JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. DARBOUX

Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 2 (1876), p. 291-312.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1876_3_2__291_0>

Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable;

PAR M. G. DARBOUX.

I.

On donne ordinairement, dans les cours de Calcul infinitésimal, différentes formes du reste de la série de Taylor qui s'appliquent seulement au cas où la variable suivant les puissances de laquelle on développe demeure réelle. Je vais d'abord montrer que les mêmes formes demeurent applicables avec de très-légères modifications, quand la variable et la fonction prennent des valeurs imaginaires.

Je m'appuierai sur le lemme suivant :

Imaginons qu'un mobile M *se déplace sur la droite* AB, *toujours dans le même sens, de* A *vers* B *par exemple; et qu'un point m dont le mouvement est lié à celui du premier décrive d'un mouvement continu une courbe acb quand le point* M *va de* A *à* B. *Je dis qu'il y aura au moins une position des points correspondants* M, *m pour laquelle le rapport des chemins infiniment petits* ds_1, $d\rho_1$ *décrits en même temps,* ds_1 *par le point m,* $d\rho_1$ *par le point* M, *sera supérieur ou égal au rapport de la corde ab à la droite* AB.

En effet, si l'on avait toujours

$$\frac{ds_1}{d\rho_1} < \frac{ab}{\mathrm{AB}}, \quad ds_1 < \frac{ab}{\mathrm{AB}}\, d\rho_1$$

on aurait, en intégrant entre les limites extrêmes,

$$\operatorname{arc} acb < \frac{ab}{\mathrm{AB}} \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} d\rho_1 \quad \text{ou} \quad \operatorname{arc} acb < ab,$$

ce qui est évidemment absurde.

Le lemme est donc démontré. Nous ferons remarquer que, si la démonstration suppose que M se meuve toujours dans le même sens, elle demeure valable alors même que le point m rétrograderait sur la courbe qui lui sert de trajectoire, l'intégrale $\int ds_1$ représentant la longueur totale du chemin décrit par le point m, et cette longueur totale étant toujours supérieure à la corde ab.

Imaginons que les points M, m servent de représentation à deux fonctions de variables imaginaires : M a une fonction $\varphi(z)$, m a une autre fonction $f(z)$. Admettons que, lorsque z varie de z_0 à z_1 d'une manière déterminée, le point M, qui représente $\varphi(z)$, décrive un segment de droite AB toujours dans le même sens. On aura ici

$$\frac{ab}{\mathrm{AB}} = \mathrm{mod.}\frac{f(z_1)-f(z_0)}{\varphi(z_1)-\varphi(z_0)}.$$

Quant au rapport $\frac{ds_1}{d\rho_1}$, il est évidemment égal à

$$\mathrm{mod.}\frac{f'(z)}{\varphi'(z)}.$$

Il existe donc, d'après le lemme, au moins une valeur ξ de z, correspondant à une valeur de $\varphi(z)$, représentée par un point M du segment AB, pour laquelle on a

$$\mathrm{mod.}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \geq \mathrm{mod.}\frac{f(z_1)-f(z_0)}{\varphi(z_1)-\varphi(z_0)}.$$

On peut donc poser

$$(1) \qquad \frac{f(z_1)-f(z_0)}{\varphi(z_1)-\varphi(z_0)} = \lambda\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

λ désignant ici et *dans toute la suite de ce travail* une quantité imaginaire inconnue dont le module ne dépasse pas l'unité.

Appliquons cette formule générale au cas où l'on prend

$$\varphi(z) = (z - z_0)^p.$$

Quand le point z variera de z_0 à z_1 suivant la droite $z_0 z_1$, le point qui représente $\varphi(z)$ décrira aussi une droite. Nous sommes donc dans les conditions supposées, et, en appliquant la formule (1), nous trouvons

$$\frac{f(z_1)-f(z_0)}{(z_1-z_0)^p}=\lambda\frac{f'(\xi)}{p(\xi-z_0)^{p-1}}.$$

La valeur de ξ, qui figure dans le second membre de cette équation, est représentée par un point du segment rectiligne $z_0\,z_1$; elle est donc de la forme

$$z_0+(1-\theta)(z_1-z_0),$$

θ étant réel, positif et plus petit que l'unité. On a donc

$$(2)\qquad f(z_1)-f(z_0)=\frac{\lambda(z_1-z_0)}{p(1-\theta)^{p-1}}f'[z_0+(1-\theta)(z_1-z_0)].$$

Pour $p=1$, on trouve

$$(3)\qquad f(z_1)-f(z_0)=\lambda(z_1-z_0)f'[z_0+(1-\theta)(z_1-z_0)].$$

Cette formule ne diffère de celle des accroissements finis pour les fonctions réelles que par la présence du facteur λ, de module ne dépassant pas l'unité.

Appliquons ces résultats à la fonction suivante :

$$\begin{aligned}\Psi(x)=\varphi(a+h)-\varphi(a+h-x)-x\varphi'(a+h-x)-\ldots\\ -\frac{x^n}{1.2\ldots n}\varphi^n(a+h-x),\end{aligned}$$

où $\varphi',\varphi'',\ldots,\varphi^n$ désignent les dérivées de φ. On a, comme on sait,

$$\Psi'(x)=\frac{x^n}{1.2\ldots n}\varphi^{n+1}(a+h-x),$$

et, par suite, en appliquant la formule (2) et y remplaçant $z_0\,z_1$ par les valeurs zéro et h de x,

$$\Psi(h)-\Psi(0)=\lambda\frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{1.2.3\ldots n.p}\varphi^{n+1}(a+\theta h),$$

ou bien

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}\varphi(a+h)=\varphi(a)+h\varphi'(a)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(a)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}\varphi^n(a)\\ +\lambda\frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{1.2\ldots n.p}\varphi^{n+1}(a+\theta h).\end{aligned}\right.$$

En remplaçant a par zéro et h par x, on obtient

$$(5)\quad \varphi(x)=\varphi(0)+x\varphi'(0)+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}\varphi^n(0)+\lambda\frac{x^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{1.2\ldots n.p}\varphi^{n+1}(\theta x).$$

Ces formules ne diffèrent que par la présence de λ de celles qui sont relatives aux fonctions réelles de variables réelles.

