

$$(n^2-1)u^2 + 4u - 4 = 0$$

qui admet deux racines de signes contraires; la racine positive, évidemment seule admissible, est

$$u = \frac{-2+\sqrt{4+4(n^2-1)}}{n^2-1}$$

ou

$$u = \frac{2}{n+1}.$$

L'ordonnée correspondante est

$$\frac{u^2}{4} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Ainsi on est assuré que

$$U > \frac{1}{(n+1)^2},$$

et nous pouvons prendre pour la limite inférieure U_0 que nous cherchons

$$U_0 = \frac{1}{(n+1)^2}. \tag{23}$$

Il reste à trouver une limite supérieure U_1 de U. Pour cela, je distingue deux cas, suivant que les éléments de l'intégrale qui forme le second membre de l'équation (22) sont ou non tous positifs.

Le dénominateur de la fraction qui entre sous le signe d'intégration étant essentiellement positif, il faut, pour qu'il puisse y avoir des éléments négatifs, que le numérateur puisse devenir négatif pour certaines valeurs de y. Or, pour $y = \pm 1$, ce numérateur a pour valeurs

$$U\frac{1 \pm u}{2},$$

valeurs l'une et l'autre positives. Donc, pour que le numérateur puisse devenir négatif, il faut que l'équation

$$U\frac{1+uy}{2} - \frac{u^2}{4}(1-y^2) = 0$$

ait ses deux racines : 1° réelles; 2° comprises l'une et l'autre entre -1 et $+1$. Ces racines sont

$$y = \frac{-U \pm \sqrt{U^2 - 2U + u^2}}{u}.$$

Pour qu'elles soient réelles, il faut que

$$U^2 - 2U + u^2 > 0,$$

ce qui exige que l'on ait, soit

$$(\alpha) \qquad \left\{\begin{array}{l} U > 1 + \sqrt{1-u^2}, \\ \text{soit} \\ U < 1 - \sqrt{1-u^2}. \end{array}\right.$$

Pour qu'elles soient toutes deux comprises entre -1 et $+1$, il faut que la plus grande des deux en valeur absolue soit moindre que 1, ce qui exige que

$$(\beta) \qquad U + \sqrt{U^2 - 2U + u^2} < u$$

et, à plus forte raison,

$$U < u \quad \text{ou} \quad u - U > 0;$$

puis

$$\sqrt{U^2 - 2U + u^2} < u - U$$

ou

$$\sqrt{(u-U)^2 - 2U(1-u)} < u - U,$$

qui est satisfaite d'elle-même.

Ainsi il faut et il suffit, pour que (β) soit satisfait, que

$$U < u.$$

Par suite, $U < 1$, ce qui indique que la première (α) ne peut pas avoir lieu. Donc

$$U < 1 - \sqrt{1 - u^2}.$$

On vérifie d'ailleurs facilement que

$$u > 1 - \sqrt{1 - u^2}.$$

Donc l'avant-dernière inégalité entraîne celle $U < u$ et exprime, à elle seule, la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale dont nous nous occupons comprenne des éléments négatifs. Elle entraîne comme conséquence $U < 1$, de sorte que, s'il y a réellement des éléments négatifs, nous pourrons prendre pour la limite supérieure de U que nous cherchons

$$U_1 = 1. \tag{24}$$

Admettons donc qu'il n'y ait pas d'éléments négatifs. Alors, si nous remplaçons le radical $\sqrt{R'}$ par la plus grande valeur qu'il puisse prendre, nous diminuerons tous les éléments de l'intégrale, et, comme ils sont, par hypothèse, tous positifs, nous diminuerons l'intégrale elle-même. Cette plus grande valeur, en vertu de (18), est

$$\sqrt{U^2 + U(1+u)}.$$

Donc, nous aurons l'inégalité

$$\frac{2\varpi}{n} > \frac{1}{\sqrt{U^2 + U(1+u)}} \int_{-1}^{+1} \frac{\left[U\dfrac{uy+1}{2} - \dfrac{u^2}{4}(1-y^2)\right] dy}{\left(\dfrac{1+u^2}{4} + \dfrac{uy}{2}\right)\sqrt{1-y^2}}$$

ou

$$\frac{2\varpi}{n}\sqrt{U^2 + U(1+u)} > \int_{-1}^{+1} \frac{[2U(uy+1) - u^2(1-y^2)]\, dy}{(1+u^2+2uy)\sqrt{1-y^2}}.$$

