JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

R. RADAU

Étude sur les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur numérique d'une intégrale définie

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 6 (1880), p. 283-336.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1880_3_6__283_0>

Étude sur les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur numérique d'une intégrale définie;

PAR M. R. RADAU.

Les méthodes d'approximation qui permettent d'obtenir la valeur d'une intégrale définie qu'on ne peut déterminer directement mériteraient d'être mieux connues et plus souvent appliquées qu'elles ne le sont encore. Les cas sont assez nombreux où les « formules de quadrature » peuvent être substituées avec avantage aux développements fondés sur la nature particulière de la fonction à intégrer, qui ne laissent pas que d'entraîner parfois des calculs fatigants. J'ai donc pensé qu'il pouvait y avoir quelque intérêt à présenter une étude d'ensemble sur une classe de formules de ce genre, en m'attachant surtout à simplifier les démonstrations, à marquer le degré de précision que comportent les diverses formules et à réunir toutes les constantes dont on a besoin pour les appliquer.

1. La plupart des formules dont il sera question ici sont comprises dans la suivante :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx = \Sigma A\varphi(a). \tag{1}$$

Elles fournissent la valeur de l'intégrale cherchée par une sorte de moyenne [1] où les poids A, B, C, ... sont attribués à n valeurs particulières de l'ordonnée $\varphi(x)$, qui correspondent aux abscisses a, b, c, ...

[1] Je dis moyenne, en supposant qu'on divise par $\Sigma A = \beta - \alpha$.

Les coefficients A, B, C, ..., comme les quantités $a, b, c, \ldots$ (qui doivent être comprises entre les limites α, β), sont, par hypothèse, des nombres indépendants de la nature de la fonction φ et qui se déterminent à l'avance, une fois pour toutes. On suppose seulement qu'entre les limites de l'intégration $\varphi(x)$ soit développable en série convergente :

$$\varphi(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots.$$

Les mêmes remarques s'appliquent à la formule plus générale

$$(2) \qquad \int_\alpha^\beta \varphi(x) f(x)\, dx = \Sigma \mathrm{A} \varphi(a),$$

où $f(x)$ est une fonction *donnée*.

Nous dirons qu'une formule de quadrature possède le *degré de précision* $p - 1$, pour exprimer qu'elle est rigoureusement exacte toutes les fois que $\varphi(x)$ est une fonction entière d'un degré inférieur à p. Il faut pour cela que les $2n$ constantes $a, b, \ldots, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots$ satisfassent aux relations

$$(3) \qquad \sum \mathrm{A} a^h = \int_\alpha^\beta x^h dx \quad (h = 0, 1, 2, \ldots, p-1)$$

s'il s'agit de la formule (1), et aux suivantes,

$$(3\ bis) \qquad \sum \mathrm{A} a^h = \int_\alpha^\beta x^h f(x)\, dx \quad (h = 0, 1, 2, \ldots, p-1),$$

s'il s'agit d'une formule du type (2). Le maximum de précision s'obtiendra donc, en général, quand le nombre des équations de condition sera égal à celui des constantes ($p = 2n$).

Les relations (3) supposent évidemment que les limites α, β soient *finies*. On voit aussi que les coefficients A sont liés aux abscisses a par des relations linéaires qui les déterminent d'une seule manière. Enfin, il est clair qu'une substitution linéaire ne change pas le degré de $\varphi(x)$, ni par conséquent le degré de précision de la formule. Or, en posant

$$x = \alpha + (\beta - \alpha) x_0, \quad a = \alpha + (\beta - \alpha) a_0, \quad \mathrm{A} = (\beta - \alpha) \mathrm{A}_0, \quad \varphi(x) = \psi(x_0),$$

la formule (1) devient

$$\int_0^1 \psi(x_0)\,dx_0 = \Sigma A_0 \psi(a_0),$$

et les coefficients A_0 sont proportionnels aux coefficients A. Comme les uns et les autres se déterminent d'une seule manière par les relations (3), on peut conclure de là que les *valeurs relatives* des coefficients sont indépendantes des limites.

Dans ce qui suit, il sera toujours entendu que les limites auront été ramenées aux valeurs fixes 0 et 1, ou bien -1 et $+1$. Pour passer du premier cas au second, il suffit de poser

$$2x_0 = 1 + x, \quad 2a_0 = 1 + a, \quad 2A_0 = A,$$

où les lettres affectées de l'indice 0 se rapportent aux limites 0 et 1. On trouvera donc les coefficients pour les limites ± 1 en *doublant* les nombres calculés pour les limites 0 et 1.

Remarquons maintenant que, si l'on applique la formule (1) à l'expression $\varphi(x) = k_0 + k_1 x + \ldots$, le résultat sera évidemment le même que si on l'avait appliquée successivement à chacun des termes de cette série, pour ajouter ensuite les résultats partiels, et, si le développement de $\varphi(x)$ dépasse le degré de précision de la formule, l'erreur sera la somme des erreurs commises dans l'évaluation des termes qui suivent x^{p-1}. Soit $-\varepsilon_p$ l'erreur commise dans l'évaluation de x^p, de sorte que

$$(4) \qquad \int_\alpha^\beta x^p\,dx = \Sigma A a^p + \varepsilon_p,$$

et ainsi de suite; la formule corrigée sera

$$(5) \qquad \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx = \Sigma A\,\varphi(a) + k_p \varepsilon_p + k_{p+1}\varepsilon_{p+1} + \ldots.$$

Le système d'équations (3), que complètent les équations (4), peut être remplacé par l'équation unique qu'on obtient en posant

$$\varphi(x) = \frac{1}{z - x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \ldots,$$

où z est une quantité arbitraire. On aura donc, pour le degré de précision $p-1$,

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{z-x} = \sum \frac{A}{z-a} + \frac{\varepsilon_p}{z^{p+1}} + \frac{\varepsilon_{p+1}}{z^{p+2}} + \ldots, \tag{6}$$

et, en écrivant $f(x)\,dx$ à la place de dx, on aura l'équation analogue qui représente le système (3 *bis*).

Ajoutons que, si la substitution linéaire employée plus haut est complétée en posant $z = \alpha + (\beta - \alpha) z_0$, les corrections ε_p^0 pour les limites 0 et 1 seront les coefficients de $\frac{1}{z_0^{p+1}}, \frac{1}{z_0^{p+2}}, \cdots$ dans (6), c'est-à-dire

$$\varepsilon_p^0 = \frac{\varepsilon_p}{(\beta-\alpha)^{p+1}}, \quad \varepsilon_{p+1}^0 = \frac{\varepsilon_{p+1} - \alpha(p+1)\varepsilon_p}{(\beta-\alpha)^{p+2}}, \quad \ldots;$$

par conséquent, pour $\alpha = -1$, $\beta = +1$,

$$\varepsilon_p^0 = \frac{\varepsilon_p}{2^{p+1}}, \quad \varepsilon_{p+1}^0 = \frac{\varepsilon_{p+1} + (p+1)\varepsilon_p}{2^{p+2}}, \quad \ldots.$$

En modifiant ainsi les valeurs des ε, on ne diminue point l'erreur de la formule, car le coefficient k_p augmente dans le même rapport que ε_p diminue. Mais on peut (sans modifier, il est vrai, le degré de précision $p-1$) diminuer sensiblement l'erreur du résultat en divisant l'intégration.

Supposons que l'on partage l'intervalle $1-0$ en μ parties égales, en posant

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{\mu}} + \int_{\frac{1}{\mu}}^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + \int_{\frac{\mu-1}{\mu}}^1,$$

et qu'ensuite on applique la formule (1) à chacune de ces intégrales partielles, en faisant

$$x = \frac{i + x_0}{\mu} \quad (i = 0, 1, \ldots, \mu - 1).$$

On aura d'abord

$$\int_{\frac{i}{\mu}}^{\frac{i+1}{\mu}} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{\mu}\int_0^1 \varphi\left(\frac{i+x_0}{\mu}\right)dx_0$$
$$= \frac{1}{\mu}\sum A_0\varphi\left(\frac{i+a_0}{\mu}\right) + \frac{k_p\varepsilon_p}{\mu^{p+1}} + \frac{k_{p+1}}{\mu^{p+2}}[\varepsilon_{p+1} + (p+1)i\varepsilon_p] + \ldots,$$

en désignant toujours par $\varepsilon_p, \varepsilon_{p+1}, \ldots$ les corrections ordinaires de la formule pour les limites o et 1; puis, en ajoutant les résultats partiels et remarquant que $\Sigma 1 = \mu$, $\sum i = \frac{\mu(\mu-1)}{2}, \ldots$,

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \frac{1}{\mu}\sum^{i}\sum A_0\varphi\left(\frac{i+a_0}{\mu}\right) + \frac{k_p\varepsilon_p}{\mu^p} + \frac{k_{p+1}}{\mu^{p+1}}\left[\varepsilon_{p+1} + \frac{\mu-1}{2}(p+1)\varepsilon_p\right] + \ldots,$$

de sorte que l'erreur se trouve diminuée, à peu près, dans le rapport de 1 à $\frac{1}{\mu^p}$.

C'est de cette manière, par exemple, que la règle de Simpson est dérivée de la formule de Cotes, fondée sur l'emploi d'ordonnées équidistantes. Les limites o et 1 étant ici comprises parmi les abscisses a, b, ..., et la dernière ordonnée de chaque intégrale partielle coïncidant avec la première de l'intégrale suivante, le nombre des termes à calculer n'est plus $n\mu$, mais seulement $(n-1)\mu + 1$.

2. Lorsque les n abscisses sont choisies arbitrairement, il reste à déterminer n coefficients par autant d'équations de condition $(p = n)$, et l'on peut ainsi atteindre le degré de précision $n - 1$. Si l'on se donne, au contraire, les coefficients, il faut tenir compte de la condition que fournissent les relations (3) ou (3 *bis*) pour $h = 0$, à savoir,

$$\sum A = \beta - \alpha \quad \text{ou} \quad \sum A = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx,$$

et, en ajoutant $p - 1 = n$ relations qui déterminent les abscisses, on peut atteindre le degré n.

Il y a, en général, avantage à employer des ordonnées *symétriques*, prises deux à deux à égale distance des extrêmes. On a dans ce cas, pour les limites o et 1,

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = 1$$

et pour les limites ± 1,

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = 0,$$

et, si n est un nombre impair, l'abscisse moyenne est respectivement égale à $\frac{1}{2}$ ou à o.

En adoptant les limites ± 1, on aura donc les systèmes suivants d'abscisses symétriques :

$$\text{Pour } n = 2i \ldots\ldots\ldots \quad \pm a_1,\ \pm a_2,\ \ldots,\ \pm a_i,$$
$$\text{Pour } n = 2i+1 \ldots\ldots \quad 0,\ \pm a_1,\ \pm a_2,\ \ldots,\ \pm a_i.$$

Les relations (3) donnent alors, en y écrivant $2h+1$ à la place de h,

$$\Sigma A a^{2h+1} = 0, \tag{7}$$

ou bien, en désignant par A_p, A_{-p} les coefficients des ordonnées conjuguées $\varphi(a_p)$, $\varphi(-a_p)$,

$$\Sigma(A_p - A_{-p}) a_p^{2h+1} = 0, \tag{7 bis}$$

et ces équations sont satisfaites en prenant $A_p = A_{-p}$. L'égalité des coefficients conjugués est d'ailleurs nécessaire si l'on veut atteindre le degré de précision $n-1$, car le nombre des équations (7 *bis*) est alors au moins égal à i, et elles exigent que les i différences $A_p - A_{-p}$ s'annulent. Ainsi, lorsqu'on fait usage d'ordonnées symétriques, il faut que, dans la formule (1), les coefficients conjugués soient égaux si la formule doit atteindre le degré de précision $n-1$, et cette règle s'applique aussi aux limites o et 1, puisque les valeurs relatives des coefficients sont indépendantes des limites.

Pour les limites ± 1, les relations (3) se réduisent dès lors aux suivantes, qui ne renferment que les puissances paires des abscisses :

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l|l} n = 2i+1. & n = 2i. \\ \frac{1}{2}A_0 + A_1 \quad + \ldots + A_i \quad = 1, & A_1 \quad + \ldots + A_i \quad = 1, \\ \quad A_1 a_1^2 + \ldots + A_i a_i^2 = \frac{1}{3}, & A_1 a_1^2 + \ldots + A_i a_i^2 = \frac{1}{3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad A_1 a_1^{2k} + \ldots + A_i a_i^{2k} = \frac{1}{2k+1}, & A_1 a_1^{2k} + \ldots + A_i a_i^{2k} = \frac{1}{2k+1}, \end{array}\right.$$

et le degré de précision devient $2k+1$, puisque l'équation $\Sigma A a^{2k+1} = 0$ est encore satisfaite. On voit aisément qu'il ne peut dépasser $2n-1$. On voit aussi qu'en choisissant arbitrairement les abscisses $a_1, \ldots, a_i$ on atteindra le degré $2i+1$ avec $2i+1$ ou $2i+2$ ordonnées symétriques, tandis qu'on l'atteindra avec $2i$ ou $2i+1$ ordonnées en se donnant tous les coefficients. Dans les deux cas, le degré de précision est égal à n, si n est un nombre impair; mais, si n est un nombre pair, il devient dans le premier cas $n-1$ et dans le second $n+1$.

Les formules du type (2) donnent lieu à des remarques analogues, si $f(x)$ est une fonction paire, c'est-à-dire de la forme $f(x^2)$, car alors on a encore $\Sigma A a^{2k+1} = 0$. Mais si $f(x)$ est une fonction impaire, de la forme $xf(x^2)$, on aura $\Sigma A a^{2k} = 0$ ou bien, pour des ordonnées symétriques,

$$\Sigma(A_p + A_{-p}) a_p^{2k} = 0,$$

et il faudra faire $A_{-p} = -A_p$, c'est-à-dire donner aux ordonnées conjuguées des coefficients égaux, mais de signes contraires. En même temps, $A_0 = 0$; on ne pourra donc prendre qu'un nombre pair d'ordonnées symétriques.