Il est très-facile de faire des applications des résultats qui précèdent. Les fonctions e^z, $\sin z$, $\cos z$, $L(1+z)$, $(1+z)^m$ peuvent être définies directement. Leurs dérivées s'obtiennent sans difficulté. Les formules que nous proposons permettent d'étendre, pour toutes ces fonctions traitées dans les éléments, les développements en série au cas où la variable indépendante prend des valeurs imaginaires. Si l'on considère en particulier $(1+z)^m$, on retrouvera tous les résultats donnés par Abel, dans son *Mémoire sur la série du binôme*. L'étude du reste ne laisse subsister qu'un seul cas douteux, celui où le module de z est l'unité, et où en même temps la partie réelle de m est comprise entre -1 et zéro. Mais un théorème donné par Abel, précisément pour cet objet, permet de lever la difficulté, et la série du binôme se trouve ainsi établie dans toute sa généralité.

II.

Avant de passer à d'autres applications, nous allons déduire une conséquence nouvelle de la formule (1).

Considérons l'intégrale rectiligne

$$\int_a^x f(x)\varphi(x)\,dx,$$

dans laquelle on suppose les limites réelles, $f(x)$ positif et $\varphi(x)$ une fonction imaginaire quelconque. Alors, en désignant par x_1 une valeur intermédiaire entre a et x, on aura, d'après la formule (1),

$$\frac{\int_a^x f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^x f(x)\,dx}=\lambda\frac{f(x_1)\varphi(x_1)}{f(x_1)}=\lambda\varphi(x_1).$$

Ainsi l'on a

$$\int_a^x f(x)\varphi(x)\,dx = \lambda\varphi(x_1)\int_a^x f(x)\,dx. \tag{6}$$

C'est l'extension d'une formule connue relative aux variables réelles, et il est facile de la démontrer directement.

En effet, soit x_1 la valeur de x qui donne à $\varphi(x)$ la valeur de plus grand module μ_1. L'intégrale

$$\int_a^x f(x)\varphi(x)\,dx$$

ne peut qu'être augmentée, $f(x)$ étant positif, si l'on remplace $\varphi(x)$ par μ_1. Elle est donc plus petite que

$$\mu_1\int_a^x f(x)\,dx\,;$$

et, comme μ_1 est le module de $\varphi(x_1)$, elle est par conséquent égale à

$$\lambda\varphi(x_1)\int_a^x f(x)\,dx,$$

λ désignant une quantité imaginaire dont le module ne peut dépasser l'unité.

Cela posé, considérons la fonction de t

$$\begin{aligned}\Psi(t) = {}&\varphi^n(t)f(x+ht) - h\varphi^{n-1}(t)f'(x+ht)\\ &+ h^2\varphi^{n-2}(t)f''(x+ht) - \ldots + (-1)^n h^n\varphi(t)f^n(x+ht),\end{aligned}$$

où $\varphi(t)$ désigne un polynôme du degré n, et $\varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{n-1}, \varphi^n$ les dérivées successives de ce polynôme. Quant à $f(x)$, c'est une fonction quelconque réelle ou imaginaire ainsi que les variables x et h. On aura

$$\Psi'(t) = (-1)^n h^{n+1}\varphi(t)f^{n+1}(x+ht)$$

et, par suite,

$$\Psi(1) - \Psi(0) = (-1)^n h^{n+1}\int_0^1 \varphi(t)f^{n+1}(x+ht)\,dt.$$

Si nous substituons les valeurs de $\Psi(1)$, $\Psi(0)$, nous obtenons la formule

$$(7)\quad \begin{cases} \varphi^n(0)[f(x+h)-f(x)] \\ \quad = h[\varphi^{n-1}(1)f'(x+h)-\varphi^{n-1}(0)f'(x)] \\ \quad - h^2[\varphi^{n-2}(1)f''(x+h)-\varphi^{n-2}(0)f''(x)]+\ldots \\ \quad +(-1)^{n-1}h^n[\varphi(1)f^n(x+h)-\varphi(0)f^n(x)]+\mathrm{R}_n, \end{cases}$$

où l'on a

$$\mathrm{R}_n = (-1)^n h^{n+1}\int_0^1 \varphi(t)f^{n+1}(x+ht)\,dt.$$

Cette formule servira de base à nos recherches. En faisant diverses hypothèses sur le polynôme $\varphi(t)$, nous allons obtenir la plupart des séries connues et d'autres nouvelles, avec des formes du reste applicables au cas où les variables sont imaginaires.

En prenant $\varphi(t)=(t-1)^n$, on retrouverait la série de Taylor : je n'insiste pas sur cette hypothèse déjà examinée.

Remplaçons n par $2n$ et prenons

$$\varphi(t) = t^n(t-1)^n,$$

nous aurons

$$(8)\quad \begin{cases} f(x+h)-f(x) \\ \quad = \dfrac{h}{2}[f'(x+h)+f'(x)] - \dfrac{n(n-1)}{2n(2n-1)}\dfrac{h^2}{1.2}[f''(x+h)-f''(x)]+\ldots \\ \quad +(-1)^{p-1}\dfrac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{2n(2n-1)\ldots(2n-p+1)}\dfrac{h^p}{1.2\ldots p} \\ \qquad \times[f_p(x+h)+(-1)^{p-1}f_p(x)]+\ldots \\ \quad +(-1)^{n-1}\dfrac{h^n}{2n(2n-1)\ldots(n+1)}[f_n(x+h)+(-1)^{n-1}f_n(x)]+\mathrm{R}_{2n}, \end{cases}$$

où le reste est donné par l'équation

$$1.2\ldots 2n\,\mathrm{R}_{2n} = (-1)^n h^{2n+1}\int_0^1 t^n(1-t)^n f^{2n+1}(x+ht)\,dt.$$