Cette intégrale peut s'écrire en effectuant la division du numérateur par la partie rationnelle du dénominateur

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \left[\frac{uy}{2} + \left(U - \frac{1+u^2}{4}\right) + \frac{(1-u^2)\left(U + \frac{1-u^2}{4}\right)}{1+u^2+2uy} \right],$$

égale, comme on le voit facilement, à

$$2\varpi\left(U - \frac{u^2}{4}\right).$$

Ainsi

$$\frac{1}{n}\sqrt{U^2 + U(1+u)} - U + \frac{u^2}{4} > 0,$$

et *a fortiori*

$$\frac{1}{n}\sqrt{U^2 + 2U} > U - \frac{1}{4},$$

et *a fortiori*

$$\frac{1}{n}(U+1) > U - \frac{1}{4}$$

ou

$$U < \frac{n+4}{4(n-1)}.$$

Donc, en résumé, nous pouvons prendre pour limite supérieure le plus grand des deux nombres

$$U_1 = \frac{n+4}{4(n-1)}, \quad U_1 = 1.$$

On voit que, pour $n = 2$, c'est $U_1 = \frac{3}{2}$ qu'il faudra prendre, et pour $n > 2$ ce serait $U_1 = 1$.

Nous avons d'ailleurs trouvé, pour limite inférieure,

$$U_0 = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Cela posé, nous avons vu que, pour que la flexion répondant à une valeur de l'entier n soit possible, il faut que h soit compris entre les deux limites (21 *bis*), savoir

$$\frac{U_0+1}{n^3}\sqrt{1+\frac{1}{U_0}}$$

et

$$\frac{U_1+1}{n^3}\sqrt{1+\frac{1}{U_1}}.$$

Et, au contraire, pour qu'elle ne soit pas possible, il suffit de prendre h plus grand que chacun de ces deux nombres, c'est-à-dire plus grand que le plus grand des deux; et, pour qu'aucune flexion ne puisse se produire, il suffit que h soit supérieur à chacun de ces deux nombres, *quel que soit n*.

Or le premier est

$$\frac{1+(n+1)^2}{n^3(n+1)^2}\sqrt{1+(n+1)^2}.$$

On voit que cette quantité décroît quand n croît; sa plus grande valeur a donc lieu pour $n=2$, et elle est moindre que $\frac{4}{9}$.

Le second, 1° si l'on y fait $U_1 = 1$, donne

$$\frac{2}{n^3}\sqrt{\frac{3}{2}},$$

qui décroît aussi quand n croît. Sa plus grande valeur répond donc à $n=2$, et elle est beaucoup moindre que $\frac{4}{9}$; 2° si l'on y substitue

$$U_1 = \frac{n+4}{4(n-1)},$$

il vient

$$\frac{5n}{4(n-1)n^3}\sqrt{\frac{5n}{n+4}}.$$

On voit qu'elle décroît aussi quand n croît et que sa valeur la plus grande, répondant à $n=2$, est elle-même un peu inférieure à $\frac{4}{9}$.

Donc, en prenant

$$h > \frac{4}{9}$$

ou

(25) $$\frac{EI}{p\rho_1^3} > \frac{4}{9},$$

on est assuré qu'aucune flexion ne pourra se produire et le problème que nous nous sommes posé est ainsi résolu.

Il est à remarquer toutefois que, d'après la marche suivie, il n'y a aucune raison pour que le chiffre $\frac{4}{9}$ soit la limite inférieure la plus petite possible. En d'autres termes, il est établi par ce qui précède qu'il *suffit* d'avoir $h > \frac{4}{9}$ pour être assuré de l'impossibilité d'une flexion; mais il se peut, et il est même certain, que des valeurs plus faibles de h pourraient être admises sans danger. Il est intéressant, tout au moins, de rechercher jusqu'où pourraient aller ces valeurs. Or, si, dans les équations (16) et (22), on fait $u = 0$, les quadratures s'effectuent facilement, et l'on trouve

$$U = h = \frac{1}{n^2 - 1}.$$

Soit, pour $n = 2$,

$$h = \frac{1}{3} = \frac{3}{9}.$$

Donc, pour une valeur infiniment petite de u, on voit que h pourra s'approcher autant qu'on le voudra de $\frac{3}{9}$. Or, nous avons posé