3. Les équations (3), ou le système (8) qui en découle, offrent souvent le moyen le plus simple de déterminer les constantes qui entrent dans la formule de quadrature (1), surtout lorsque l'on connaît d'avance un certain nombre de ces constantes. M. Scheibner a donné, en 1856, une méthode pour les résoudre dans le cas où toutes les constantes sont à déterminer $(p = 2n)$; il nous suffira d'en indiquer le principe. Soit

$$F(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n);$$

les abscisses a seront les racines de l'équation

$$F(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + . \; . + x^n = 0.$$

Le degré de précision de la formule (1) étant maintenant $2n - 1$, on pourra faire $\varphi(x) = x^h F(x)$, en donnant à h les valeurs $0, 1, \ldots, n-1$, et la formule (1) donnera, dans ces cas,

$$\int_0^1 x^h F(x)\,dx = 0.$$

On aura ainsi n relations linéaires de la forme

$$\frac{c_0}{h+1} + \frac{c_1}{h+2} + \ldots + \frac{1}{n+h+1} = 0,$$

qui suffiront pour déterminer les n coefficients $c_0, c_1, \ldots$. Mais nous n'aurons pas à faire usage de cette méthode.

4. Soit encore $F(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots$, et considérons la fonction entière du degré $n - 1$

$$F_a(x) = \frac{F(x)}{x-a}.$$

Je supposerai désormais que la formule (1) atteint *au moins le degré* $n - 1$. Dans ce cas, elle reste exacte en posant $\varphi(x) = F_a(x)$, et il vient

$$\int_\alpha^\beta F_a(x)\,dx = A F_a(a),$$

puisque les autres termes s'annulent. En même temps, $F_a(a) = F'(a)$; par suite,

$$A = \frac{1}{F_a(a)} \int_\alpha^\beta F_a(x)\,dx = \frac{1}{F'(a)} \int_\alpha^\beta \frac{F(x)}{x-a}\,dx. \tag{9}$$

On arrive au même résultat en partant de la formule d'interpolation

$$\varphi(x) = \sum \varphi(a) \frac{F_a(x)}{F_a(a)}. \tag{10}$$

qui se trouve *exacte* toutes les fois que le degré de $\varphi(x)$ ne dépasse pas $n-1$. L'intégration donne, en effet,

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx = \Sigma A\varphi(a),$$

où les coefficients A sont définis par les relations (9). Le résultat est exact si le degré de $\varphi(x)$ ne dépasse pas $n-1$. Soit maintenant

$$\varphi(x) = k_0 + k_1 x + \ldots + k_{n+m}x^{n+m}.$$

En divisant $\varphi(x)$ par $F(x)$, on aura d'abord un quotient Q du degré m, puis un reste du degré $n-1$ au plus, qui, devant coïncider avec $\varphi(x)$ pour $x=a$, $x=b$, ..., se trouve par là même déterminé et pourra être représenté par le côté droit de l'équation (10), de sorte que

$$\varphi(x) = \sum \varphi(a)\frac{F_a(x)}{F_a(a)} + Q\,F(x).$$

L'intégration donne

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx = \sum A\varphi(a) + \int_\alpha^\beta QF(x)\,dx, \tag{11}$$

où la dernière intégrale représente évidemment les termes de correction $k_p\varepsilon_p$, ... de la formule (5). En posant $p=n+m$, le degré de précision devient $n+m-1$, et il faut pour cela que l'on ait

$$\int_\alpha^\beta Q\,F(x)\,dx = 0$$

toutes les fois que, $\varphi(x)$ étant d'un degré inférieur à $n+m$, le degré du polynôme Q ne dépasse pas $m-1$. Il faut donc qu'on ait

$$\int_\alpha^\beta x^h F(x)\,dx = 0 \quad (h = 0, 1, \ldots, m-1), \tag{12}$$

ce qu'on démontre aussi en faisant $\varphi(x) = x^h F(x)$. Les relations (12) représentent m conditions auxquelles doivent satisfaire les abscisses a, b, ... si l'on veut atteindre le degré de précision $n+m-1$.

Remarquons en passant qu'avec un nombre impair d'ordonnées symétriques la condition $\int F(x)\,dx = 0$ est toujours remplie; cela saute aux yeux quand les limites sont ± 1, puisque $F(x)$ est alors une fonction impaire, et il est facile de voir que le résultat sera le même pour d'autres limites, une substitution linéaire ne pouvant changer la forme des facteurs $(x-a)$, $(x-b)$, ... dont se compose $F(x)$. Le degré de précision sera donc égal à n, comme nous l'avons déjà vu plus haut. En considérant la forme des expressions (9), on pourrait aussi démontrer directement l'égalité des coefficients des ordonnées symétriques conjuguées.

5. Soient toujours

$$\varphi(x) = k_0 + k_1 x + \ldots \quad \text{et} \quad F(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots.$$

En désignant par le symbole E la *partie entière* d'une fonction ou le quotient d'une division, nous aurons

$$Q = k_n \mathrm{E}\frac{x^n}{F(x)} + k_{n+1}\mathrm{E}\frac{x^{n+1}}{F(x)} + \ldots \tag{13}$$

ou bien

$$Q = \frac{k_n + x k_{n+1} + \ldots}{1 + \frac{1}{x}c_{n-1} + \ldots} = k_n + (x - c_{n-1})k_{n+1} + \ldots, \tag{14}$$

et, en substituant cette expression dans (11), on obtient les termes $k_p \varepsilon_p$, $k_{p+1}\varepsilon_{p+1}$, ... qui figurent dans l'équation (5). On suppose ici p au moins égal à n. Le coefficient de k_{n+s} devient

$$\varepsilon_{n+s} = \int_\alpha^\beta F(x)\,dx\,\mathrm{E}\frac{x^{n+s}}{F(x)}, \tag{15}$$

où

$$\mathrm{E}\frac{x^{n+s}}{F(x)} = x^s - c_{n-1}x^{s-1} + (c_{n-1}^2 - c_{n-2})x^{s-2} - \ldots.$$

Or cette expression est le coefficient de $\frac{1}{z^{s+1}}$ dans le développement de

$$\mathrm{E}\frac{x^n}{(z-x)F(x)} = \frac{z^n}{(z-x)F(z)},$$

et il s'ensuit que ε_{n+s} sera le coefficient de $\frac{1}{z^{s+1}}$ dans

$$\frac{z^n}{F(z)}\int_\alpha^\beta \frac{F(x)}{z-x}\,dx.$$

La formule (6) devient ainsi

$$(16)\qquad \int_\alpha^\beta \frac{dx}{z-x} = \sum \frac{A}{z-a} + \frac{1}{F(z)}\int_\alpha^\beta \frac{F(x)}{z-x}\,dx,$$

et le dernier terme représente ce qu'on peut appeler la *fonction génératrice* des ε, car ε_{n+s} est le coefficient de $\frac{1}{z^{n+s+1}}$ dans le développement de ce terme.

Lorsqu'on a $p = n + m$, le degré de précision devient $n + m - 1$ et les ε s'annulent depuis ε_n jusqu'à ε_{n+m-1}. Dès lors, les équations (15) et (16) peuvent être remplacées par les suivantes,

$$(15\ bis)\qquad \varepsilon_{n+m+s} = \int_\alpha^\beta x^m F(x)\,dx\,\mathrm{E}\,\frac{x^{n+s}}{F(x)},$$

et

$$(16\ bis)\qquad \int_\alpha^\beta \frac{dx}{z-x} = \sum \frac{A}{z-a} + \frac{1}{z^m F(z)}\int_\alpha^\beta \frac{x^m F(x)}{z-x}\,dx,$$

en supprimant les termes qui s'annulent en vertu de (12). Pour des ordonnées symétriques et les limites ± 1, on aura $\varepsilon_p = 0$ toutes les fois que p sera impair.

6. La fonction entière

$$\frac{F(x)-F(a)}{x-a} = c_1 + c_2(x+a) + c_3(x^2+ax+a^2) + \ldots$$

peut s'exprimer par

$$\mathrm{E}\,\frac{F(x)}{x-a} = \mathrm{E}\,\frac{F(a)}{a-x},$$

où

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} + \ldots \quad\text{et}\quad \frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \ldots,$$

et, si a est une racine de $F(x)=0$, cette fonction s'identifie avec

$$F_a(x)=\frac{F(x)}{x-a}.$$

On aura donc

$$\int_\alpha^\beta F_a(x)\,dx=\operatorname{E}F(a)\int_\alpha^\beta\frac{dx}{a-x}=\operatorname{E}F(a)\log\frac{a-\alpha}{a-\beta}.$$

Or cette intégrale, que nous désignerons par $R(a)$, n'est autre chose que le numérateur du rapport par lequel nous avons exprimé le coefficient A. On aura donc, pour les limites ± 1,

$$A=\frac{R(a)}{F'(a)}=\frac{1}{F'(a)}\operatorname{E}F(a)\log\frac{a+1}{a-1}, \tag{17}$$

où il faut faire

$$\log\frac{a+1}{a-1}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{3a^3}+\frac{1}{5a^5}+\ldots\right).$$

Cette expression des coefficients A, qui est due à Gauss, suppose que la formule (1) possède au moins le degré de précision $n-1$, comme nous l'avons admis au n° 4. Si elle atteint le degré $2n-3$, on peut obtenir une autre expression des coefficients A en posant

$$\varphi(x)=2F_a(x)F'_a(x).$$

En effet, l'intégration donne alors

$$F_a^2(\beta)-F_a^2(\alpha)=2AF_a(a)F'_a(a),$$

les autres termes de la somme étant nuls. En différentiant l'équation $(x-a)F_a(x)=F(x)$, on trouve encore

$$F_a(a)=F'(a),\quad 2F'_a(a)=F''(a),\quad \ldots;$$

par conséquent, les limites étant ± 1,

$$\frac{F^2(1)}{(1-a)^2}-\frac{F^2(-1)}{(1+a)^2}=AF'(a)F''(a). \tag{18}$$

Pour des ordonnées symétriques, $F^2(1) = F^2(-1)$, et l'équation (18) devient

$$(19) \qquad A = \frac{4a}{(1-a^2)^2} \frac{F^2(1)}{F'(a)F''(a)}.$$

Si la racine a coïncide avec l'une des limites ($a = 1$), on aura

$$F_a(1) = F'(1),$$

par conséquent, en désignant son coefficient par K,

$$(20) \qquad F'^2(1) - \tfrac{1}{4}F^2(-1) = KF(1)F''(1),$$

et une formule analogue pour $a = -1$.

7. Le système d'équations (12), qui exprime les conditions à remplir si la formule (1) doit atteindre le degré de précision $n+m-1$, peut être présenté sous une autre forme. $F(x)$ étant du degré n, posons

$$F(x) = D_x^m V, \quad \text{où} \quad V = ax^m + b\,x^{m+1} + \ldots + x^{n+m}.$$

En supposant, pour simplifier, que les limites sont 0 et 1, on aura d'abord

$$\int_0^1 F(x)\,dx = \Big|^{x=1} D_x^{m-1} V = 0,$$

puis

$$\int_0^1 xF(x)\,dx = -\Big|^{x=1} D_x^{m-2} V = 0,$$

et ainsi de suite; en d'autres termes, V et ses $m-1$ premières dérivées devront s'annuler pour $x=1$, comme elles s'annulent déjà pour $x=0$. Par conséquent,

$$V = x^m(x-1)^m(x^{n-m}),$$

où (x^{n-m}) signifie un polynôme du degré $n-m$, dont les coefficients restent arbitraires. En écrivant maintenant $\frac{x+1}{2}$ à la place de x, on trouve, pour les limites ± 1,

$$(21) \qquad F(x) = D_x^m[(x^2-1)^m(x^{n-m})].$$

C'est la forme que doit avoir $F(x)$ pour que le degré de précision devienne $n+m-1$. Avec $m=n$ on atteint le degré $2n-1$, et l'on a

$$(22)\qquad F(x)=D_x^n(x^2-1)^n=0.$$

C'est l'équation qui fournit les racines $a, b, \ldots$ dans la méthode de Gauss (on sait que c'est Jacobi qui lui a donné cette forme). Ces racines sont toutes réelles et comprises entre o et ± 1.

En nous contentant d'un degré de précision moindre, nous pouvons disposer à volonté des constantes que renferme (x^{n-m}). Prenant, par exemple, $m=n-1$, nous pourrons faire

$$(23)\qquad F(x)=D_x^{n-1}[(x^2-1)^{n-1}(x\pm 1)]=0,$$

en comprenant parmi les abscisses (qui seront asymétriques) l'une des deux limites de l'intégrale (± 1). Pour avoir des abscisses symétriques, il faudrait ici faire $(x^{n-m})=x$, et l'on retomberait sur la méthode de Gauss. Prenant ensuite $m=n-2$, nous pourrons utiliser les deux limites en faisant

$$(24)\qquad F(x)=D_x^{n-2}(x^2-1)^{n-1}=0.$$

Afin d'exprimer ces résultats à l'aide des polynômes de Legendre, posons

$$D_x^n(x^2-1)^n=1.2\ldots n.2^n.P_n(x) \quad \text{et} \quad D_xP_n=P'_n.$$

Les équations (22), (23) et (24) deviendront :

$$(22\ bis)\qquad P_n(x)=0 \quad (\text{degré de préc., } 2n-1),$$

$$(23\ bis)\qquad (x\pm 1)P_{n-1}+\frac{1}{n}(x^2-1)P'_{n-1}=0 \quad (\text{degré de préc., } 2n-2),$$

$$(24\ bis)\qquad (x^2-1)P'_{n-1}=0 \quad (\text{degré de préc., } 2n-3).$$

On voit que l'équation (24 *bis*) fournit le degré de précision $2n-1$ avec $n+1$ ordonnées, parmi lesquelles sont comprises $\varphi(+1)$ et $\varphi(-1)$, et, dans le cas où $\varphi(x)$ s'annule pour $x=\pm 1$, on n'aura à calculer que $n-1$ ordonnées, c'est-à-dire une de moins que dans la méthode de Gauss.