Or on a

$$\int_0^1 t^n(1-t)^n dt = \frac{1.2\ldots n}{(n+1)\ldots(2n+1)};$$

donc, en appliquant la formule (6), on obtient

$$R_{2n} = (-1)^n \frac{\lambda . h^{2n+1}}{2n+1} \frac{f^{2n+1}(x+\theta h)}{[(n+1)\ldots 2n]^2}.$$

La formule (8) nous paraît intéressante. Elle montre en effet comment, *en calculant seulement n dérivées*, on peut obtenir une approximation de l'ordre h^{2n+1}. Par exemple, en y faisant successivement $h = 1, 2, 3$, on trouve les formules suivantes :

$$f(x+h) - f(x) = \frac{h}{2}[f'(x) + f'(x+h)] - \frac{h^3}{12}\lambda f'''(x+\theta h),$$

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &\\ = \frac{h}{2}[f'(x) + f'(x+h)] &- \frac{h^2}{12}[f''(x+h) - f''(x)] \\ &+ \frac{h^5}{720}\lambda f^{\text{v}}(x+\theta h), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &\\ = \frac{h}{2}[f'(x) + f'(x+h)] &- \frac{h^2}{8}[f''(x+h) - f''(x)] \\ &+ \frac{h^3}{120}[f'''(x+h) + f'''(x)] - \frac{\lambda h^7 f^7(x+\theta h)}{100.800}. \end{aligned}$$

Remarquons, de plus, que le reste est affecté d'un coefficient numérique beaucoup plus faible que celui de la série de Taylor.

Si maintenant nous revenons à la formule fondamentale et que nous prenions

$$1.2\ldots n\varphi(t) = \left(t + \frac{r}{1-r}\right)^n,$$

nous aurons

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} f(x+h) - f(x) = \frac{h}{1-r}&[f'(x+h) - rf'(x)] \\ &- \frac{h^2}{1.2.(1-r)^2}[f''(x+h) - r^2 f''(x)] + \ldots \\ &+ \frac{(-1)^{n-1}h^n}{1.2\ldots n(1-r)^n}[f^n(x+h) - r^n f_n(x)] + R_n, \end{aligned} \right.$$

$$R_n = \frac{(-1)^n h^{n+1}}{1.2\ldots n}\int_0^1 \left(t + \frac{r}{1-r}\right)^n f^{n+1}(x+ht)\,dt.$$

Supposons, pour fixer les idées, r positif et fractionnaire. Le polynôme $\varphi(t)$ demeurera positif. On aura

$$\int_0^1 \left(t + \frac{r}{1-r}\right)^n dt = \frac{1}{n+1}\,\frac{1-r^n}{(1-r)^n}$$

et, par suite,

$$R_n = \frac{(-1)^n \lambda h^{n+1}}{1.2\ldots n+1}\,\frac{1-r^n}{(1-r)^n} f^{n+1}(x+\theta h).$$

La formule (9), à part la forme du reste, est une conséquence de la série de Taylor. Elle sera surtout applicable quand les dérivées successives seront telles que les différences qui figurent dans la formule soient très-petites pour une valeur convenablement choisie de r.

III.

Nous allons examiner des applications d'un autre genre. La formule (7) contient $2n$ coefficients qui sont les dérivées de $\varphi(t)$ pour $t=0$, $t=1$. Cherchons, s'il se peut, à rendre égaux plusieurs de ces coefficients. Voyons, par exemple, s'il existe une formule dans laquelle figurent seulement les différences $f_p(x+h) - f_p(x)$.

Pour qu'il en fût ainsi pour toutes les dérivées, il faudrait que les dérivées du polynôme $\varphi(t)$ eussent la même valeur pour $t=0$, $t=1$, ce qui est impossible; car on aurait alors $\varphi(1+t) = \varphi(t)$, quel que soit t, résultat absurde, aucun polynôme n'étant périodique. Mais nous allons voir qu'on peut approcher beaucoup du résultat cherché et rendre égales toutes les dérivées du polynôme $\varphi(t)$ pour $t=0$, $t=1$, sauf l'avant-dernière. Cherchons, en effet, un polynôme jouissant de cette propriété. On aura

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{t}{1}\varphi'(0) + \ldots + \frac{t^{n-1}}{1.2\ldots n-1}\varphi^{n-1}(0) + \frac{t^n \varphi^n(0)}{1.2\ldots n},$$

$$\varphi(t+1) = \varphi(1) + \frac{t}{1}\varphi'(1) + \ldots + \frac{t^{n-1}}{1.2\ldots n-1}\varphi^{n-1}(1) + \frac{t^n \varphi^n(0)}{1.2\ldots n}.$$

Pour que toutes les dérivées soient égales pour $t=0$ et $t=1$, sauf la $n-1^{\text{ième}}$, il faut et il suffit que la différence $\varphi(t+1) - \varphi(t)$ ne contienne que le terme en t^{n-1}. Ainsi le polynôme cherché doit satisfaire à l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x+1)-\varphi(x)=kx^{n-1},$$

et, comme on peut le multiplier sans inconvénient par une constante, nous écrirons

$$\varphi(x+1)-\varphi(x)=nx^{n-1}.$$

Or le polynôme satisfaisant à cette équation fonctionnelle est bien connu. Si x est entier, on déduit de l'équation précédente

$$\begin{aligned}\varphi(x+1)-\varphi(x)&=nx^{n-1},\\ \varphi(x)-\varphi(x-1)&=n(x-1)^{n-1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \varphi(2)-\varphi(1)&=n\,1^{n-1},\\ \varphi(1)-\varphi(0)&=0,\end{aligned}$$

et si l'on prend $\varphi(0)=0$, on voit que pour x entier on doit avoir

$$\varphi(x+1)=n[x^{n-1}+(x-1)^{n-1}+\ldots+2^{n-1}+1^{n-1}].$$

Donc notre polynôme cherché est, à une constante près, celui qui donne la somme des puissances semblables des nombres naturels. On voit par quelle voie naturelle nous allons être conduits à la formule de Maclaurin.