$$u = \frac{a - b}{a + b},$$

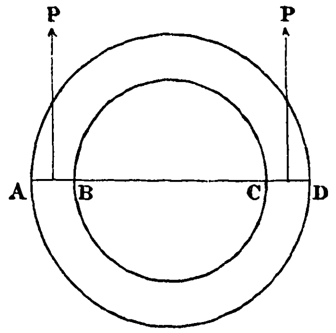
a étant le rayon vecteur maximum, et b le rayon vecteur minimum après la déformation. Donc, supposer u infiniment petit, c'est supposer que ces deux rayons et, par suite, aussi tous les rayons intermédiaires sont très peu différents les uns des autres; c'est donc supposer une déformation très faible de l'anneau circulaire. Ainsi, pour une déformation suffisamment petite, h pourra s'approcher autant qu'on le voudra de $\frac{3}{9}$, et, par suite, pour qu'une déformation infiniment petite ne puisse pas se produire, h devra être supérieur à $\frac{3}{9}$. D'où je conclus que la limite de $\frac{4}{9}$ que nous avons trouvée ne peut pas différer de la limite la plus faible possible, de plus de $\frac{1}{9}$. Au point de vue pratique, il n'y a pas d'inconvénient à prendre h un peu trop fort; au point de vue théorique, il est présumable que la limite la plus faible possible est celle qui répond à la déformation infiniment petite, c'est-à-dire $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, parce que, si l'on a donné à un anneau une forme telle qu'il ne puisse pas se déformer infiniment peu, il est *extrêmement probable* qu'*a for-*

tiori il ne pourra pas prendre une déformation finie. Toutefois, si cette présomption est exacte, elle doit pouvoir se déduire rigoureusement des équations (16) qui définissent U et u, et c'est ce à quoi je n'ai pas réussi. La question mériterait donc, au point de vue théorique, d'être complétée en ce sens.

§ IV. — Dimensions a donner a un tuyau ouvert aux deux bouts pour éviter qu'il s'aplatisse sous une pression extérieure.

Comme application, supposons un manchon cylindrique de faible épaisseur ε, compris entre deux cylindres concentriques et soumis à une pression normale uniforme de l'extérieur vers l'intérieur. Admettons

Fig. 7.



que le manchon soit assez long pour qu'on puisse le supposer ouvert à ses deux extrémités. Son rayon moyen étant ρ_1, il s'agit de calculer son épaisseur.

Il suffit de considérer une longueur de 1^m.

Si le manchon reste circulaire, que P soit la pression totale exercée dans chacune des deux parties AB et CD d'une section diamétrale, l'équilibre de la moitié du manchon donne la formule connue

$$2P = 2p\rho_1$$

ou

$$P = p\rho_1.$$

Si l'on veut que la pression élastique par unité de surface ne dépasse pas K kilogrammes, on devra avoir

$$P \leq K\varepsilon$$

ou

$$p\rho_1 \leq K\varepsilon.$$

D'où

$$(a) \qquad \frac{\varepsilon}{\rho_1} \geq \frac{p}{K}.$$

Mais la valeur de ε ainsi obtenue pourrait ne fournir qu'un équilibre instable, et il faut y adjoindre (en négligeant la différence très faible $\rho_1 - \rho_0$) notre formule

$$\frac{EI}{p\rho_1^3} \geq \frac{4}{9}.$$

Le moment d'inertie I d'une section CD relativement à son milieu, c'est le moment d'inertie d'un rectangle de hauteur ε et de longueur 1; il est

$$I = \frac{\varepsilon^3}{12},$$

d'où

$$\frac{E\varepsilon^3}{p\rho_1^3} \geq \frac{48}{9} \geq \frac{16}{3},$$

$$(b) \qquad \frac{\varepsilon}{\rho_1} \geq \sqrt[3]{\frac{16p}{3E}}.$$

On devra prendre pour $\frac{\varepsilon}{\rho_1}$ la plus grande des valeurs fournies par les deux inégalités (*a*) et (*b*).

Pour que la formule habituelle (*a*) suffise, il faut que ce soit elle qui donne le plus grand résultat, il faut donc que

$$\frac{p}{K} > \sqrt[3]{\frac{16p}{3E}}$$

ou

$$p > \sqrt[2]{\frac{16K^3}{3E}},$$

$$p > 4K\sqrt[2]{\frac{K}{3E}}.$$

Supposons qu'il s'agisse d'un cylindre en fer et que la pression K qu'on veut adopter soit de 5kg par millimètre carré, soit, en prenant le mètre pour unité,

$$K = 5 \times 10^6.$$

Prenons

$$E = 2 \times 10^{10};$$

pour le coefficient d'élasticité du fer, on aura

$$p > \frac{2 \times 10^5}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{5}{6}},$$

$$p > \frac{4 \times 10^5}{\sqrt{6}},$$

soit $p > 16^{\text{atm}},4$.