8. Pour revenir au cas général, soient $a, b, c, \ldots, p$ les $n-m$ racines arbitrairement choisies. Nous aurons d'une part

$$F(x) = D_x^m[(x^2-1)^m(x^{n-m})]$$

et de l'autre, a étant l'une quelconque des racines données,

$$o = D_a^m[(a^2-1)^m(a^{n-m})].$$

Ce système de $n-m$ équations détermine les coefficients du polynôme $(x^{n-m}) = \alpha + \beta x + \ldots + x^{n-m}$, et l'on voit tout de suite que $F(x)$ aura pour expression le déterminant

$$(25)\quad \Sigma \pm D_x^m D_a^m D_b^m \ldots [(x^2-1)^m(a^2-1)^m(b^2-1)^m \ldots \Pi(a, b, \ldots, p, x)],$$

où $\Pi(a, b, \ldots, p, x)$ signifie le produit des différences

$$(b-a)(c-a)\ldots(x-p).$$

Cette expression de $F(x)$ avait été déjà donnée par M. Christoffel (*Journal de Crelle*, t. LV); mais nous y sommes arrivé par une autre voie.

Quand les racines $a, b, \ldots$ sont symétriques $(\pm a, \pm b, \ldots)$, le polynôme (x^{n-m}) ne renferme que des puissances de même parité, et l'expression de $F(x)$ se simplifie, car le nombre des équations à résoudre se trouve alors réduit de moitié. Soit d'abord $n-m=2s$; on aura s équations de la forme

$$o = D_a^m[(a^2-1)^m(a^{2s})],$$

qui donneront

$$(26)\quad \begin{cases} F(x) = \Sigma \pm D_x^m D_a^m D_b^m \ldots \\ \qquad \times [(x^2-1)^m(a^2-1)^m(b^2-1)^m \ldots \Pi(a^2, b^2, \ldots, x^2)]. \end{cases}$$

Remarquons maintenant que

$$D_x^m[(x^2-1)^m(x^{2s})] = D_x^{m-1}[(x^2-1)^{m-1}(x^{2s+1})],$$

où les deux polynômes (x^{2s}) et (x^{2s+1}) ont le même nombre de coefficients et peuvent, par conséquent, se déduire l'un de l'autre. En faisant usage de cette transformation, on trouve

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} F(x) &= \Sigma \pm D_x^{m-1} D_a^{m-1} \ldots \\ &\times [(x^2-1)^{m-1}(a^2-1)^{m-1} \ldots a\, b \ldots x . \Pi(a^2, b^2, \ldots, x^2)]. \end{aligned}\right.$$

Soit, par exemple, $n=3$, $m=1$, $s=1$ (degré de précision, 3). L'équation (26) donnera

$$F(x) = D_x D_a (x^2-1)(a^2-1)(x^2-a^2) = 8ax(x^2-a^2),$$

et l'équation (27), directement,

$$F(x) = ax(x^2-a^2).$$

9. Il faut maintenant déterminer les coefficients de la formule de Gauss. En faisant $F(x) = P_n$, et $F(a) = 0$, l'équation bien connue

$$(x^2-1)P_n'' + 2xP_n' = n(n+1)P_n$$

fournit la relation

$$(1-a^2)F''(a) = 2a . F'(a).$$

En même temps, $F^2(1) = 1$, et (19) donne

$$(28)\qquad A = \frac{2}{1-a^2}\,\frac{1}{F'^2(a)}.$$

En rapprochant (28) de (17), on trouve

$$(1-a^2)R(a) . F'(a) = 2,$$

d'où enfin

$$A = \frac{R(a)}{F'(a)} = \frac{1-a^2}{2}R^2(a) = \frac{2}{1-a^2}\,\frac{1}{F'^2(a)}.$$

De ces expressions, les deux premières avaient été données par Gauss; la troisième est due à M. Christoffel, mais elle découle des deux premières. La seconde expression est une fonction entière de a, du degré $2n$. Gauss fait observer qu'elle peut être remplacée par le reste que laisse la division par $F(a)$, puisque $F(a) = 0$. Ce reste sera du degré $n-2$ si n est un nombre pair; dans le cas de n impair, on aura aussi $\frac{1}{a}F(a)=0$, en faisant abstraction de la racine $x=0$, et, en divisant par $\frac{1}{a}F(a)$, on trouvera un reste du degré $n-3$.

Lorsque n est impair, le coefficient qui correspond à la racine zéro a pour valeur

$$A_0=\frac{2}{F'^2(0)}=2\left(\frac{2.4\ldots n-1}{3.5\ldots n}\right)^2;$$

en même temps, le calcul des autres coefficients peut être simplifié par cette remarque, qu'en vertu de l'équation $P_n(a)=0$ on a

$$P'_n(a)=\frac{1}{a}P'_{n-1}(a).$$

Les relations (8) et (28) montrent que les coefficients sont des fractions positives $(0<A<1)$.

Les formules (15) et (16), ou (15 *bis*) et (16 *bis*), déterminent les corrections ε. Pour les limites ± 1, on a d'abord $\varepsilon_{2n+1}=0$, $\varepsilon_{2n+3}=0,\ldots$, puis

$$(29)\quad \varepsilon_{2n}=\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots 2n}\int_{-1}^{+1}x^n D_x^n(x^2-1)^n dx=\frac{2}{2n+1}\left(\frac{1.2\ldots n}{1.3\ldots 2n-1}\right)^2.$$

En posant

$$Q_n(z)=\int_{-1}^{+1}\frac{P_n(x)}{z-x}dx,$$

on voit que ε_p sera le coefficient de $\frac{1}{z^{p+1}}$ dans le développement de $\frac{Q_n(z)}{P_n(z)}$, par conséquent ε_{2n+2s} celui de $\frac{1}{z^{2s}}$ dans le développement de

$$(30)\qquad z^{2n+1}\frac{Q_n(z)}{P_n(z)}=\varepsilon_{2n}\frac{1+\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\frac{1}{z^2}+\ldots}{1-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\frac{1}{z^2}+\ldots}.$$

On trouve ainsi

$$\varepsilon_{2n+2}=\varepsilon_{2n}\frac{2n+1}{2n+3}\,\frac{n^2+n-1}{2n-1},$$

et $\varepsilon_{2n+2} > \varepsilon_{2n}$ à partir de $n=2$. Mais en même temps $\varepsilon_{2n} < \frac{2}{2n+1}$, $\varepsilon_{2n+2} < \frac{2}{2n+3}$ (¹).

En désignant par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ les coefficients de $\frac{1}{z^2}, \frac{1}{z^4}, \cdots$ dans la série infinie qui forme le numérateur de l'expression (30), et par $-\mu_1$, $+\mu_2, \ldots$ les coefficients de la série finie qui figure au dénominateur, on aurait aussi

$$\varepsilon_{2p} - \mu_1 . \varepsilon_{2p-2} + \mu_2 . \varepsilon_{2p-4} - \ldots = \varepsilon_{2n} . \lambda_{p-n}.$$

On a d'ailleurs

$$P_1 = x, \quad \frac{2}{3}P_2 = x^2 - \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{5}P_3 = x^3 - \frac{3}{5}x,$$
$$\frac{8}{35}P_4 = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}, \quad \frac{8}{63}P_5 = x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x,$$
$$\frac{16}{231}P_6 = x^6 - \frac{15}{11}x^4 + \frac{5}{11}x^2 - \frac{5}{231},$$
$$\frac{16}{429}P_7 = x^7 - \frac{21}{13}x^5 + \frac{105}{143}x^3 - \frac{35}{429}x,$$
$$\frac{128}{6435}P_8 = x^8 - \frac{28}{15}x^6 + \frac{14}{13}x^4 - \frac{28}{143}x^2 + \frac{7}{1287},$$
$$\frac{128}{12155}P_9 = x^9 - \frac{36}{17}x^7 + \frac{126}{85}x^5 - \frac{84}{221}x^3 + \frac{63}{2431}x.$$

On trouve ainsi (limites ± 1) :

Pour $n=1$. $a=0$, $A=2$, $\varepsilon_2 = \frac{2}{3}$, $\varepsilon_4 = \frac{2}{5}$, $\varepsilon_6 = \frac{2}{7}$, ...

$n=2$. $a = \sqrt{\frac{1}{3}}$, $A=1$, $\varepsilon_4 = \frac{8}{45}$, $\varepsilon_6 = \frac{40}{189}$, $\varepsilon_8 = \frac{16}{81}$, ...;

$n=3$. $a=0$ et $\sqrt{\frac{3}{5}}$, $A = \frac{8}{9}$ et $\frac{5}{9}$, $\varepsilon_6 = \frac{8}{175}$, $\varepsilon_8 = \frac{88}{1125}$, $\varepsilon_{10} = \frac{656}{6875}$, ...,

$n=4$. $a^2 = \frac{3}{7} \pm \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}$, $A = \frac{18 \mp \sqrt{30}}{36}$, $\varepsilon_8 = \frac{128}{11025}$, $\varepsilon_{10} = \frac{171}{77}\varepsilon_8$;

$n=5$. $a^2 = 0$ et $\frac{5}{9} \pm \frac{2}{9}\sqrt{\frac{10}{7}}$, $A = \frac{128}{225}$ et $\frac{322 \mp 13\sqrt{70}}{900}$, $\varepsilon_{10} = \frac{128}{43659}$, $\varepsilon_{12} = \frac{319}{117}\varepsilon_{10}$.

(¹) Sur les corrections de la formule de Gauss, voyez : Jacobi (*Journal de Crelle*, t. Ier); Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen*, p. 289, et une Note de M. Callandreau (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 3 mai 1880).

Gauss a donné les valeurs numériques des racines et des coefficients jusqu'à $n = 7$; je les ai encore calculées pour $n = 8$, 9 et 10. Le Tableau suivant contient : dans les deux premières colonnes, les racines conjuguées a et 1 — a pour les limites 0 et 1; dans la troisième, les coefficients A pour les mêmes limites (en les doublant, on aura les coefficients pour les limites ± 1); dans la quatrième, les racines a pour les limites ± 1.

	a.	1 — a.	A.	*a*.
$n = 2$..	0,21132487	0,78867513	0,5	±0,57735027
$n = 3$..	0,11270167	0,88729833	0,27777778	±0,77459667
	0,5		0,44444444	0
$n = 4$..	0,06943184	0,93056816	0,17392742	±0,86113631
	0,33000948	0,66999052	0,32607258	±0,33998104
$n = 5$..	0,04691008	0,95308992	0,11846344	±0,90617985
	0,23076534	0,76923466	0,23931434	±0,53846931
	0,5		0,28444444	0
$n = 6$..	0,03376524	0,96623476	0,08566225	±0,93246951
	0,16939531	0,83060469	0,18038079	±0,66120939
	0,38069041	0,61930959	0,23395697	±0,23861919
$n = 7$..	0,02544604	0,97455396	0,06474248	±0,94910791
	0,12923441	0,87076559	0,13985270	±0,74153119
	0,29707742	0,70292258	0,19091503	±0,40584515
	0,5		0,20897959	0
$n = 8$..	0,0198550718	0,9801449282	0,0506142681	±0,9602898565
	0,1016667613	0,8983332387	0,1111905172	±0,7966664774
	0,2372337950	0,7627662050	0,1568533229	±0,5255324099
	0,4082826788	0,5917173212	0,1813418917	±0,1834346425
$n = 9$..	0,0159198802	0,9840801198	0,0406371942	±0,9681602395
	0,0819844463	0,9180155537	0,0903240804	±0,8360311073
	0,1933142836	0,8066857164	0,1303053482	±0,6133714327
	0,3378732883	0,6621267117	0,1561735385	±0,3242534234
	0,5		0,1651196775	0
$n = 10$.	0,0130467357	0,9869532643	0,0333356722	±0,9739065285
	0,0674683167	0,9325316833	0,0747256746	±0,8650633667
	0,1602952159	0,8397047841	0,1095431813	±0,6794095683
	0,2833023029	0,7166976971	0,1346333597	±0,4333953941
	0,4255628305	0,5744371695	0,1477621124	±0,1488743390

Voici les corrections ε_{2n} pour les mêmes systèmes :

	lim. o et 1.	lim. $\pm$ 1.
$n=2$	$\varepsilon_4 = \dfrac{1}{180} = 0,00555556$	0,177778
$n=3$	$\varepsilon_6 = \dfrac{1}{2800} = 0,00035714$	0,045714
$n=4$	$\varepsilon_8 = \dfrac{1}{44100} = 0,00002268$	0,011610
$n=5$	$\varepsilon_{10} = 0,000001431549$	0,002932
$n=6$	$\varepsilon_{12} = 0,000000090098$	0,000738
$n=7$	$\varepsilon_{14} = 0,000000005660$	0,000186
$n=8$	$\varepsilon_{16} = 0,000000000355$	0,000047
$n=9$	$\varepsilon_{18} = 0,000000000022$	0,000012
$n=10$	$\varepsilon_{20} = 0,000000000001$	0,000003

On voit que, pour les limites ± 1, chaque correction ε est à peu près $\frac{1}{4}$ de la précédente $\left(\frac{1}{16}\right.$ de la précédente pour les limites 0 et $\left.1\right)$.

