JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. CHASLES

Détermination immédiate, par le principe de correspondance, du nombre de points d'intersection de deux courbes d'ordre quelconque, qui se trouvent à distance finie

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 18 (1873), p. 202-211.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1873_2_18__202_0>

Détermination immédiate, par le principe de correspondance, du nombre de points d'intersection de deux courbes d'ordre quelconque, qui se trouvent à distance finie;

Par M. CHASLES.

(Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXV, p. 736, séance du 30 septembre 1872.)

Cette question n'est autre que celle de déterminer, en Algèbre, le nombre des solutions de deux équations à deux inconnues; ce qui exige des calculs parfois compliqués. Les considérations géométriques auxquelles se prête le principe de correspondance (qui s'applique de même directement à la question algébrique) évitent ces calculs et conduisent à une expression fort simple du nombre cherché.

Il suffit de démontrer d'abord ce théorème fondamental de la Géométrie analytique, que le nombre des points, réels ou imaginaires, communs à deux courbes géométriques quelconques d'ordre p et p', est toujours pp'. C'est à la démonstration immédiate de ce théorème, qui a offert pendant longtemps des difficultés [*], que se prête le principe de correspondance (de deux manières); et même la simple définition des courbes géométriques d'être rencontrées toujours en un

[*] « La vérité de cette proposition, disait Euler, est reconnue de tous les géomètres, quoiqu'on doive avouer qu'on n'en trouve nulle part une démonstration assez rigoureuse. » (Voir *Mémoires de l'Académie de Berlin*, de 1748; *Démonstration sur le nombre des points où deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper*, p. 233-248). Cramer dit bientôt après : « La règle qui détermine ce nombre est très-importante dans la théorie des courbes; plusieurs grands géomètres l'ont supposée, mais personne, que je sache, n'en a donné la démonstration. » (*Introduction à l'analyse des courbes algébriques;* Genève, 1750, p. XIII.)

même nombre de points, réels ou imaginaires, par une droite quelconque, suffit, sans qu'on ait à se servir des équations des courbes.

THÉORÈME I. — *Deux courbes d'ordre* p *et* p′ *ont toujours* pp′ *points communs, réels ou imaginaires.*

Prenons deux points fixes quelconques, I et O. Une droite IX rencontre la première courbe en p points α; les droites menées de ces points au point O rencontrent la deuxième courbe en pp' points α'; par ceux-ci on mène pp' droites IU. Ces pp' droites correspondent à IX. De même, à une droite IU, qui rencontre la deuxième courbe en p' points, correspondent $p'p$ droites IX. Il existe donc $2pp'$ droites IX qui coïncident chacune avec une droite correspondante IU. pp' de ces droites sont coïncidentes avec la droite IO, et n'appartiennent pas à des points communs aux deux courbes; mais chacune des pp' autres droites passe par un point α de la première courbe coïncidant nécessairement avec un des points α' de la deuxième courbe situés sur la droite αO. Le théorème est donc démontré.

Les points multiples et les points de contact que peuvent avoir les deux courbes ne modifient en rien la démonstration; de sorte que le résultat pp' est général.

Observation. — Si les deux courbes avaient un point commun sur la droite IO, ce point servirait, comme les autres, à former le nombre pp' des solutions étrangères; mais, néanmoins, il compterait aussi dans le nombre des points d'intersection des deux courbes; car une droite IX, infiniment voisine de IO, donnerait lieu alors à une droite correspondante IU, infiniment peu différente de IX, et conséquemment faisant, à la limite, une coïncidence. Mais, du reste, on peut prendre les deux points I, O sur une droite qui ne passe pas par un point commun aux deux courbes : ce qui justifie notre raisonnement.

THÉORÈME II. — *Lorsque deux courbes d'ordre* p *et* p′ *sont représentées par les deux équations*

$$(x^m, y^n)^p = 0, \quad (x^{m'}, y^{n'})^{p'} = 0$$

de degré p *et* p′, *dans lesquelles les puissances supérieures de* x *et* y *sont* m, n *et* m′, n′, *le nombre de leurs points d'intersection, situés à* *distance finie, est*

$$pp' - (p-m)(p'-m') - (p-n)(p'-n') - \omega,$$

ω étant le nombre des points d'intersection des deux courbes qui peuvent se trouver à l'infini, autres que ceux qui s'y trouvent sur les axes coordonnés, en nombre $(\mathrm{p}-\mathrm{m})(\mathrm{p}'-\mathrm{m}')+(\mathrm{p}-\mathrm{n})(\mathrm{p}'-\mathrm{n}')$.