Ainsi, pour une pression inférieure à $16^{\text{atm}},4$, l'épaisseur fournie par la formule habituelle serait insuffisante; ce n'est que pour des pressions supérieures qu'elle pourrait être employée; mais, pour des pressions aussi fortes, il sera mieux d'employer la formule exacte que Lamé a déduite des équations de l'élasticité, à savoir

$$K = \frac{\left(\rho_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2}{\rho_1 \varepsilon}$$

qui se réduit à celle (a) si l'on néglige au numérateur $\frac{\varepsilon}{2}$ devant ρ_1.

Ainsi, il conviendra d'employer soit la formule indiquée dans le présent Mémoire, soit celle de Lamé, toutes les fois qu'il s'agira de chaudières ou autres machines cylindriques pressées de l'extérieur vers l'intérieur.

S'il s'agit d'un anneau circulaire de section transversale quelconque (symétrique par rapport au plan du cercle), en désignant par $\mathfrak{S}$ l'aire de cette section, et I son moment d'inertie, la formule habituelle donnera

$$p\rho_1 \leq K\mathfrak{S}$$

ou

$$\mathfrak{S} \geq \frac{p\rho_1}{K}$$

et déterminera la section $\mathfrak{S}$, et notre formule

$$\frac{EI}{p\rho_1^3} > \frac{4}{9}$$

déterminera ensuite son moment d'inertie. Ainsi, dans ce cas, la formule habituelle est toujours insuffisante et doit être employée concurremment avec la nouvelle formule que nous indiquons.

Il existe peu d'expériences permettant de contrôler cette théorie; des expériences ont été faites par MM. Love, Fairbairn, Unwin sur des tuyaux fermés aux deux bouts, et M. Unwin (*Éléments de construction*, traduction de M. Bocquet, Gauthier-Villars, 1882, p. 76) dit, au sujet des tuyaux ouverts ou assez longs pour pouvoir être regardés comme tels :

« Quand la longueur excède $43d^2$ ($d = 2\rho_1$, diamètre du tuyau), la résistance devient *probablement* indépendante de la longueur. La résistance devrait donc être calculée comme si la longueur n'était que de $43d^2$. Ainsi, pour des tubes avec joints en long et en travers qui dépassent cette limite de longueur, nous tirons de l'équation (3)

$$p \leq \frac{197543}{8} \frac{\varepsilon^{2,35}}{\rho_0^3} \text{ (1)}. \text{ »}$$

Ici, c'est le centimètre et le kilogramme qui sont pris pour unité. Je reproche à cette formule de ne pas pouvoir devenir homogène même si l'on rétablit le coefficient d'élasticité E à la place du coefficient numérique du second membre. D'autre part, cette longueur de $43d^2$, à partir de laquelle on suppose que l'épaisseur à donner devient indépendante de la longueur, semble un peu arbitraire. Ma formule avec

(1) Je substitue mes notations à celles de l'auteur. L'équation (3) dont il parle est la formule empirique suivante :

$$p \leq 1\,092\,954 \frac{\varepsilon^{2,35}}{l^{0,9} \times (2\rho_0)^{1,10}},$$

l étant la longueur du tuyau supposé fermé aux deux bouts.

les mêmes unités donnerait

$$p \leq \frac{3}{16} \times 2 \times 10^6 \left(\frac{\varepsilon}{\rho_0}\right)^3,$$

$$(26) \qquad p \leq \frac{300\,000}{8} \left(\frac{\varepsilon}{\rho_0}\right)^3.$$

En remplaçant, dans la formule de M. Unwin, le nombre 197543 par 200 000, on voit que cette formule coïncide avec la nôtre, quels que soient la pression p et le diamètre du tuyau; pour l'épaisseur ε exprimée en centimètres, par

$$\varepsilon = \left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{0,65}}.$$

Pour d'autres valeurs de ε, elles différeraient; mais nous pensons que notre formule théorique mérite plus de confiance qu'une formule empirique et non homogène, qui ne résulte d'ailleurs pas d'expériences directes.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que, si l'on parvient à démontrer rigoureusement que, dans l'inégalité (25), il est permis de remplacer $\frac{4}{9}$ par $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, suivant la remarque de la page 37, on devra adopter ce dernier chiffre dans les applications.

Paris, 24 septembre 1883.