10. Lorsqu'on veut se servir de l'équation (23 *bis*), en prenant

$$F(x) = (x+1)P_{n-1} + \frac{1}{n}(x^2-1)P'_{n-1},$$

on a d'abord

$$(x^2-1)F'' + (x+1)F' = n^2.F,$$

puis

$$F(1) = 2, \quad F(-1) = 0, \quad (1-a)F''(a) = F'(a) = 2P'_{n-1}(a),$$

et (18) donne

$$A = \frac{1}{1-a}\,\frac{1}{P'^2_{n-1}(a)}. \tag{32}$$

Pour la racine -1, on a $F'^2(-1) = n^2$, et l'équation (20) donne

$$K = \frac{2}{n^2}.$$

On trouve ainsi, par exemple :

Pour $n=2$ (degré de précision, 2) :

$$a = -1, \quad +\frac{1}{3}, \quad A = \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2};$$

Pour $n = 3$ (degré de précision, 4)

$$a = -1, \quad \frac{1 \pm \sqrt{6}}{5}, \quad A = \frac{2}{9}, \quad \frac{16 \mp \sqrt{6}}{18}.$$

Ces constantes se rapportent aux limites ± 1. Pour les limites o et 1, on prendrait

$$n = 2, \quad a = 0, \quad \frac{2}{3}, \quad A = \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{4}, \quad \dots.$$

La détermination des coefficients devient un peu plus difficile lorsqu'on veut se servir de l'équation (24 *bis*), en faisant

$$F(x) = (x^2 - 1)P'_{n-1},$$

de sorte que les racines ± 1 viennent s'ajouter à celles de $P'_{n-1} = 0$. On a, dans ce cas,

$$F' = n(n-1)P_{n-1}, \quad F'' = n(n-1)P'_{n-1}, \quad (x^2 - 1)F'' = n(n-1)F,$$

puis

$$F'(1) = n(n-1), \quad 2F''(1) = n^2(n-1)^2,$$

et (20) donne, pour les deux racines ± 1,

$$K = \frac{2}{n(n-1)}.$$

Mais (18) donne $0 = 0$. Pour obtenir les autres coefficients, nous poserons

$$F(x) = (x-1)(x-a)f(x).$$

En prenant $\varphi(x) = 2f.f'$, la formule (1) donne

$$f^2(1) = 2Af(a).f'(a) + 2Kf(1).f'(1),$$

les autres termes étant nuls; ensuite

$$F'(1) = (1-a)f(1), \quad \frac{1}{2}F''(1) = f(1) + (1-a)f'(1),$$
$$F'(a) = (a-1)f(a), \qquad 0 = f(a) + (a-1)f'(a),$$

et, en substituant, il vient

$$(33) \qquad A = K\frac{F'^2(1)}{F'^2(a)} = \frac{K}{P^2_{n-1}(a)}.$$

On peut faciliter le calcul des coefficients A en observant qu'en vertu de l'équation $P'_{n-1}(a) = 0$ on a

$$-P_{n-1}(a) = \frac{1}{n-1}P'_{n-2}(a) = \frac{1}{2n-3}\,\frac{1}{a}P'_{n-3}(a).$$

Lorsque n est impair, le coefficient de la racine zéro a pour valeur

$$A_0 = K\left(\frac{2.4\ldots n-1}{3.5\ldots n-2}\right)^2 = \frac{2n}{n-1}\left(\frac{2.4\ldots n-1}{3.5\ldots n}\right)^2.$$

La relation (33) peut aussi s'obtenir comme il suit. En prenant $\varphi(x) = f.F'$, la formule (1) donne

$$\int_{-1}^{+1} f\,F'\,dx = \frac{A}{a-1}F'^2(a) + \frac{K}{1-a}F'^2(1).$$

Or la même intégrale peut s'écrire

$$n(n-1)\int_{-1}^{+1}\frac{x+1}{x-a}PP'dx = n(n-1)(a+1)\int_{-1}^{+1}\frac{P.P'}{x-a}dx,$$

et l'on a (¹)

$$\int_{-1}^{+1}\frac{P.P'}{x-a}dx = P'(a)\int_{-1}^{+1}\frac{P}{x-a}dx = 0,$$

puisque a est une racine de l'équation $P'(a) = 0$. On en conclut que

$$A\,F'^2(a) - K\,F'^2(1) = 0.$$

Pour $n=2$ et $n=3$, cette méthode coïncide avec celle de Cotes. Pour $n=4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$, les abscisses qui s'ajoutent à ± 1 se

(¹) F. Neumann, *Beitr. zur Theorie der Kugelfunctionen*, p. 155, n° 25.

déterminent par les équations

$$5x^2 - 1 = 0, \quad 7x^3 - 3x = 0, \quad 3x^4 - 2x^2 + \frac{1}{7} = 0,$$
$$11x^5 - 10x^3 + \frac{5}{3}x = 0,$$
$$13x^6 - 15x^4 + \frac{45}{11}x^2 - \frac{5}{33} = 0, \quad \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{13}x^3 - \frac{1}{143}x = 0,$$
$$\frac{17}{7}x^8 - 4x^6 + 2x^4 - \frac{4}{13}x^2 + \frac{1}{143} = 0,$$
$$\frac{323}{21}x^9 - \frac{204}{7}x^7 + 18x^5 - 4x^3 + \frac{3}{13}x = 0.$$

On trouve ainsi :

Pour $n = 4$,

$$a = \pm 1, \quad \pm\sqrt{\frac{1}{5}}, \quad A = \frac{1}{6}, \quad \frac{5}{6}.$$

Pour $n = 5$,

$$a = \pm 1, \quad \pm\sqrt{\frac{3}{7}}, \quad 0, \quad A = \frac{1}{10}, \quad \frac{49}{90}, \quad \frac{64}{90}.$$

Pour $n = 6$,

$$a = \pm 1, \quad \pm\sqrt{\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{7}}}, \quad A = \frac{1}{15}, \quad \frac{14 \mp \sqrt{7}}{30},$$

Pour $n = 7$,

$$a = \pm 1, \quad \pm\sqrt{\frac{5}{11} \pm \frac{2}{11}\sqrt{\frac{5}{3}}}, \quad 0, \quad A = \frac{1}{21}, \quad \frac{124 \mp 7\sqrt{15}}{350}, \quad \frac{256}{525}.$$

Quant aux corrections ε, que nous désignerons ici par (ε), on démontre facilement, en se servant de la formule (16), que (ε_p) est le coefficient de $\frac{1}{z^{p+1}}$ dans le développement de $\frac{Q'_{n-1}(z)}{P'_{n-1}(z)}$. Par conséquent, si nous écrivons $n+1$ à la place de n, (ε_{2n+2s}) sera le coefficient de $\frac{1}{z^{2s}}$ dans le développement de

$$z^{2n+1}\frac{Q'(z)}{P'_n(z)} = -\varepsilon_{2n}\frac{n+1}{n}\,\frac{1 + \frac{(n+2)(n+3)}{2(2n+3)}\frac{1}{z^2} + \ldots}{1 - \frac{(n-1)(n-2)}{2(2n-1)}\frac{1}{z^2} + \ldots},$$

où ε_{2n} est la quantité définie par la relation (29). On aura donc

$$(\varepsilon_{2n}) = -\frac{n+1}{n}\varepsilon_{2n}, \quad (\varepsilon_{2n+2}) = -\frac{(n+1)^2}{n(n+1)-1}\varepsilon_{2n+2}, \quad \ldots,$$

et l'on voit que les corrections (ε_p) sont du même ordre de grandeur que les corrections ε_p de la formule de Gauss, mais de signes contraires. Il s'ensuit que, en combinant d'une manière convenable les résultats G, F tirés des deux formules, on peut annuler la première correction et diminuer fortement les suivantes; il suffit pour cela de prendre la moyenne $\frac{(n+1)G+nF}{2n+1}$. Cette moyenne aura le degré de précision $2n+1$, et ses corrections seront

$$[\varepsilon_{2n+2}] = -\frac{1}{2n+1}\frac{n+1}{n(n+1)-1}\varepsilon_{2n+2} = -\frac{n+1}{(2n-1)(2n+3)}\varepsilon_{2n}, \ldots.$$

Ainsi, pour $n=5$, ε_{10} étant prise pour unité, les corrections ε_{12}, ε_{14}, ... de la formule de Gauss sont fournies par la série

$$\frac{1+\frac{21}{13}\frac{1}{z^2}+\frac{126}{65}\frac{1}{z^4}+\frac{462}{221}\frac{1}{z^6}+\ldots}{1-\frac{10}{9}\frac{1}{z^2}+\frac{5}{21}\frac{1}{z^4}} = 1+\frac{319}{117}\frac{1}{z^2}+\frac{13409}{2835}\frac{1}{z^4}+\frac{580943}{86751}\frac{1}{z^6}+\ldots,$$

et les corrections de la nouvelle formule (en laissant de côté le facteur $-\frac{6}{5}$) par la série

$$\frac{1+\frac{28}{13}\frac{1}{z^2}+\frac{42}{13}\frac{1}{z^4}+\frac{924}{221}\frac{1}{z^6}+\ldots}{1-\frac{2}{3}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{21}\frac{1}{z^4}} = 1+\frac{110}{39}\frac{1}{z^2}+\frac{319}{63}\frac{1}{z^4}+\frac{23848}{3213}\frac{1}{z^6}+\ldots.$$

Les valeurs relatives des corrections ε_{10}, ε_{12}, ..., (ε_{10}), (ε_{12}), ... s'expriment donc par les nombres

G........ $+1$, $+2,7265$, $+4,7298$, $+6,6967$, ...,
F........ $-\frac{6}{5}$, $-\frac{6}{5}\,2,8205$, $-\frac{6}{5}\,5,0635$, $-\frac{6}{5}\,7,4223$, .. ,

et les corrections de la moyenne deviennent

$\frac{6G+5F}{11}$... 0, $-0,0513$, $-0,1820$, $-0,3958$, ...

On voit que ε_{10} disparaît et que ε_{12} se trouve réduite à $\frac{1}{54}$, ε_{14} à $\frac{1}{27}$ de sa valeur, etc.

Voici les valeurs des constantes pour la formule (24 *bis*); les racines a, 1 — a et les coefficients A sont donnés pour les limites 0 et 1.

	a.	1 — a.	A.	*a*.
$n = 4$..	0	1	0,08333333	± 1
	0,27639320	0,72360680	0,41666667	± 0,44721360
$n = 5$..	0	1	0,05	± 1
	0,17267316	0,82732684	0,27222222	± 0,65465367
	0,5		0,35555556	0
$n = 6$..	0	1	0,03333333	± 1
	0,11747234	0,88252766	0,18923748	± 0,76505532
	0,35738424	0,64261576	0,27742919	± 0,28523152
$n = 7$..	0	1	0,02380952	± 1
	0,08488805	0,91511195	0,13841302	± 0,83022390
	0,26557560	0,73442440	0,21587269	± 0,46884879
	0,5		0,24380952	0
$n = 8$..	0	1	0,01785714	± 1
	0,06412993	0,93587007	0.10535211	± 0,87174015
	0,20414991	0,79585009	0,17056135	± 0,59170018
	0,39535039	0,60464961	0,20622940	± 0,20929922
$n = 9$..	0	1	0,0138888889	± 1
	0,0501210023	0,9498789977	0,0827476808	± 0,8997579954
	0,1614068602	0,8385931398	0,1372693563	± 0,6771862795
	0,3184412681	0,6815587319	0,1732142555	± 0,3631174638
	0,5		0,1857596372	0
$n = 10$.	0	1	0,0111111111	± 1
	0,0402330459	0,9597669541	0,0666529954	± 0,9195339082
	0,1306130674	0,8693869326	0,1124446710	± 0,7387738651
	0,2610375251	0,7389624749	0,1460213418	± 0,4779249498
	0,4173605212	0,5826394788	0,1637698806	± 0,1652789577
$n = 11$.	0	1	0,0090909091	± 1
	0,0329992848	0,9670007152	0,0548061366	± 0,9340014304
	0,1077582631	0,8922417369	0,0935849409	± 0,7844834737
	0,2173823365	0,7826176635	0,1240240521	± 0,5652353270
	0,3521209322	0,6478790678	0,1434395624	± 0,2957581356
	0,5		0,1501087977	0

Voici les corrections (ε) pour les mêmes systèmes :

	lim. o et 1.	lim. ± 1.
$n = 4$..............	$\varepsilon_6 = -\frac{1}{2100} = -0,00047619$	$-0,060952$
$n = 5$..............	$\varepsilon_8 = -0,00002834$	$-0,014512$
$n = 6$..............	$\varepsilon_{10} = -0,00000172$	$-0,003518$
$n = 7$..............	$\varepsilon_{12} = -0,000000105$	$-0,000861$
$n = 8$..............	$\varepsilon_{14} = -0,0000000065$	$-0,000212$
$n = 9$..............	$\varepsilon_{16} = -0,00000000040$	$-0,000053$
$n = 10$..............	$\varepsilon_{18} = -0,000000000025$	$-0,000013$
$n = 11$..............	$\varepsilon_{20} = -0,0000000000015$	$-0,000003$

11. La méthode de Cotes est fondée sur l'emploi d'ordonnées *équidistantes,* qui correspondent aux abscisses

$$0,\ \frac{1}{n-1},\ \frac{2}{n-1},\ \ldots,\ \frac{n-2}{n-1},\ 1\ (\text{lim o et } 1)$$

ou bien

$$\pm 1,\quad \pm\frac{n-3}{n-1},\quad \pm\frac{n-5}{n-1},\quad \ldots\quad (\text{lim} \pm 1).$$

Les coefficients conjugués sont égaux, et le degré de précision sera $n-1$ ou n, selon que n sera pair ou impair. Voici les valeurs des coefficients pour les limites o et 1 ; ces coefficients correspondent aux abscisses conjuguées

$$\begin{array}{l} 0,\ \dfrac{1}{n-1},\ \dfrac{2}{n-1},\ \ldots, \\ 1,\ \dfrac{n-2}{n-1},\ \dfrac{n-3}{n-1},\ \ldots, \end{array}$$

auxquelles s'ajoute l'abscisse moyenne $\frac{1}{2}$ si n est impair.

$n = 1$...... $\mathrm{A} = 1$ $\left(a = \frac{1}{2}\right)$.

$n = 2$...... $\mathrm{A} = \frac{1}{2}$ $(a = 0,\ 1)$.

$n = 3$...... $\mathrm{A} = \frac{1}{6},\ \frac{4}{6}$ $\left(a = 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)$.

$n=4\ldots\ldots\quad A=\frac{1}{8},\ \frac{3}{8}\quad \left(a=0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1\right).$

$n=5\ldots\ldots\quad A=\frac{7}{90},\ \frac{32}{90},\ \frac{12}{90}\quad \left(a=0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ 1\right).$

$n=6\ldots\ldots\quad 288A=19,\ 75,\ 50.$

$n=7\ldots\ldots\quad 840A=41,\ 216,\ 27,\ 272.$

$n=8\ldots\ldots\quad 17280A=751,\ 3577,\ 1323,\ 2989.$

$n=9\ldots\ldots\quad 28350A=989,\ 5888,\ -928,\ 10496,\ -4540.$

$n=10\ldots\ldots\quad 89600A=2857,\ 15741,\ 1080,\ 19344,\ 5778.$

$n=11\ldots\ldots\quad 598752A=16067,\ 106300,\ -48525,\ 272400,\ -260550,\ 427368.$

Voici encore les corrections ε_p pour les limites ± 1 et pour les limites 0 et 1 (celles-ci se déduisent des premières en divisant par 2^{p+1}).