La somme des puissances semblables des nombres naturels a été donnée, pour les onze premières puissances, par Jacques Bernoulli, dans l'*Ars conjectandi*. On pourra consulter le *Traité de Calcul différentiel* de M. Bertrand (p. 352), où se trouvent établies les principales propriétés du polynôme de Bernoulli. En désignant par $\varphi_n(x)$ le polynôme de rang n, on a

$$\varphi_n(x)=x^n-\frac{n}{2}x^{n-1}+n_2B_1x^{n-2}-n_4B_3x^{n-4}+n_6B_5x^{n-6}-\ldots,$$

le dernier terme contenant toujours x en facteur; n, n_2, n_4 étant les coefficients de la puissance $n^{ième}$ du binôme et B_1, B_3, B_5,... les nombres de Bernoulli [*].

En substituant les valeurs des dérivées de $\varphi_n(x)$, pour $x=1$, $x=0$, dans la formule fondamentale, on retrouve la formule célèbre de Maclaurin

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} hf'(x) = {} & f(x+h) - f(x) - \frac{h}{2}[f'(x+h) - f'(x)] \\ & + \frac{B_1 h^2}{1.2}[f''(x+h) - f''(x)] + \ldots \\ & + (-1)^n B_{2n-3}\frac{h^{2n-2}}{1.2\ldots 2n-2}[f^{2n-2}(x+h) - f^{2n-2}(x)] + R_{2n}, \end{aligned}\right.$$

où

$$(11)\qquad R_{2n} = \frac{-h^{2n+1}}{1.2\ldots 2n}\int_0^1 \varphi_{2n}(t) f^{2n+1}(x+ht)\,dt.$$

On sait que $\varphi_{2n}(t)$ garde son signe de zéro à 1. On connait son intégrale. En appliquant la formule (6), nous aurons

$$R_{2n} = (-1)^{n+1}\frac{\lambda B_{2n-1} h^{2n+1}}{1.2\ldots 2n} f^{2n+1}(x+\theta h),$$

λ pouvant être supprimé dans le cas des variables réelles.

On ne paraît pas avoir remarqué que cette formule de Maclaurin est, au fond, une formule de développement pour toute fonction impaire de x. C'est ce qu'il est aisé d'établir. Remplaçons-y d'abord x par $-x$, puis h par $2x$, elle deviendra, en réunissant dans le premier membre les termes qui contenaient $f'(x)$,

$$\begin{aligned} & x[f'(x) + f'(-x)] \\ & \quad = f(x) - f(-x) + \frac{B_1(2x)^2}{1.2}[f''(x) - f''(-x)] + \ldots \\ & \quad + (-1)^n \frac{B_{2n-3}(2x)^{2n-2}}{1.2\ldots 2n-2}[f^{2n-2}(x) - f^{2n-2}(-x)] + R_{2n}, \end{aligned}$$

où

$$R_{2n} = -\frac{(2x)^{2n+1}}{1.2\ldots 2n}\int_0^1 \varphi_{2n}(t) f^{2n+1}(-x+2xt)\,dt.$$

---

[*] La notation de ces nombres n'est pas bien fixée; plusieurs géomètres les désignent par d'autres indices B_1, B_2, B_3,....

Si nous changeons, dans le reste, t en $1-t$, et si nous nous rappelons que $\varphi_{2n}(t)=\varphi_{2n}(1-t)$, nous aurons également

$$R_{2n}=\frac{-(2x)^{2n+1}}{1.2\ldots 2n}\int_0^1 \varphi_{2n}(t)f^{2n+1}(x-2xt)\,dt$$

et, en faisant la demi-somme des deux expressions de R_{2n},

$$R_{2n}=-\frac{2^{2n}x^{2n+1}}{1.2\ldots 2n}\int_0^1 \varphi_{2n}(t)[f^{2n+1}(x-2xt)+f^{2n+1}(-x+2xt)]\,dt.$$

Les formules précédentes ne contiennent plus que la seule fonction $f(x)-f(-x)$, qui est impaire, et ses dérivées. Remplaçons $f(x)-f(-x)$ par le seul symbole $f(x)$, désignant une fonction impaire, nous aurons

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} xf'(x)=f(x)&+\frac{B_1}{1.2}(2x)^2f''(x)+\ldots\\ &+(-1)^n\frac{B_{2n-3}(2x)^{2n-2}}{1.2\ldots 2n-2}f^{2n-2}(x)+R_{2n},\end{aligned}\right.$$

où

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} R_{2n}&=\frac{-2^{2n}x^{2n+1}}{1.2\ldots 2n}\int_0^1 \varphi_{2n}(t)f^{2n+1}(-x+2xt)\,dt,\\ R_{2n}&=(-1)^{n+1}\frac{\lambda\, 2^{2n}B_{2n-1}x^{2n+1}}{1.2\ldots 2n}f^{2n+1}(\theta x).\end{aligned}\right.$$

Prenons, par exemple, $f(x)=\sin x$. Nous aurons, en divisant tous les termes par $\sin x$,

$$\begin{aligned} x\cot x=1&-\frac{B_1}{1.2}(2x)^2-\frac{B_3}{1.2.3.4}(2x)^4\ldots\\ &-\frac{B_{2n-3}(2x)^{2n-2}}{1.2\ldots 2n-2}-\frac{2^{2n}\lambda x^{2n+1}}{1.2\ldots 2n}B_{2n-1}\frac{\cos x\theta}{\sin x}.\end{aligned}$$

On sait que la série est convergente tant que x est réelle et inférieure à π. Quant à l'erreur commise, elle est toujours égale au terme auquel on s'arrête multiplié par

$$\frac{\lambda x\cos x\theta}{\sin x}.$$

On voit que, si x est réelle, l'erreur commise est plus petite que le premier terme négligé multiplié par $\frac{x}{\sin x}$.