	(lim ± 1.)	(lim 0 et 1.)
$n=1\ldots\ldots$	$\varepsilon_2=+\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{12}=+0,0833333$
$n=2\ldots\ldots$	$\varepsilon_{2}=-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{6}=-0,1666667$
$n=3\ldots\ldots$	$\varepsilon_4=-\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{120}=-0,0083333$
$n=4\ldots\ldots$	$\varepsilon_4=-\frac{16}{135}$	$-\frac{1}{270}=-0,0037037$
$n=5\ldots\ldots$	$\varepsilon_6=-\frac{1}{21}$	$-\frac{1}{2688}=-0,0003720$
$n=6\ldots\ldots$	$\varepsilon_6=-\frac{352}{131275}$	$-\frac{11}{52500}=-0,0002095$
$n=7\ldots\ldots$	$\varepsilon_8=-\frac{16}{1215}$	$-\frac{1}{38880}=-0,0000257$
$n=8\ldots\ldots$	$\varepsilon_8=-\frac{42752}{5294205}$	$-\frac{167}{10588410}=-0,0000158$
$n=9\ldots\ldots$	$\varepsilon_{10}=-\frac{37}{8448}$	$-\frac{37}{17301504}=-0,0000021$
$n=10\ldots\ldots$	$\varepsilon_{10}=-\frac{110720}{39459493}$	$-\frac{865}{631351908}=-0,0000014$
$n=11\ldots\ldots$	$\varepsilon_{12}=-\frac{4174832}{2666015625}$	$-\frac{260927}{1365000000000}=-0,0000002$

La *méthode des trapèzes* revient à remplacer la courbe $y=\varphi(x)$ par un polygone inscrit. En faisant usage de n ordonnées équidistantes, qui divisent l'aire à évaluer en $n-1=m$ trapèzes, on a

$$(34)\left\{\begin{aligned}\int_0^1 \varphi(x)\,dx &= \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{2}\varphi(0)+\varphi\left(\frac{1}{n-1}\right)+\ldots+\varphi\left(\frac{n-2}{n-1}\right)+\frac{1}{2}\varphi(1)\right]\\ &= \frac{1}{m}\sum_1^{m-1}\varphi\left(\frac{h}{m}\right)+\frac{\varphi(0)+\varphi(1)}{2m}.\end{aligned}\right.$$

Cette formule devient déjà inexacte pour $\varphi(x)=x^2$; elle n'a que le degré de précision 1. Ce qui atténue l'erreur, c'est que les corections ε sont proportionnelles à $\frac{1}{m^2}$. En effet,

$$\begin{aligned}\varepsilon_p &= \int_0^1 x^p\,dx-\frac{1}{2m}-\frac{1}{m}\sum\left(\frac{h}{m}\right)^p\\ &= -\frac{p}{12m^2}+\frac{p(p-1)(p-2)}{720m^4}-\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{30240m^6}+\ldots;\end{aligned}$$

par suite,

$$\varepsilon_2=-\frac{1}{6m^2},\quad \varepsilon_3=-\frac{1}{4m^2},\quad \varepsilon_4=-\frac{1}{3m^2}+\frac{1}{30m^4}\quad\cdots.$$

Au reste, la formule (34) représente simplement les premiers termes de la formule d'Euler

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi(x)\,dx &= \frac{1}{m}\sum_1^{m-1}\varphi\left(\frac{h}{m}\right)+\frac{\varphi(1)+\varphi(0)}{2m}\\ &\quad -\frac{\varphi'(1)-\varphi'(0)}{12m^2}+\frac{\varphi'''(1)-\varphi'''(0)}{720m^4}-\frac{\varphi^{\mathrm{v}}(1)-\varphi^{\mathrm{v}}(0)}{30240m^6}+\ldots\end{aligned}$$

et les formules de Cotes sont complétées d'une manière analogue par d'autres formules qui se déduisent de cette dernière.

12. On conçoit que, dans des cas particuliers, le degré de précision de ces formules puisse être plus élevé que dans le cas général. Ainsi, quand $\varphi(x)$ est une fonction paire, $\varphi(x)=\psi(x^2)$, on aura, pour un nombre pair d'ordonnées symétriques ($n=2i$),

$$\int_0^1 \psi(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\psi(x^2)\,dx=A_1\psi(a_1^2)+A_2\psi(a_2^2)+\ldots+A_i\psi(a_i^2),$$

les racines et les coefficients étant calculés pour les limites ± 1. Le nombre des termes de la formule se trouve ainsi réduit de moitié, et la méthode de Gauss permet d'atteindre, avec i ordonnées, le degré $4i-1$; l'erreur ne commence qu'au terme x^{4i} du développement de $\varphi(x)$. En prenant $n=2i+1$, on atteindrait le degré $4i+1$ avec $i+1$ ordonnées, car il faudrait alors ajouter le terme $\frac{1}{2}A_0\psi(0)$.

Soit, d'autre part, $\varphi(x)=x^{p-1}\psi(x^p)$. En posant $x^p=z$, on aura

$$p\int_0^1 \varphi(x)dx=\int_0^1 \psi(z)dz=\Sigma A\psi(a),$$

et, en faisant usage de la méthode de Gauss, l'erreur ne commencera qu'au terme $z^{2n}=x^{2np}$. Dans le cas de $p=2$ par exemple [$\varphi(x)=x\,\psi(x^2)$ étant une fonction impaire], l'erreur ne commencera qu'au terme x^{4n}.

Dans une Thèse présentée en 1868 à la Faculté des Sciences, M. Pujet a traité le cas plus général où $\varphi(x)=x^q\psi(x^p)$. Posant encore $x^p=z$, on aura

$$p\int_0^1 \varphi(x)dx=\int_0^1 \psi(z)\frac{x^{q+1}}{z}\,dz,$$

et l'intégrale appartient ici au type (2). On pourra la représenter par $\Sigma A\psi(a)$ avec le degré de précision $2n-1$ par rapport à z ($2np-1$ par rapport à x) en faisant

$$\frac{x^{q+1}}{z}\,F(z)=D_z^n[x^{q+1}z^{n-1}(z-1)^n]$$

et

$$A=\frac{1}{F'(a)}\int_0^1 F_a(z)\frac{x^{q+1}}{z}\,dz,$$

ainsi que cela résulte du raisonnement déjà employé aux nos 4 et 7. Mais ce cas rentre dans le suivant, qui a été traité par M. Mehler (*Journal de Crelle*, t. 63, 1864).

13. La formule du type (2)

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x) f(x)\,dx = \Sigma \mathrm{A}\,\varphi(a)$$

atteindra le degré de précision $2n-1$ si l'on pose

$$\mathrm{F}(x) f(x) = \mathrm{D}_x^n[f(x)(x^2-1)^n], \tag{35}$$

puisqu'on satisfait ainsi aux équations de condition

$$\int_{-1}^{+1} x^h \mathrm{F}(x) f(x)\,dx = 0, \quad (h = 0, 1, \ldots, n-1),$$

qui sont les analogues des équations (12), pourvu que les produits $(1-x^2) f(x)$, $(1-x^2)^2 f'(x)$, ... s'annulent pour $x = \pm 1$. Cette condition sera remplie en prenant

$$f(x) = (1-x)^\lambda (1+x)^\mu,$$

tant que $\lambda + 1 > 0$, $\mu + 1 > 0$. En même temps,

$$\mathrm{A} = \frac{1}{\mathrm{F}'(a)} \int_{-1}^{+1} \mathrm{F}_a(x) f(x)\,dx.$$

On aura donc, avec le degré de précision $2n-1$,

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)(1-x)^\lambda (1+x)^\mu\,dx = \sum \mathrm{A}\,\varphi(a), \tag{36}$$

en prenant pour abscisses les racines de l'équation $\mathrm{F}(x) = 0$, $\mathrm{F}(x)$ étant définie par la relation

$$(x-1)^\lambda (x+1)^\mu \mathrm{F}(x) = \mathrm{D}_x^n[(x-1)^{n+\lambda}(x+1)^{n+\mu}]. \tag{37}$$

Pour prendre un exemple, soit $\lambda = \mu = 1$. Nous aurons

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)(1-x^2)\,dx = \sum \mathrm{A}\,\varphi(a),$$

et (37) deviendra $F(x) = P'_{n+1} = 0$. Pour $n = 2$, on trouvera $a = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$, $A = \frac{2}{3}$.

Il est très remarquable que les coefficients de la formule de Gauss, ainsi généralisée, conservent la forme indiquée par la relation (28). Voici comment M. Mehler a démontré cette proposition.

La fonction F, définie par (37), satisfait à l'équation différentielle

$$(38)\qquad \left\{\begin{array}{l} D_z[(1-z)^{\lambda+1}(1+z)^{\mu+1}F'(z)] \\ \quad + n(n+\lambda+\mu+1)(1-z)^{\lambda}(1+z)^{\mu}F(z) = 0. \end{array}\right.$$

Cette équation étant désignée par $\Phi(F) = 0$, la fonction $L(z)$, définie par la relation

$$(1-z)^{\lambda}(1+z)^{\mu}L(z) = R(z) = \int_{-1}^{+1}\frac{F(x)-F(z)}{x-z}(1-x)^{\lambda}(1+x)^{\mu}dx,$$

satisfait à l'équation $\Phi(L) = 2c_0F'(z)$, où c_0 est une certaine constante numérique. On tire de là, en intégrant par rapport à z,

$$(1-z)^{\lambda+1}(1+z)^{\mu+1}(FL' - LF') = c_0F^2 - \text{const.},$$

et la constante se détermine en faisant $z = 1$. M. Mehler trouve

$$(39)\qquad \text{const.} = 2^{2n+\lambda+\mu+1}\frac{\Pi(n)\Pi(n+\lambda)\Pi(n+\mu)}{\Pi(n+\lambda+\mu)}.$$

En faisant $z = a$, on a $F = 0$; par suite,

$$(1-a^2)R(a)F'(a) = \text{const.},$$

d'où enfin

$$(40)\qquad A = \frac{R(a)}{F'(a)} = \frac{\text{const.}}{(1-a^2)F'^2(a)}.$$

14. On peut arriver au même résultat en suivant une marche analogue à celle qui nous a conduit à la formule (18). Supposons d'abord que $\lambda = 0$. Nous aurons

$$(41)\qquad (x+1)^{\mu}F(x) = D_x^n[(x^2-1)^n(x+1)^{\mu}].$$

En faisant, dans (36),

$$\varphi(x)(1+x)^{\mu} = D_x[(x+1)^{\mu+1} F_a^2(x)],$$

d'où

$$\varphi(x) = 2(x+1) F_a F_a' + (\mu+1) F_a^2,$$

l'intégration donne

$$2^{\mu} \frac{F^2(1)}{(1-a)^2} = A F'(a)[(a+1)F''(a) + (\mu+1)F'(a)] = A F'^2(a) \frac{1+a}{1-a},$$

en tenant compte de l'équation (38) et des relations déjà employées $F_a(a) = F'(a)$, $2F_a'(a) = F''(a)$. On aura donc

$$(42) \qquad A = \frac{2^{\mu}}{1-a^2} \frac{F^2(1)}{F'^2(a)}.$$

On peut d'ailleurs s'arranger de manière que $F(1)$ soit égale à 1; il suffit pour cela d'écrire, dans l'équation (41), $1.2\ldots n 2^n F(x)$ à la place de $F(x)$. On trouverait une expression analogue du coefficient A en faisant $\mu = 0$ au lieu de $\lambda = 0$.

Dans le cas général, où la formule (36) renferme les deux exposants λ, μ, je poserai

$$\begin{aligned}\varphi(x)(1-x)^{\lambda}(1+x)^{\mu} = {} & F_a D_x[(1-x)^{\lambda+1}(1+x)^{\mu+1} F_b'] \\ & - F_b D_x[(1-x)^{\lambda+1}(1+x)^{\mu+1} F_a'].\end{aligned}$$

L'intégration donne alors

$$\Big|_{-1}^{+1} (1-x)^{\lambda+1}(1+x)^{\mu+1}(F_a F_b' - F_b F_a') = 0,$$

et la somme $\Sigma A \varphi(a)$ se réduit aux deux termes $A\varphi(a) + B\varphi(b)$. Or, en considérant que F_a, F_b et $D_x[(1-x)^{\lambda+1}(1+x)^{\mu+1} F']$ s'annulent pour $x = a$, on voit immédiatement qu'on aura

$$\varphi(a) = -2 \frac{1-a^2}{(a-b)^2} F'^2(a), \quad \varphi(b) = 2 \frac{1-b^2}{(b-a)^2} F'^2(b);$$

par conséquent,

$$A(1-a^2) F'^2(a) - B(1-b^2) F'^2(b) = 0.$$

Cette relation montre qu'on doit poser

$$A = \frac{\text{const.}}{(1-a^2)F'^2(a)}, \tag{40}$$

et il ne reste qu'à déterminer la constante qui figure au numérateur et dont l'expression a été donnée plus haut.

15. En faisant $\lambda = \mu = -\frac{1}{2}$ et $x = \cos\theta$, l'équation (37) devient

$$F(x) = \sqrt{x^2-1}\, D_x^n (x^2-1)^{n-\frac{1}{2}} = 1.3\ldots(2n-1)\cos n\theta$$

ou simplement

$$F(x) = \cos n\theta.$$

Soit encore $a = \cos\alpha$; on aura les racines de l'équation $F(a) = \cos n\alpha = 0$ en prenant

$$\alpha = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \quad (k = 0, 1, \ldots n-1);$$

puis, en faisant usage des notations du n° 6,

$$AF'(a) = \int_{-1}^{+1} F_a(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = E\int_{-1}^{+1} \frac{F(a)}{a-x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi E \frac{F(a)}{\sqrt{a^2-1}},$$

où il faut remplacer $\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$ par son développement

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\frac{1}{a^3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{a^5} + \ldots.$$

On trouve facilement

$$E\frac{\cos n\alpha}{\sqrt{a^2-1}} = \frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{n}F'(a),$$

d'où enfin

$$A = \frac{\pi}{n}.$$

On voit qu'ici les coefficients sont tous égaux, et que la formule de quadrature

$$(43)\qquad \int_{-1}^{+1} \varphi(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n}\sum\varphi(a)$$

ou bien

$$(44)\qquad \int_0^\pi \varphi(\cos\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{n}\sum_0^{n-1}\varphi\left(\cos\frac{2k+1}{2n}\pi\right),$$

dont le degré de précision est $2n-1$ comme celui de la formule de Gauss, représente une simple moyenne. M. Hermite en a donné une autre démonstration dans son *Cours d'Analyse*. On peut l'obtenir plus simplement comme il suit. Étant donnée la formule

$$\int_0^\pi \varphi(\cos\theta)\,d\theta = \sum A\varphi(\cos\alpha),$$

si l'on considère que $\cos h\theta$ est une fonction entière de $\cos\theta$, du degré h, les équations de condition ($3\,bis$) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$(45)\quad \sum A = \pi,\quad \sum A\cos h\alpha = \int_0^\pi \cos h\theta\,d\theta = 0,\quad (h=1,2,\ldots,2n-1).$$

On y satisfait en prenant $A=\frac{\pi}{n}$ et $\alpha = \frac{2k+1}{2n}\pi\,(k=0,1,\ldots,n-1)$, car on a

$$(46)\qquad \sin\tfrac{1}{2}y\sum_0^{n-1}\cos(x+ky) = \sin\tfrac{n}{2}y\cos\left(x+\frac{n-1}{2}y\right).$$

Pour $\varphi=\cos 2n\theta$, la correction ε serait $\varepsilon_{2n}=\pi$. Pour $\varphi=\cos^n\theta$, elle serait $\frac{\pi}{2^{2n-1}}$.

16. En nous contentant d'atteindre le degré de précision $2n-1$ avec $n+1$ au lieu de n ordonnées, nous pourrons comprendre parmi les racines les limites 0 et π. Dans ce cas,

$$F(x) = \sqrt{x^2-1}\,D_x^{n-1}(x^2-1)^{n-\frac{1}{2}} = -\frac{1.3\ldots 2n-1}{n}\sin\theta\sin n\theta,$$

ou simplement

$$F(x) = 2\sin\theta\sin n\theta = \cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta,$$

et les racines s'obtiennent en prenant

$$\alpha = \frac{k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Ensuite

$$A = \frac{\pi}{F'(a)} E \frac{2\sin\alpha\sin n\alpha}{\sqrt{a^2-1}} = \frac{\pi\cos n\alpha\sin\alpha}{n\cos n\alpha\sin\alpha + \sin n\alpha\cos\alpha},$$

ou bien

$$A = \frac{\pi}{2n} \text{ pour } k = 0 \text{ et } k = n, \quad A = \frac{\pi}{n} \text{ pour } k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

On trouve ainsi

$$(47) \qquad \int_0^\pi \varphi(\cos\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{n}\left[\frac{\varphi(1)+\varphi(-1)}{2} + \sum_1^{n-1}\varphi\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right],$$

avec le degré de précision $2n-1$. Pour $\varphi = \cos 2n\theta$, la correction ε serait $\varepsilon_{2n} = -\pi$. Cette formule peut aussi se déduire directement des équations (45) et (46). La comparaison de (47) et de (44) donne

$$\sum\cos^{2h}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \sum\cos^{2h}\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad (h < n),$$

les sommes étant prises depuis $k = 0$ jusqu'à $k = n-1$.

17. Si, dans la formule (1), on écrit $x\varphi(x)$ à la place de $\varphi(x)$, elle devient, pour un nombre impair d'ordonnées symétriques ($n = 2i+1$),

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(x)\,x\,dx = \sum A_k a_k[\varphi(a_k) - \varphi(-a_k)],$$

où la somme s'étend depuis $k = 1$ jusqu'à $k = i$, le terme qui dépend de $a_0 = 0$ étant nul. En faisant usage de la méthode de Gauss, le degré de précision sera $4i+1$ par rapport à $x\varphi(x)$ ou bien $4i$ par rapport à $\varphi(x)$. C'est comme si l'on obtenait le degré $4i = 2n$ avec $2i = n$ ordonnées, en faisant dans la formule primitive $A = A_k a_k$ et en donnant le signe — au coefficient de l'ordonnée conjuguée $\varphi(-a_k)$.

Le même raisonnement peut s'appliquer aux formules du type (2), et en particulier à la formule (44), qui devient alors

$$\int_0^\pi \varphi(\cos\theta)\cos\theta\,d\theta = \frac{\pi}{n}\sum \cos\alpha\,\{\varphi(\cos\alpha) - \varphi[\cos(\alpha+\pi)]\},$$

où il faut prendre $n = 2i+1$, et pour α les i premières racines de l'équation $\frac{\cos n\theta}{\cos\theta} = 0$, c'est-à-dire $\alpha = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ $(k = 0, 1, \ldots, i-1)$, pour atteindre le degré $4i$ avec $2i$ ordonnées.

Dans le cas de $n = 3$, on aurait, avec le degré de précision 4,

$$\int_0^\pi \varphi(\cos\theta)\cos\theta\,d\theta = \int_{-1}^{+1} \varphi(x)\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left[\varphi\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \varphi\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)\right].$$

Les deux coefficients ont ici la même valeur numérique, comme dans la formule (44); pour un nombre plus grand d'ordonnées, les coefficients conjugués sont encore égaux et de signes contraires, mais ils n'ont plus tous la même valeur.

18. Lorsqu'on se propose de faire tous les coefficients égaux, il faut, en général, renoncer à atteindre le degré de précision $2n-1$. Nous savons déjà (n° **2**) que, dans le cas où l'on se donne les coefficients de la formule (1), on n'atteint en général que le degré n, ou tout au plus $n+1$ (si n est pair). S'il s'agit d'une formule du type (2), et que $f(x)$ soit une fonction impaire, par exemple $f(x) = x$, on posera

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)x\,dx = A\sum [\varphi(a) - \varphi(-a)], \tag{48}$$

et les équations (3 *bis*) se réduiront aux suivantes,

$$A\sum a^{2h+1} = \frac{1}{2h+3} \quad (h = 0, 1, \ldots i), \tag{49}$$

où les sommes s'étendent depuis a_1 jusqu'à a_i, le nombre des ordonnées étant $n = 2i$. Les équations (49) déterminent les inconnues A, a_1, a_2, ... a_i, et le degré de précision sera $n+2$, puisque l'on a encore

$$A\Sigma(a^{n+2} - a^{n+2}) = 0.$$

En prenant $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, et posant toujours $x = \cos\theta$, $a = \cos\alpha$, la formule devient

$$(50) \qquad \int_0^\pi \varphi(\cos\theta)\cos\theta\, d\theta = A\sum\{\varphi(\cos\alpha) - \varphi[\cos(\alpha+\pi)]\},$$

et le système (49) est remplacé par le suivant :

$$(51) \qquad A\sum a^{2h+1} = \frac{1.3\ldots 2h+1}{2.4\ldots 2h+2}\,\frac{\pi}{2} \quad (h = 0, 1, \ldots, i).$$

19. Mais, avant de nous occuper de la résolution des équations (49) et (51), considérons la formule plus générale

$$\int_0^\pi \varphi(\cos\theta)\cos\lambda\theta\, d\theta = \sum A\,\varphi(\cos\alpha),$$

dont la formule ci-dessus n'est qu'un cas particulier. En posant

$$\varphi(\cos\theta) = \cos h\theta,$$

comme nous l'avons fait précédemment (n° **15**), les équations de condition deviennent

$$\sum A\cos h\alpha = \int_0^\pi \cos h\theta\cos\lambda\theta\, d\theta = 0 \quad (h \gtrless \lambda),$$
$$\sum A\cos\lambda\alpha = \frac{\pi}{2} \quad (h = \lambda).$$

Dans le cas de $\lambda = 0$, la dernière équation devient $\Sigma A = \pi$, et nous retrouvons la formule (44). Je supposerai donc ici que λ est un nombre entier, différent de zéro.

En prenant tous les A égaux, mais avec des signes alternants, nous aurons

$$(52)\qquad \begin{cases} \Sigma \pm \cos h\alpha = 0 \quad (h \lessgtr \lambda), \\ A\sum \pm \cos\lambda\alpha = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

On peut satisfaire à ces conditions en posant $n = 2i\lambda$, et

$$\alpha = \frac{\alpha_p + k\pi}{\lambda} \quad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \ldots, 2\lambda - 1 \\ p = 1, 2, \ldots, i \end{pmatrix}.$$

En effet, quand h n'est pas un multiple de λ, on aura, en vertu de (46),

$$\sum_{k=0}^{k=\lambda-1} \cos h \frac{\alpha_p + 2k\pi}{\lambda} = \sum_{k=0}^{k=\lambda-1} \cos h \frac{\alpha_p + (2k+1)\pi}{\lambda} = 0,$$

quel que soit α_p; par conséquent $\Sigma \pm \cos h\alpha = 0$ pour chacune des racines α_p, puisque la somme des termes affectés du signe $+$ s'évanouit aussi bien que celle des termes affectés du signe $-$. Si h est un multiple pair de λ, $\Sigma \pm \cos h\alpha$ s'annule parce que tous les termes ont la même valeur numérique. Reste le cas où h est un multiple impair de λ, $h = \lambda$, 3λ, 5λ, ... Dans ce cas, $\Sigma \pm \cos h\alpha$ devient $2\lambda\Sigma\cos\alpha_p$, $2\lambda\Sigma\cos 3\alpha_p$, ..., et l'on a, pour déterminer les inconnues A, α_1, α_2, ..., α_i, le système d'équations

$$(53)\qquad \begin{cases} \Sigma\cos 3\alpha_p = \Sigma\cos 5\alpha_p = \ldots = \Sigma\cos(2i+1)\alpha_p = 0, \\ A\sum \cos\alpha_p = \frac{\pi}{4\lambda}. \end{cases}$$

Comme la dernière valeur de h pour laquelle $\Sigma \pm \cos h\alpha$ s'annule encore est $h = (2i+3)\lambda - 1$, le degré de précision de la formule sera $(2i+3)\lambda - 1 = n + 3\lambda - 1$. La formule elle-même peut s'écrire

$$(54)\qquad \int_0^\pi \varphi(\cos\theta)\cos\lambda\theta\, d\theta = A\sum_{p=1}^{p=i} \sum_{k=0}^{k=2\lambda-1} (-1)^k \varphi\left(\cos\frac{\alpha_p + k\pi}{\lambda}\right).$$

M. Tchebychef [1] est arrivé à la même formule par une autre mé-

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1873.

thode, sur laquelle nous reviendrons plus loin. On voit que les racines α_p sont indépendantes de λ et qu'elles ne dépendent que du nombre $2i$, qui est le nombre des ordonnées dans le cas le plus simple ($\lambda = 1$), où la formule coïncide avec (50).

Pour $i = 1$, on aura évidemment

$$\alpha = \frac{\pi}{6},$$

par suite

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad A = \frac{\pi}{6}\sqrt{3},$$

et la formule (50) deviendra

$$\int_0^\pi \varphi(\cos\theta)\cos\theta\, d\theta = \frac{\pi}{6}\sqrt{3}\left[\varphi\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\right] \text{ (degré de pr., 4).}$$

Pour $i = 2$ (quatre ordonnées; degré de précision, 6), on aura les équations de condition

$$\cos 3\alpha_1 + \cos 3\alpha_2 = \cos 5\alpha_1 + \cos 5\alpha_2 = 0,$$

qui admettent les deux solutions

$$\begin{array}{cc|cc} \alpha_2 + \alpha_1 = \frac{\pi}{3}, & \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{5} & \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{3}, & \alpha_2 + \alpha_1 = \frac{3\pi}{5}, \\ \alpha_1 = \frac{1}{15}\pi, & \alpha_2 = \frac{4}{15}\pi & \alpha_1 = \frac{2}{15}\pi, & \alpha_2 = \frac{7}{15}\pi. \end{array}$$

Par conséquent,

$$\alpha_1 = 12^\circ, \quad \alpha_2 = 48^\circ,$$

ou bien

$$\alpha_1 = 24^\circ, \quad \alpha_2 = 84^\circ.$$

En même temps,

$$A = \frac{\pi}{8\cos 30^\circ . \cos 18^\circ} \quad \text{ou bien} \quad \frac{\pi}{8\cos 30^\circ . \cos 54^\circ}.$$

Pour $i = 3$ (six ordonnées; degré de précision, 8), on aura les équations

$$\Sigma\cos 3\alpha = \Sigma\cos 5\alpha = \Sigma\cos 7\alpha = 0,$$

qui admettent les quatre solutions

$\alpha_1 = 11°.40'.13'',3$	$11°.59'.31'',1$	$19°.40'.19'',9$	$22°.43'.29'',0$
$\alpha_2 = 26.56.11,6$	$41.55.40,4$	$65.26.17,5$	$46.49.15,3$
$\alpha_3 = 56.\ 3.22,5$	$85.40.29,2$	$98.48.23,7$	$142.\ 9.\ 9,3$
$\Sigma\cos\alpha = 2,429218$	$1,797581$	$1,204209$	$0,817005$

20. Revenons à nos systèmes d'équations du n° **16**. Si d'abord on fait $A = B = C = \ldots$ dans la formule (1), l'équation $\Sigma A = 2$ donne $A = \frac{2}{n}$, et la formule devient

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx = \frac{2}{n}\sum\varphi(a).$$

Les abscisses sont déterminées par le système d'équations

$$(55)\qquad \sum a^2 = \frac{n}{6},\quad \sum a^4 = \frac{n}{10},\quad \ldots,\quad \sum a^{2i} = \frac{n}{4i+2}\quad (n = 2i \text{ ou } 2i+1),$$

où les sommes s'étendent depuis a_1 jusqu'à a_i; dans le cas de $n = 2i+1$, il faut ajouter la racine $a_0 = 0$. Soient maintenant $p_1, p_2, \ldots$ les coefficients de l'équation

$$F(x) = x^n - p_1 x^{n-2} + p_2 x^{n-4} - \ldots = 0.$$

En posant $\Sigma a^{2m} = s_m$, on aura les relations connues

$$p_1 = s_1,\quad 2p_2 = s_1^2 - s_2,\quad 2.3p_3 = s_1^3 - 3s_1 s_2 + s_3,\quad \ldots,$$

et l'élimination donnera

$$(56)\quad \begin{cases} x^n - \dfrac{n}{6}x^{n-2} + \left(\dfrac{n^2}{72} - \dfrac{n}{20}\right)x^{n-4} - \left(\dfrac{n^3}{1296} - \dfrac{n}{120} + \dfrac{n}{42}\right)x^{n-6} \\ \qquad + \left(\dfrac{n^4}{31104} - \dfrac{n^3}{1440} + \dfrac{263\,n^2}{50400} - \dfrac{n}{72}\right)x^{n-8} - \ldots = 0. \end{cases}$$

On trouve ainsi, pour $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$,

$$x^2 - \frac{1}{3} = 0,$$

$$x^3 - \frac{1}{2}x = 0,$$

$$x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{45} = 0,$$

$$x^5 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{7}{72}x = 0,$$

$$x^6 - x^4 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{105} = 0,$$

$$x^7 - \frac{7}{6}x^5 + \frac{119}{360}x^3 - \frac{149}{6480}x = 0,$$

$$x^8 - \frac{4}{3}x^6 + \frac{22}{45}x^4 - \frac{148}{2835}x^2 - \frac{43}{42525} = 0,$$

$$x^9 - \frac{3}{2}x^7 + \frac{27}{40}x^5 - \frac{57}{560}x^3 + \frac{53}{22400}x = 0.$$

Pour $n = 2$ (degré de précision, 3), on retombe sur la méthode de Gauss $\left(a = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$. Pour $n = 3$ (degré de précision, 3), nous avons $a_0 = 0$, $a_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, et la formule devient

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx = \frac{2}{3}\left[\varphi(0) + \varphi\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) + \varphi\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right].$$

Pour $n = 4$ et $n = 5$, le degré de précision est 5, et les racines sont, d'une part $\pm\sqrt{\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{5}}}$ et de l'autre 0 et $\pm\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{11}}{12}}$.