Si l'on remplace x par $\frac{x}{2}\sqrt{-1}$, on trouve

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)=\frac{B_1}{1.2}-\frac{B_3 x^2}{1.2.3.4}+\ldots.$$

C'est le résultat de Cauchy, car la première des formules (13), donnant l'erreur commise, montre qu'elle est toujours de même signe que le premier terme négligé. Elle est donc par conséquent inférieure à ce terme.

On fait remarquer, d'ordinaire, que la série de Maclaurin est rarement convergente. On peut préciser cette affirmation un peu vague de la manière suivante. On sait que

$$\frac{B_{2n-1}}{1.2\ldots 2n}=2^{2n-1}\pi^{2n}(1+\varepsilon_n),$$

ε_n tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Il suit de là que le terme général de la série (12) est de la forme

$$(-1)^{n+1}\frac{1+\varepsilon_n}{2}(4x\pi)^{2n}f^{2n}(x).$$

Dans le cas où la série de Maclaurin est convergente, il doit tendre vers zéro. On doit donc avoir

$$(4x\pi)^{2n}f^{2n}(x)=u_n,$$

u_n tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Il suit de là que la série qui développe

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)}{2}=\sum\frac{f^{2n}(x)h^{2n}}{1.2\ldots 2n}=\sum\frac{u_n}{1.2\ldots 2n}\left(\frac{h}{4x\pi}\right)^{2n}$$

sera convergente pour toutes les valeurs de h. Ainsi :

Une condition nécessaire, mais non suffisante, pour que la série de Maclaurin soit convergente, c'est que la fonction $f(x+h)+f(x-h)$ soit développable en série convergente ordonnée suivant les puissances *de h pour toutes les valeurs de h, et par conséquent qu'elle ne devienne ni infinie, ni indéterminée pour aucune valeur finie de la variable h.*

En revenant aux notations habituelles et à la formule (10), on voit qu'elle ne sera convergente que si la fonction

$$f(x+h+k)+f(x+h-k)-f(x+k)-f(x-k)$$

est développable en série convergente, suivant les puissances de k, dans toute l'étendue du plan, et par conséquent ne devient jamais infinie ou indéterminée quand k varie.

Ainsi la série de Maclaurin pourra bien être convergente (et il est facile de voir qu'elle le sera) pour des fonctions entières de e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\sin f(x)$, $e^{f(x)} f(x)$ désignant un polynôme; mais elle sera divergente pour les fractions rationnelles, pour $\operatorname{tang} x$, $\frac{1}{\sin x}$, ...

IV.

Revenons à la formule (7), qui nous a servi de point de départ, et choisissons le polynôme qui y figure, en le soumettant à d'autres conditions. Exigeons, par exemple, que, dans la formule (7), $f_p(x)$ et $f_p(x+h)$ aient le même coefficient et n'entrent que par leur somme. Le polynôme $\Psi_n(x)$, qui permettra d'obtenir ce résultat, devra satisfaire à l'équation fonctionnelle

$$\Psi_n(x+1)+\Psi_n(x)=2x^n.$$

Cette équation, différentiée p fois, donne en effet, pour $x=0$,

$$\Psi_n^p(1)=-\Psi_n^p(0).$$

Il reste à obtenir le polynôme satisfaisant à l'équation fonctionnelle proposée. On l'exprime facilement au moyen de la fonction $\varphi_n(x)$ de Jacques Bernoulli, employée dans l'article précédent. En effet, si l'on pose

$$\Psi_n(x)=\frac{2^n}{n+1}\left[\varphi_{n+1}\left(\frac{x+1}{2}\right)-\varphi_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)\right], \tag{14}$$

on a un polynôme d'ordre n qui, comme on le vérifie aisément, satisfait à l'équation proposée. Si l'on remplace φ_{n+1} par son expression connue comme dérivée $n^{ième}$, on trouvera aussi

$$\Psi_n(x) = \frac{2}{n+1}\frac{d^{n+1}}{du^{n+1}}\frac{ue^{xu}}{e^u+1} \quad \text{pour} \quad u = 0.$$

Or on sait que l'on a

$$\frac{u}{e^u+1} = \frac{u}{e^u-1} - \frac{2u}{e^{2u}-1} = \frac{u}{2} - \frac{B_1 u^2}{1.2}(2^2-1) + \ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{B_{2n-1}}{1.2\ldots 2n}(2^{2n}-1)u^{2n} + \ldots.$$

En multipliant par e^{xu} et prenant la dérivée $n+1^{ième}$, qui sera le coefficient de u^{n+1} multiplié par $1.2.3\ldots n+1$, on trouvera

$$\Psi'_n(x) = x^n - \frac{2B_1}{1.2}(2^2-1)nx^{n-1} + \ldots$$
$$+ (-1)^p \frac{2B_{2p-1}(2^{2p}-1)}{1.2\ldots 2p} n(n-1)\ldots(n-2p+2)x^{n-2p+1} + \ldots.$$

On déduit de là les dérivées de Ψ_n pour $x = 0$, et, en substituant dans la formule (7), on obtient

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} & f(x+h) - f(x) \\ & \quad = \frac{2B_1(2^2-1)}{1.2}h[f'(x) + f'(x+h)] \\ & \quad - \frac{2B_3(2^4-1)h^3}{1.2.3.4}[f'''(x) + f'''(x+h)] + \ldots \\ & \quad + (-1)^{n-1}\frac{2B_{2n-1}(2^{2n}-1)h^{2n-1}}{1.2.3\ldots 2n}[f^{2n-1}(x) + f^{2n-1}(x+h)] + R_{2n}, \end{aligned}\right.$$

où

$$R_{2n} = \frac{h^{2n+1}}{1.2.3\ldots 2n}\int_0^1 \Psi_{2n}(t) f^{2n+1}(x+ht)\,dt.$$