Voici les valeurs des racines, calculées avec six décimales, depuis $n = 2$ jusqu'à $n = 9$. Pour $n = 8$, elles sont en partie imaginaires. Les corrections ε ont été déterminées par la formule

$$\varepsilon_{n+m} = \int_{-1}^{+1} x^m\,F(x)\,dx \quad (m = 2 \text{ pour } n = 2i, \quad m = 1 \text{ pour } n = 2i+1$$

	a.		1 − a,	A.	α.	ε(± 1).	ε(0 et 1).
$n = 2\ldots$	0,211325		0,788675	$\frac{1}{2}$	±0,577350	$\varepsilon_4 = \frac{8}{45} = 0,1778$	$\frac{1}{180} = 0,00555$
$n = 3\ldots$	0,146447	0,5	0,853553	$\frac{1}{3}$	±0,707107 et 0	$\varepsilon_4 = \frac{1}{15} = 0,0667$	$\frac{1}{480} = 0,00208$
$n = 4\ldots$	0,102673		0,897327	$\frac{1}{4}$	±0,794654	$\varepsilon_6 = \frac{32}{945} = 0,0339$	$\frac{1}{3780} = 0,00026$
	0,406204		0,593796		±0,187592		
$n = 5\ldots$	0,083751		0,916249	$\frac{1}{5}$	±0,832498	$\varepsilon_6 = \frac{13}{756} = 0,0172$	$\frac{13}{96768} = 0,000134$
	0,312729	0,5	0,687271		±0,374541 et 0		
$n = 6\ldots$	0,066877		0,933123	$\frac{1}{6}$	±0,866247	$\varepsilon_8 = \frac{16}{1575} = 0,01016$	$\frac{1}{50400} = 0,000020$
	0,288741		0,711259		±0,422519		
	0,366682		0,633318		±0,266635		
$n = 7\ldots$	0,058069		0,941931	$\frac{1}{7}$	±0,883862	$\varepsilon_8 = \frac{281}{48600} = 0,00578$	$\frac{281}{24883200} = 0,000011$
	0,235172		0,764828		±0,529657		
	0,338044	0,5	0,661956		±0,323912 et 0		
$n = 8\ldots$	0,049253		0,950747	$\frac{1}{8}$	±0,901494	$\varepsilon_{10} = \frac{1024}{280665} = 0,00365$	$\frac{1}{561330} = 0,0000018$
	$0,23971 \pm 0,02422\sqrt{-1}$				$\pm 0,52057 \pm 0,04844\sqrt{-1}$		
	$0,76029 \pm 0,02422\sqrt{-1}$				$\pm 0,129046\sqrt{-1}$		
	$0,5 \pm 0,064523\sqrt{-1}$						
$n = 9\ldots$	0,044205		0,955795	$\frac{1}{9}$	±0,911589	$\varepsilon_{10} = \frac{163}{73920} = 0,00221$	$\frac{163}{151388160} = 0,0000011$
	0,199491		0,800509		±0,601019		
	0,235619		0,764381		±0,528762		
	0,416047	0,5	0,583953		±0,167906		

Supposons maintenant que la dernière racine a_i soit donnée d'avance; on aura $F(x) = (x^2 - a_i^2) F_1(x)$, et le degré de précision sera diminué de deux unités, car la dernière équation du système (55) ne sera plus satisfaite. Mais les coefficients de la nouvelle équation $F(x) = 0$ seront les mêmes que précédemment, sauf le dernier p_i, puisqu'ils sont déterminés par les mêmes relations linéaires; on trouvera donc $F_1(x)$ en cherchant le quotient $E\frac{F(x)}{x^2 - a_i^2}$, où $F(x)$ se déduit de (56).

En prenant $a_2 = 1$, on trouverait ainsi, pour $n = 4$,

$$F_1(x) = E\frac{x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{45}}{x^2 - 1} = x^2 + \frac{1}{3};$$

la racine a_1 serait donc imaginaire. Mais, en prenant, par exemple,

$a_2 = \frac{2}{3}$, on trouverait

$$a_1 = \frac{1}{3}\sqrt{2}.$$

Comme le fait remarquer M. Tchebychef dans le Mémoire déjà cité, les formules de quadrature à coefficients égaux offriront un avantage marqué dans les cas où les ordonnées $\varphi(a)$ sont des données expérimentales affectées d'erreurs inconnues, car la somme des carrés des erreurs sera un minimum en prenant tous les coefficients égaux.

21. Considérons maintenant les formules du type (2) dans lesquelles $f(x)$ est une fonction impaire. Elles exigent la résolution des systèmes d'équations (49) ou (51). En désignant par s, s_3, s_5, ... les sommes des puissances impaires des racines a_1, a_2, ..., a_i, ces deux systèmes peuvent s'écrire

$$(57) \qquad \frac{1}{A} = 3s = 5s_3 = 7s_5 = \ldots = (n+3)\,s_{n+1}$$

et

$$(58) \qquad \frac{\pi}{4A} = \quad s = \frac{4}{3}s_3 = \frac{8}{5}s_5 = \ldots = \frac{4.6\ldots(n+2)}{3.5\ldots(n+1)}\,s_{n+1}.$$

Les quantités $a_1, \ldots, a_i$ seront les racines d'une équation du degré i,

$$x^i - p_1 x^{i-1} + p_2 x^{i-2} - \ldots = 0,$$

et nous allons voir que les coefficients de cette équation peuvent être exprimés en fonction des sommes s, s_3, s_5, ... En effet, soit

$$\Delta_m = \frac{1}{m}(s^m - s_m).$$

La formule bien connue

$$s_m - p_1 s_{m-1} + p_2 s_{m-2} - \ldots \pm m p_m = 0$$

conduit aux relations suivantes :

$$\begin{aligned}
s &= p_1,\\
\Delta_3 &= p_1 p_2 - p_3,\\
\Delta_5 &= (p_1^2 - p_2)\Delta_3 + p_1 p_4 - p_5,\\
\Delta_7 &= (p_1^2 - p_2)\Delta_5 + (p_1 p_3 - p_4)\Delta_3 + p_1 p_6 - p_7,\\
-\frac{1}{3}\Delta_3^3 + \Delta_9 &= (p_1^2 - p_2)\Delta_7 + (p_1 p_3 - p_4)\Delta_5 + (p_1 p_5 - p_6)\Delta_3 + p_1 p_8 - p_9,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

(Le terme $-\frac{1}{3}\Delta_3^3$ s'ajoute ici à Δ_9, parce que 9 n'est pas un nombre premier; il résulte, en effet, du théorème de Fermat qu'en posant $a_1 = a_2 = \ldots = 1$, d'où $s = s_3 = \ldots = i$, Δ_m ne peut être un nombre entier que si m est premier).

Comme on a encore, en vertu de (57),

$$3\Delta_3 = s\left(s^2 - \frac{3}{5}\right), \quad 5\Delta_5 = s\left(s^4 - \frac{3}{7}\right), \quad \cdots,$$

on voit que les relations ci-dessus permettent d'exprimer les coefficients $p_2, p_3, \ldots$ en fonction de s. L'élimination donne ensuite une équation qui détermine s, et à chaque valeur de s correspond un système de racines $a_1, \ldots, a_i$ avec un coefficient A.

Pour $i = 1$ ($n = 2$), le système (57) devient

$$\frac{1}{A} = 3a = 5a^3,$$

d'où

$$a = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

et

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)x\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\left[\varphi\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) - \varphi\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]\ldots \quad \text{(degr. de pr. 4)}.$$

Pour $i = 2$ ($n = 4$), nous aurons d'abord

$$\Delta_3 = sp_2, \quad \Delta_5 = (s^2 - p_2)\Delta_3,$$

d'où

$$s\Delta_5 - s^3\Delta_3 + \Delta_3^2 = 0,$$

ou bien, en tenant compte des relations $3s = 5s_3 = 7s_5$,

$$s^4 - 3s^2 + \frac{72}{35} = 0,$$

puis

$$x^2 - sx + \frac{s^2}{3} - \frac{1}{5} = 0.$$

On tire de là ces deux systèmes de valeurs :

$s\ = 1,0299733$	$1,3925355$
$a_1 = 0,8490469$	$0,8922365$
$a_2 = 0,1809264$	$0,5002990$
$A\ = 0,3236330$	$0,2393715$

et la formule devient

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)x\,dx = A[\varphi(a_1) - \varphi(-a_1) + \varphi(a_2) - \varphi(-a_2)] \quad \text{(degr. de pr. 6)}.$$

Soit encore $n = 6$. Nous aurons

$$\Delta_3 = sp_2 - p_3, \quad \Delta_5 = (s^2 - p_2)\Delta_3, \quad \Delta_7 = (s^2 - p_2)\Delta_5 + sp_3\Delta_3$$

et, en éliminant p_2, p_3,

$$\Delta_3\Delta_7 - \Delta_5^2 + s^2\Delta_3\Delta_5 - s^4\Delta_3^2 + s\Delta_3^3 = 0,$$

d'où l'on tire, en tenant compte des relations $3s = 5s_3 = 7s_5 = 9s_7$,

$$\begin{cases} s^8 - 9s^6 + 27s^4 - \dfrac{159}{5}s^2 + \dfrac{72}{7} = 0, \\ x^3 - sx^2 + s^2x - s^3 - (x - s)\dfrac{\Delta_5}{\Delta_3} + \Delta_3 = 0. \end{cases}$$

En conservant seulement les racines réelles, on aura les deux systèmes

$s\ = 2,084445$	$0,711819$
$a_1 = 0,929306$	$+0,862970$
$a_2 = 0,712155$	$-0,763695$
$a_3 = 0,442984$	$+0,612544$
$A\ = 0,159915$	$0,468284$

Pour $n = 8$, on trouve

$$\frac{\Delta_3\Delta_9 - \Delta_5\Delta_7 - \frac{1}{3}\Delta_3^4}{\Delta_3\Delta_7 - \Delta_5^2} = s^2 + \frac{s\Delta_7 - s^3\Delta_5 + \Delta_5\Delta_3}{s\Delta_5 - s^3\Delta_3 + \Delta_3^2},$$

et l'équation en s est du quatorzième degré.

Les constantes du système (58) se déterminent de la même manière, il n'y a de changé que les coefficients numériques des équations. Pour $n = 2$, on a

$$\frac{\pi}{4A} = a = \frac{4}{3}a^3,$$

d'où

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \cos 30^\circ, \quad A = \frac{\pi}{6}\sqrt{3},$$

comme plus haut (n° **19**). Pour $n = 4$, on trouve

$$\begin{cases} s^4 - \dfrac{15}{4}s^2 + \dfrac{45}{16} = 0, \\ x^2 - sx + \dfrac{1}{3}s^2 - \dfrac{1}{4} = 0, \end{cases}$$

d'où

$$s^2 = \frac{3}{8}(5 \pm \sqrt{5}), \quad A = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{5 \mp \sqrt{5}}{30}},$$

puis, en prenant le signe supérieur,

$$a = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{32}} \pm \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{32}} = \cos 12^\circ \text{ et } \cos 48^\circ,$$

et, en prenant le signe inférieur,

$$a = \sqrt{\frac{15 - 3\sqrt{5}}{32}} \pm \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{32}} = \cos 24^\circ \text{ et } \cos 84^\circ,$$

comme au n° **19**. Pour $n = 6$, on a

$$\begin{cases} s^6 - \dfrac{45}{4}s^6 + \dfrac{5.63}{8}s^4 - \dfrac{25.63}{32}s^2 + \dfrac{25.189}{256} = 0, \\ x^3 - sx^2 + s^2x - s^3 - (x - s)\dfrac{\Delta_1}{\Delta_3} + \Delta_3 = 0, \end{cases}$$

et ces équations admettent les quatre solutions déjà indiquées au n° **19**.

22. Voici, en peu de mots, la méthode par laquelle M. Tchebychef détermine les racines a dans le cas des coefficients égaux. En faisant $A = B = C = \ldots = \frac{2}{n}$, l'équation (6) devient

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{z - x} = \frac{2}{n} \sum \frac{1}{z - a} + \frac{\varepsilon_p}{z^{p+1}} + \ldots.$$

Multipliée par dz et intégrée, elle donne

$$\log z - \frac{1}{2.3.z^2} - \frac{1}{4.5.z^4} - \frac{1}{6.7.z^6} - \ldots = \frac{1}{n} \log F(z) - \frac{1}{2p} \frac{\varepsilon_p}{z^p} - \ldots;$$

par suite,

$$F(z) = z^n e^{-\frac{n}{2.3.z^2} - \frac{n}{4.5.z^4} - \ldots + \frac{\lambda}{z^p} + \ldots},$$

où $\lambda = \frac{n}{2p} \varepsilon_p$, et, puisque $F(z)$ est une fonction entière,

$$F(z) = E z^n e^{-\frac{n}{2.3.z^2} - \frac{n}{4.5.z^4} - \ldots}, \tag{59}$$

car les termes qui proviennent des corrections ε ne fourniraient que des puissances négatives, p étant au moins égal à $n + 1$ quand on fait $A = B = C = \ldots$. L'équation qu'on obtient en développant (59) coïncide avec notre équation (56).