Remplaçons $\Psi_{2n}(t)$ par son expression (14), nous aurons

$$R_{2n} = \frac{2^{2n}h^{2n+1}}{1.2\ldots 2n}\int_0^1 \left[\varphi_{2n+1}\left(\frac{t+1}{2}\right) - \varphi_{2n+1}\left(\frac{t}{2}\right)\right] f_{2n+1}(x+ht)\,dt,$$

expression que l'on ramène facilement, par des changements de variables, à la forme

$$R_{2n} = \frac{-(2h)^{2n+1}}{1.2.3\ldots 2n}\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_{2n-1}(t)[f^{2n+1}(x+2ht)+f^{2n+1}(x+h-2ht)]dt.$$

Le polynôme $\varphi_{2n+1}(t)$ conserve son signe entre zéro et $\frac{1}{2}$, et son intégrale entre ces limites est, comme on sait,

$$(-1)^{n-1}\frac{2^{2n+2}-1}{(n+1)2^{2n+2}}B_{2n+1}.$$

On a donc

$$R_{2n} = (-1)^n \frac{\lambda h^{2n+1}(2^{2n+2}-1)B_{2n+1}}{1.2.3\ldots 2n+2}[f^{2n+1}(x+h\theta)+f^{2n+1}(x+h-h\theta)].$$

La formule (15) est due à Boole, qui l'a donnée, je crois, sans se préoccuper du reste. Comme la formule de Maclaurin, on peut la transformer de manière qu'elle ne contienne qu'une fonction impaire de x. Il suffit d'y remplacer x par $-\frac{h}{2}$, h par $2x$, et $f(x)-f(-x)$ par $f(x)$. Elle devient alors

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) &= \frac{2B_1}{1.2}(2^2-1)2xf'(x) - \frac{2B_3(2^4-1)(2x)^3}{1.2.3}f'''(x)+\ldots\\ &\quad + (-1)^{n-1}\frac{2B_{2n-1}(2^{2n}-1)(2x)^{2n-1}}{1.2\ldots 2n}f^{2n-1}(x)+R_{2n},\end{aligned}\right.$$

où

$$R_{2n} = (-1)^n \frac{\lambda B_{2n+1}(2^{2n+2}-1)(2x)^{2n+1}}{1.2.3\ldots 2n+2}f^{2n+1}(\theta x).$$

Comme vérification, prenons $f(x)=\sin x$. Nous trouverons, en divisant par $\cos x$,

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} x &= \frac{2B_1(2^2-1)}{1.2}2x + \frac{2B_3(2^4-1)}{1.2.3}(2x)^3+\ldots\\ &\quad + \frac{2B_{2n-1}(2^{2n}-1)(2x)^{2n-1}}{1.2\ldots 2n}+R_{2n},\\ R_{2n} &= \frac{(2x)^{2n+1}(2^{2n+2}-1)B_{2n+1}}{1.2.3\ldots 2n+2}\,\frac{\lambda\cos\theta x}{\cos x}.\end{aligned}$$

Ce reste tend vers zéro toutes les fois que le module de x est inférieur à $\frac{\pi}{2}$, ce qui est conforme aux résultats connus. En remplaçant x par $\frac{x}{2}\sqrt{-1}$, on trouve

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{2B_1(2^2-1)}{1.2}x-\frac{2B_3(2^4-1)}{1.2.3.4}x^3+\ldots,$$

série convergente tant que le module de x est inférieur à π. La forme, du reste, nous apprend d'ailleurs que, *dans tous les cas*, l'erreur est de même signe que le premier terme négligé, et par conséquent qu'elle est inférieure à ce terme.

La convergence de la formule de Boole donne lieu aux mêmes remarques que celle de la série de Maclaurin.

V.

Supposons maintenant que, dans la formule (7), on prenne pour $\varphi(x)$ un polynôme satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x+1)-r\varphi(x)=\frac{(1-r)x^n}{1.2\ldots n}, \tag{17}$$

où nous supposerons, pour plus de précision, r positif et fractionnaire.

On aura, en différentiant p fois,

$$\varphi_p(1)=r\varphi_p(0),$$

et notre formule ne contiendra plus que les différences

$$rf^p(x+h)-f^p(x).$$

Voyons d'abord comment on résoudra l'équation fonctionnelle (17).

Posons

$$1.2\ldots n\varphi(x+1)=\frac{d^n}{du^n}\frac{(1-r)e^{xu}}{1-re^{-u}}\quad\text{pour}\quad u=0, \tag{18}$$

on trouvera

$$\varphi(x+1) - r\varphi(x) = \frac{1}{1.2\ldots n}\frac{d^n}{du^n}(1-r)e^{xu} \quad \text{pour} \quad u = 0,$$
$$= \frac{1-r}{1.2\ldots n}x^n.$$

Donc le polynôme défini par la formule (18) sera le polynôme cherché. Proposons-nous de trouver son expression développée. Soit

$$(19) \qquad \frac{1-r}{1-re^{-u}} = 1 - a_1\frac{u}{1} + a_2\frac{u^2}{1.2} - a_3\frac{u^3}{1.2.3} + \ldots;$$

on verra facilement que a_p est de la forme

$$a_p = \frac{f_p(r)}{(1-r)^p},$$

ou $f_p(r)$ est un polynôme dont tous les coefficients sont positifs. Cela résultera d'ailleurs de la suite de notre étude.

Si dans la formule (19) on change u en $-u$, r en $\frac{1}{r}$ et que l'on pose $b_p = \dfrac{f_p\left(\frac{1}{r}\right)}{\left(1-\frac{1}{r}\right)^p}$, on aura

$$\frac{r-1}{r-e^u} = 1 + b_1\frac{u}{1} + \ldots + b_p\frac{u^p}{1.2\ldots p} + \ldots;$$

multiplions par r et retranchons de la formule (19), nous trouvons

$$0 = \sum\left[rb_p - (-1)^p a_p\right]\frac{u^p}{1.2\ldots p},$$

c'est-à-dire

$$rb_p = (-1)^p a_p, \quad f_p(r) = r^p f_p\left(\frac{1}{r}\right).$$

Ainsi le polynôme $f_p(r)$ est réciproque et de degré p.

Multiplions la formule (19) par le dévèloppement de e^{xu}, et prenons le coefficient de u^n, nous aurons $\varphi(x+1)$. On trouve ainsi

$$(20) \qquad \varphi_n(x+1) = \frac{1}{1.2\ldots n}(x^n - n_1 a_1 x^{n-1} + n_2 a_2 x^{n-2} - \ldots).$$

Le second membre n'ayant que des variations $\varphi(1-x)$ n'est jamais nul si x est positif; donc le polynôme $\varphi(x)$ conserve son signe de zéro à 1.

L'expression du polynôme étant trouvée, la formule (7) devient

$$(21)\quad \begin{cases} f(x+h)-f(x) = -a_1 h\left[f'(x+h)-\frac{1}{r}f'(x)\right] \\ \qquad\qquad -a_2\frac{h^2}{1.2}\left[f''(x+h)-\frac{1}{r}f''(x)\right]-\ldots \\ \qquad\qquad -a_n\frac{h^n}{1.2\ldots n}\left[f^n(x+h)-\frac{1}{r}f^n(x)\right]+R_n, \end{cases}$$

où

$$R_n = (-1)^n h^{n+1}\int_0^1 \varphi_n(t) f^{n+1}(x+ht)\,dt.$$

Le polynôme $\varphi_n(t)$ ne change pas de signe entre zéro et 1, et la formule (20) montre d'ailleurs que $\varphi_n(t)$ est la dérivée de $\varphi_{n+1}(t)$. On a donc

$$\int_0^1 \varphi_n(t)\,dt = \varphi_{n+1}(1)-\varphi_{n+1}(0);$$

et comme, en vertu de l'équation fonctionnelle,

$$\varphi_{n+1}(0)=\frac{1}{r}\varphi_{n+1}(1),\quad \varphi_{n+1}(1)=(-1)^{n+1}\frac{a_{n+1}}{1.2\ldots n+1},$$

on a

$$(22)\qquad R_n = -\frac{1-r}{r}\,\frac{a_{n+1}h^{n+1}}{1.2\ldots n+1}f^{n+1}(x+\theta h).$$

Telle est l'expression de l'erreur commise.

Examinons ces coefficients a_n fonctions de r qui figurent dans le développement. On peut d'abord les développer en séries qui mettent en évidence leurs propriétés. On a

$$\frac{1-r}{1-re^{-u}} = 1-r+\sum_p (1-r)r^p e^{-pu}.$$

En prenant le coefficient de u^n, on trouve

$$a_n = 1^n r^n + (2^n-1^n)r^2+(3^n-2^n)r^3+\ldots.$$

Ce développement montre bien qu'ils sont positifs, croissants avec r et avec n; si nous multiplions cette série par $(1-r)^n$ nous aurons l'expression finie des coefficients a_n. On trouve ainsi

$$a_n(1-r)^n = r + \alpha_1 r^2 + \ldots + \alpha_{n-1} r^n$$

où

$$\alpha_{p-1} = p^n - (n+1)_1 (p-1)^n + (n+1)_2 (p-2)^n + \ldots$$
$$+ (-1)^{p-1}(n+1)_{p-1} 1^n,$$

$(n+1)_k$ désignant toujours le coefficient de rang $(k+1)$ de la puissance $n+1^{\text{ième}}$ du binôme.

Voici le calcul fait des n coefficients :

$$(1-r)\, a_1 = r,$$
$$(1-r)^2 a_2 = r + r^2,$$
$$(1-r)^3 a_3 = r + 4r^2 + r^3,$$
$$(1-r)^4 a_4 = r + 11r^2 + 11r^3 + r^4,$$
$$(1-r)^5 a_5 = r + 26r^2 + 66r^3 + 26r^4 + r^5,$$
$$(1-r)^6 a_6 = r + 57r^2 + 302r^3 + 302r^4 + 57r^5 + r^6.$$

Ce calcul se fait avec une extrême facilité. Les coefficients des polynômes sont les n différences $n^{\text{ièmes}}$ du tableau

$$\ldots 0\,0\,0\,1^n\,2^n\,3^n \ldots n^n$$

prolongé vers la gauche avec des zéros autant qu'il est nécessaire pour obtenir n différences $n^{\text{ièmes}}$.

Les numérateurs des quantités a_n peuvent être définis par la formule

$$\frac{1-r}{1-re^{u(1-r)}} = \sum \frac{f_k u^k}{1.2\ldots k}.$$

Le premier membre pour $r=1$ se réduit à $\frac{1}{1-u}$. Ainsi la somme des coefficients de f_k est $1.2\ldots k$, ce qu'il est facile de vérifier sur le tableau précédent.

Je ne terminerai pas cet article sans montrer que les polynômes

$\varphi_n(x)$ considérés ici donnent la solution d'un problème assez intéressant :

x étant un nombre entier, proposons-nous de trouver la somme

$$x^n + r(x-1)^n + r^2(x-2)^n + \ldots.$$

A cet effet, dans l'équation fonctionnelle (17), remplaçons successivement x par x, $x-1$, $x-2$, ..., nous aurons

$$\begin{aligned}
&\varphi(x+1) - r\varphi(x) = (1-r)x^n,\\
&\varphi(x) - r\varphi(x-1) = (1-r)(x-1)^n,\\
&\varphi(x) - r\varphi(1) = (1-r)\,1^n,
\end{aligned}$$

et, par suite, en multipliant ces équations par $1, r, r^2, \ldots, r^{x-1}$, et les ajoutant

$$(23)\qquad \frac{\varphi_n(x+1) - \varphi_n(1)\,r^x}{1-r} = x^n + r(x-1)^n + r^2(x-2)^n + \ldots + r^{x-1}\,1^n.$$

Ainsi la somme qui figure dans le second membre s'exprime par un de nos polynômes augmenté d'un terme en r^x. Ce résultat nous paraît nouveau; il justifierait une étude plus détaillée des polynômes $\varphi_n(x)$.