S'il s'agit d'une formule du type (2), on aura d'abord

$$A = B = \ldots = \frac{1}{n} \int_{-1}^{+1} f(x) dx,$$

puis, en écrivant $f(x)dx$ à la place de dx dans l'équation (6) et en intégrant par rapport à z,

$$\int_{-1}^{+1} f(x) \log(z - x) dx = A \log F(z) - \frac{1}{p} \frac{\varepsilon_p}{z^p} - \ldots,$$

d'où enfin

$$F(z) = E e^{\frac{1}{A} \int_{-1}^{+1} f(x) \log(z - x) dx}. \tag{60}$$

En faisant $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, on trouve

$$F(z) = E(z + \sqrt{z^2 - 1})^n = 2\cos(n \arccos z),$$

et l'on retombe sur la formule (44).

L'équation (60) cesse d'être applicable si $f(x)$ est une fonction impaire, puisqu'on trouverait alors $A = 0$. Nous savons déjà que, dans ce cas, on doit prendre un nombre pair d'ordonnées et donner à la moitié des coefficients le signe négatif.

En posant $F_1 = (z - a_1)\ldots(z - a_i)$, $F_2 = (z + a_1)\ldots(z + a_i)$ et $F(z) = F_1 F_2$, l'équation (6) donne ici

$$(61) \qquad \int_{-1}^{+1} f(x)\log(z - x)\,dx = A\log\frac{F_1}{F_2} - \frac{1}{p}\frac{\varepsilon_p}{z^p} - \ldots,$$

où $p = n + 3$. Par suite,

$$(62) \qquad \frac{F_1}{F_2} = e^{\frac{1}{A}\int_{-1}^{+1} f(x)\log(z-x)\,dx},$$

en laissant de côté les termes qui proviennent des ε. La suppression de ces termes se justifie en remarquant que l'équation (62) peut s'écrire

$$\frac{C_1}{z} + \frac{C_3}{z^3} + \ldots = A\log\frac{1 + \frac{p_1}{z} + \frac{p_2}{z^2} + \ldots}{1 - \frac{p_1}{z} + \frac{p_2}{z^2} - \ldots} + \frac{1}{p}\frac{\varepsilon_p}{z^p} + \ldots,$$

où $C_m = \frac{1}{m}\int_{-1}^{+1} f(x)x^m\,dx$, et qu'en comparant les coefficients de $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z^3}$, $\ldots$, $\frac{1}{z^{n+1}}$ à droite et à gauche, on obtient $i + 1$ relations qui déterminent les $i + 1$ inconnues $A, p_1, \ldots, p_i$, de sorte que les termes qui suivent $\frac{1}{z^{n+1}}$ peuvent être omis.

M. Tchebychef détermine les inconnues en développant le membre droit de l'équation (62) en fraction continue et en égalant à zéro le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le quotient complet de la réduite dont les termes sont du degré i, comme F_1 et F_2. Dans le cas de $f(x) = x$, on a

$$C_m = \frac{2}{m(m+2)},$$

et il s'agit de développer en fraction continue l'expression

$$e^{-\frac{2}{A}\left(\frac{1}{3z}+\frac{1}{15z^3}+\frac{1}{35z^5}+\dots\right)}.$$

Pour $n = 2$, elle devient

$$1 - \frac{2}{3Az + 1 - \frac{1}{5Az}\left(3A^2 - \frac{5}{9}\right)} = \frac{3Az - 1}{3Az + 1}$$

en posant $3A^2 - \frac{5}{9} = 0$, d'où $A = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}$; ensuite

$$F_1 = 3Az - 1, \quad F_2 = 3Az + 1.$$

Pour $n = 4$, on trouve de la même manière

$$5832A^4 - 945A^2 + 35 = 0, \quad 135A^2z^2 \pm 45Az - 27A^2 + 5 = 0,$$

et ces équations donnent pour le coefficient A et pour les abscisses a_1, a_2 les mêmes nombres que nous avons trouvés par la résolution du système (57).

Dans le cas de $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, on trouverait, pour $n = 2$,

$$12\left(\frac{A}{\pi}\right)^2 - 1 = 0, \quad \frac{4A}{\pi}z \pm 1 = 0,$$

et, pour $n = 4$,

$$720\left(\frac{A}{\pi}\right)^4 - 60\left(\frac{A}{\pi}\right)^2 + 1 = 0, \quad 48\left(\frac{Az}{\pi}\right)^2 \pm 12\frac{Az}{\pi} - 12\left(\frac{A}{\pi}\right)^2 + 1 = 0,$$

et ces équations donnent les mêmes résultats que notre système (58).

23. Un moyen très simple de diminuer l'erreur de la formule (1) consiste à partager l'intégrale proposée en plusieurs autres, auxquelles on l'applique séparément. Comme nous l'avons vu, cette transformation ne change pas le degré de précision de la formule, mais la correction ε_p est réduite dans le rapport de 1 à $\frac{1}{\mu^p}$ si l'intervalle $1 - 0$ est partagé en μ parties égales. La formule devient alors

$$(63) \qquad \int_0^1 \varphi(x)dx = \frac{1}{\mu} \sum_{i=0}^{i=\mu-1} \sum A\varphi\left(\frac{i+a}{\mu}\right).$$

La règle de Simpson se déduit ainsi de la formule de Cotes à trois ordonnées, dont le degré de précision est 3. On a ici

$$a = 0, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = 1, \quad A = C = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{2}{3};$$

par suite, au moyen de $2\mu+1$ ordonnées équidistantes, en faisant $y_0 = \varphi(0), y_h = \varphi\left(\frac{h}{2\mu}\right), y_{2\mu} = \varphi(1)$,

$$(64) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 y\,dx = \frac{1}{6\mu}[y_0 + y_{2\mu} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2\mu-2}) \\ \qquad\qquad + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2\mu-1})], \end{cases}$$

et la correction ε_4 de la formule de Cotes $\left(\varepsilon_4 = -\frac{1}{120}\right)$ se trouve ainsi réduite à $-\frac{1}{120\mu^4}$.

M. Y. Villarceau a proposé d'utiliser de la même manière la formule de Cotes à cinq ordonnées, dont le degré de précision est 5. On a ici les abscisses $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ et les coefficients $\frac{7}{90}, \frac{32}{90}, \frac{12}{90}$; par suite, au moyen de $4\mu+1$ ordonnées équidistantes,

$$(65) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \varphi(x)dx = \frac{1}{90\mu}[7(y_0 + y_{4\mu}) + 14(y_4 + y_8 + \ldots + y_{4\mu-4}) \\ \qquad\qquad + 12(y_2 + y_6 + \ldots + y_{4\mu-2}) \\ \qquad\qquad + 32(y_1 + y_3 + \ldots + y_{4\mu-1})] \end{cases}$$

et la correction $\varepsilon_6 = -\frac{1}{2688}$ est réduite à $-\frac{1}{2688\mu^6}$.

Il serait facile de multiplier le nombre de ces formules mixtes, en renonçant aux ordonnées équidistantes. Remarquons, par exemple, qu'en prenant tous les coefficients égaux on obtient le degré de précision 5 avec quatre ordonnées dont les abscisses diffèrent très peu de 0,1, 0,4, 0,6, 0,9. Si l'on fait rigoureusement $x = \frac{1}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{9}{10}$, on n'atteint que le degré de précision 3 $\left(\text{avec } A = \frac{22}{90}, B = \frac{23}{90}\right)$; cependant la formule est encore *presque* exacte pour $\varphi(x) = x^4$. On a, en effet, en posant $\varphi\left(\frac{h}{10}\right) = y_h$,

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \frac{1}{4}(y_1 + y_4 + y_6 + y_9) + \frac{1}{180}(y_4 + y_6 - y_1 - y_9) - \frac{k_4}{15000} - \frac{k_5}{6000} - \dots$$

Si maintenant on partage l'intervalle $1 - 0$ en deux parties égales, on trouve, en posant

$$\varphi\left(\frac{h}{20}\right) = y_h, \quad M_1 = \frac{1}{4}(y_4 + y_6 + y_{14} + y_{16}),$$

$$M_2 = \frac{1}{4}(y_1 + y_9 + y_{11} + y_{19}),$$

$$(66) \qquad \left\{ \begin{aligned} \int_0^1 \varphi(x)\,dx &= \frac{1}{2}(M_1 + M_2) + \frac{1}{90}(M_1 - M_2) \\ &\quad - \frac{k_4}{240000} - \frac{k_5}{96000} - \dots \end{aligned} \right.$$

En partant de la formule de Gauss pour $n = 2$, on aurait

$$(67) \qquad \left\{ \begin{aligned} \int_0^1 \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2\mu}\sum_0^{\mu-1} \Bigg[&\varphi\left(\frac{2i + 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}}{2\mu}\right) \\ &+ \varphi\left(\frac{2i + 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}}{2\mu}\right)\Bigg] + \frac{k_4}{180\mu^4} + \dots \end{aligned} \right.$$

Cette formule donne la valeur approchée de l'intégrale par une simple moyenne; on peut l'écrire

$$\int_0^1 \varphi(x)dx = \frac{1}{2\mu}(y_1 + y_2 + \ldots + y_{2\mu}) + k_4\varepsilon_4 + \ldots.$$

Voici les valeurs des abscisses pour $\mu = 2$ et $\mu = 5$:

$$2\mu = 4 \left\{ \begin{array}{ll} 0,105662 & 0,394338 \\ 0,605662 & 0,894338 \end{array} \right. \qquad 2\mu = 10 \left\{ \begin{array}{ll} 0,0422650 & 0,1577350 \\ 0,2422650 & 0,3577350 \\ 0,4422650 & 0,5577350 \\ 0,6422650 & 0,7577350 \\ 0,8422650 & 0,9577350 \end{array} \right.$$

$$\varepsilon_4 = +\frac{1}{2880}, \qquad \varepsilon_4 = +\frac{1}{112500}.$$

24. Pour montrer par un exemple le degré d'approximation qu'on peut atteindre avec ces formules, appliquons-les à l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \log 2 = 0,6931471 8056\ldots.$$

Voici les valeurs approchées de cette intégrale, calculées par les formules suivantes :

	Ordonnées.		Erreur de la 8e déc.	Degré de précision.
Cotes	8	0,69314773.3	+ 55.3	7
»	9	0,69314721.5	+ 3.4	9
»	10	0,69314720.28	+ 2.22	9
»	11	0,69314718.20	+ 0.14	11
Simpson	9	0,69315453	+ 735	3 avec 4 divis.
Villarceau	9	0,69314790	+ 72	5 avec 2 divis.
»	13	0,69314725.3	+ 7.2	5 avec 3 divis.
Form. (66) ...	8	0,69314755.1	+ 37.0	3 avec 2 divis.
Gauss	3	0,69312169.3	−2548.7	5
»	5	0,69314715.78	− 2.27	9
Form. (24^{bis}) ..	4	0,69318181.8	+3463.8	5
» ..	5	0,69314814.8	+ 96.8	7

	Ordonnées.		Erreur de la 8e déc.	Degré de précision.
Form. (24^{bis})...	6	0,69314720.81	+ 2.75	9
» ...	7	0,69314718.14	+ 0.08	11
» ...	7	0,69314809.9	+ 91.8	5 avec 2 divis.
» ...	10	0,69314727.4	+ 9.3	5 avec 3 divis.
Tchebychef....	4	0,69312796.2	−1921.8	5
»	8	0,69314667.0	− 51.0	5 avec 2 divis.

Nous avons déjà vu (nº **10**) que l'erreur de la formule de Gauss et celle de la formule (24 *bis*) étaient à peu près du même ordre, mais de signes contraires, et que la moyenne $\frac{(n+1)G+nF}{2n+1}$ fournissait un résultat beaucoup plus approché. En effet, nous avons ici :

		Erreur.
G., 3 ordonnées........	0,69312169.3	−2548.7
G., 4 »	0,69318181.8	+3463.8
$\frac{4G+3F}{7}$..............	0,69314746.1	+ 28.1
G., 5 ordonnées........	0,69314715.785	− 2.271
F., 6 »	0,69314720.812	+ 2.756
$\frac{6G+5F}{11}$..............	0,69314718.070	+ 0.014

La formule de M. Tchebychef (à coefficients égaux), qui coïncide avec celle de Gauss pour $n=1$ et $n=2$, et la formule de Cotes (à ordonnées équidistantes), qui coïncide avec (24 *bis*) pour $n=2$ et $n=3$, sont dans un rapport analogue, mais moins bien caractérisé. Leurs corrections ε ont des signes contraires':

Tchebychef.		Cotes.		
$n=2$....	$\varepsilon_4=\frac{1}{180}$	$n=3$....	$(\varepsilon_4)=-\frac{1}{120}$	$=-\frac{3}{2}\varepsilon_4$
$n=3$....	$\varepsilon_4=\frac{1}{480}$	$n=4$....	$(\varepsilon_4)=-\frac{1}{270}$	$=-\frac{16}{9}\varepsilon_4$
$n=4$....	$\varepsilon_6=\frac{1}{3780}$	$n=5$....	$(\varepsilon_6)=-\frac{1}{2688}$	$=-1{,}41\,\varepsilon_6$
$n=5$....	$\varepsilon_6=\frac{13}{96768}$	$n=6$....	$(\varepsilon_6)=-\frac{11}{52500}$	$=-1{,}56\,\varepsilon_6$

On trouve ainsi :

			Erreur.
Tchéb.,	4 ordonnées.....	0,69312796.2	— 1921.8
Cotes,	5 »	0,69317460.3	+ 2742.3
$\dfrac{7T+5C}{12}$	....	0,69314739.6	+ 21.6