VI.

Enfin, dans une dernière application, nous emploierons une suite de polynômes qui sont les dérivées les uns des autres et qui sont des cas particuliers de la série hypergéométrique. Pour que notre formule fondamentale donne naissance à un développement infini, il est indispensable que les dérivées des mêmes degrés soient égales pour $t=0$ et $t=1$ pour tous les polynômes employés. Cette condition sera remplie si les polynômes sont les dérivées les uns des autres.

Considérons l'équation différentielle

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} &x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [1-h-n+x(n+h+k-2)]\frac{dy}{dx}\\ &\qquad\qquad - n(n+h+k-1)y = 0.\end{aligned}\right.$$

Cette équation admet comme intégrale le polynôme

$$(25)\qquad y_n = \frac{\Gamma(h+k)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+h+k-2)}\, x^{n+h}(1-x)^{n+k}\frac{d^n}{dx^n}x^{-h}(1-x)^{-k},$$

où l'on a choisi un coefficient tel que, dans le développement, le coefficient de x^n soit $\frac{1}{1.2\ldots n}$. On vérifie sans peine, en différentiant l'équation (24), que la dérivée de y_n satisfait à une équation qui n'en diffère que par le changement de n en $n-1$. Ainsi l'on a une suite de polynômes

$$y_0,\ y_1, \ldots,\ y_n$$

qui sont les dérivées les uns des autres, le premier étant égal à 1.

Si, dans la formule (25), on développe la dérivée $n^{ième}$ par la formule de Leibnitz, on trouvera facilement, en faisant $x=0$, $x=1$, les valeurs de y_n dans ces deux cas. On a ainsi

$$y_n = \frac{h(h+1)\ldots(h+n-1)(-1)^n}{1.2\ldots n\,(h+k)\ldots(h+k+n-1)} \quad \text{pour } x=0,$$

$$y_n = \frac{k(k+1)\ldots(k+n-1)}{1.2\ldots n\,(h+k)\ldots(h+k+n-1)} \quad \text{pour } x=1.$$

Enfin on reconnaît aisément, d'après tout ce que l'on sait sur l'équation différentielle (24), que l'on peut poser

$$(27)\qquad y_n = \frac{\Gamma(h+k)}{\Gamma(h)\,\Gamma(k)\,\Gamma(n+1)}\int_0^1 z^{h-1}(1-z)^{k-1}(x-z)^n\,dz.$$

Cette formule n'a toutefois de sens que si l'on suppose h et k positifs, ce que nous ferons dans la suite.

Elle montre que les polynômes de rang pair n'ont pas de racines réelles; par conséquent, ceux de rang impair, dérivées des précédents, n'en ont qu'une, évidemment comprise entre 0 et $+1$.

Enfin, pour compléter l'étude de ces polynômes, cherchons une fonction génératrice. Or considérons la fonction

$$F = (x+u)^{-h}(1-x-u)^{-k},$$

et développons-la suivant les puissances de u. Nous aurons

$$F = \sum \frac{u^n}{1.2\ldots n}\frac{d^n}{dx^n}x^{-h}(1-x)^{-k}.$$

Posons $u = tx(1-x)$. On aura

$$
\begin{aligned}
F &= x^{-h}(1-x)^{-k}(1+t-tx)^{-h}(1-tx)^{-k} \\
&= \sum \frac{t^n x^n (1-x)^n}{1.2\ldots n} \frac{d^n}{dx^n} x^{-h}(1-x)^{-k},
\end{aligned}
$$

ou bien, en divisant par $x^{-h}(1-x)^{-k}$,

$$
(28)\quad \left\{
\begin{aligned}
(1+t-tx)^{-h}(1-tx)^{-k} &= \sum \frac{t^n}{1.2\ldots n} x^{n+h}(1-x)^{n+k} \frac{d^n}{dx^n} x^{-h}(1-x)^{-k} \\
&= \Sigma t^n (n+h+k-1)\ldots(h+k) y_n.
\end{aligned}
\right.
$$

Ainsi la fonction

$$(1+t-tx)^{-h}(1-tx)^{-k}$$

est la fonction génératrice de nos polynômes.

Substituons le polynôme y_n dans la formule (7) et, pour plus de précision, faisons $h = k = \frac{1}{2}$. Cette formule deviendra

$$
(29)\quad \left\{
\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) &= \frac{h}{2}[f'(x) + f'(x+h)] \\
&\quad - \frac{1.3}{(1.2)^2} \frac{h^2}{2^2} [f''(x+h) - f''(x)] + \ldots \\
&\quad + (-1)^{n-1} \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{(1.2.3\ldots n)^2} \frac{h^n}{2^n} \\
&\quad \times [f^n(x+h) + (-1)^n f^n(x)] + R_n,
\end{aligned}
\right.
$$

$$R_n = (-1)^n h^{n+1} \int_0^1 y_n(t) f^{n+1}(x+ht)\,dt.$$

Supposons n pair. On trouvera pour l'expression approchée du reste

$$(30)\quad R_n = \frac{\lambda h^{n+1}}{2^{n+1}} \frac{1.3.5\ldots 2n+1}{(1.2.3\ldots n+1)^2} [f^{n+1}(x+h-\theta h) + f^{n+1}(x+\theta h)].$$

La formule (29) est sensiblement plus convergente que la série de Taylor.

On pourrait en obtenir de semblables en très-grand nombre.