Démonstration. — Le nombre total des points d'intersection des deux courbes étant pp' (théorème I), il suffit d'en retrancher leurs points communs situés à l'infini. Au nombre de ces points s'en trouvent évidemment $(p-n)(p'-n')$ sur l'axe Ox, et $(p-m)(p'-m')$ sur l'axe Oy. Donc, si les deux courbes ont à l'infini ω autres points communs, le nombre de leurs points à distance finie se réduit à

$$pp' - (p-m)(p'-m') - (p-n)(p'-n') - \omega \text{ [*]}.$$

C. Q. F. D.

La question se réduit donc à déterminer le nombre ω des points communs aux deux courbes, qui peuvent se trouver sur la droite de l'infini, autres que ceux qui sont représentés par

$$[(p-m)(p'-m') + (p-n)(p'-n')].$$

Or cela se fait sans difficulté. L'équation de chaque courbe fait connaître, par une équation en $\frac{y}{x}$ qu'on pose immédiatement, le nombre et la direction des points de la courbe qui se trouvent à l'infini, ainsi

[*] L'expression incomplète $pp' - (p-m)(p'-m') - (p-n)(p'-n')$ a été donnée par Bezout dans sa *Théorie générale des équations algébriques*, 1769. Il dit que, si $p=m$ et $p'=m'$, elle devient $pp' - (p-n)(p'-n')$, et que c'est là le cas où se réduit tout ce qu'on a su jusqu'alors (*voir* p. 45). Néanmoins on cite constamment le terme pp' comme constituant le théorème de Bezout, c'est-à-dire la limite du degré de l'équation finale résultant de l'élimination d'une inconnue, qu'il aurait donnée, quand, en réalité, il a donné une limite très-inférieure, que l'on devrait citer, d'autant plus qu'il ne s'est pas borné au cas de deux équations à deux inconnues, et qu'il a traité la question dans sa généralité, ce qui constitue le grand mérite de l'Ouvrage de Bezout.

que les tangentes en ces points. Ces deux choses, les points et leurs tangentes, sont les éléments principaux de la question.

Deux points des deux courbes situés dans une même direction $\left(\text{déterminée par une même valeur de } \frac{y}{x}\right)$ sont deux points coïncidents, puisqu'ils sont à l'infini sur deux droites parallèles : ils comptent donc pour 1 dans le nombre ω. Mais si les courbes ont en ce point la même tangente, elles ont deux points communs; le point compte donc pour 2. Si l'une des courbes a un point double, il compte aussi pour 2, et de même pour les points multiples d'ordre supérieur. Si les deux courbes ont une tangente commune en leurs points multiples coïncidents, cette tangente ajoute une unité au produit des ordres de multiplicité.

Il peut entrer aussi dans le nombre ω des points situés sur les axes coordonnés Ox, Oy, soit que les courbes aient un contact commun avec un de ces axes en son point de l'infini, ou un contact avec la droite de l'infini elle-même, au même point.

Sans chercher à énumérer les différents cas que peuvent présenter les conditions de contact de deux courbes, je vais donner quelques exemples variés dans lesquels se trouvera toujours une vérification du résultat.

Voici l'indication du sujet de chacun de ces exemples :

I. Les deux courbes ont un point d'intersection sur la droite de l'infini : $\omega = 1$.

II. Les deux courbes ont deux points communs à l'infini, dont un est un point d'intersection et l'autre un point de contact : $\omega = 1 + 2 = 3$.

II *bis*. Les deux courbes ont deux points de contact à l'infini : $\omega = 4$.

III. Les deux courbes ont un point de contact à l'infini, et leur tangente commune est la droite de l'infini : $\omega = 2$.

IV. Les deux courbes ont un point de contact avec la droite de l'infini sur l'axe Ox : $\omega = 1$.

IV *bis*. Les deux courbes ont trois points de contact à l'infini, dont deux sont sur les axes Ox, Oy : $\omega = 2 + 1 + 1 = 4$.

V. La première courbe a un point d'inflexion à l'infini; la seconde courbe lui est tangente en ce point : $\omega = 2$.

VI. La première courbe a un point double à l'infini; la seconde courbe passe par ce point : $\omega = 2$.

VII. La première courbe a un point double à l'infini; la seconde courbe passe par ce point et est tangente à l'une des deux branches : $\omega = 3$.

VIII. Les deux courbes ont chacune un point double en un même point de l'infini, et ont les mêmes tangentes en ce point : $\omega = 6$.

IX. La première courbe a un point triple et la seconde un point double en un même point de l'infini; les deux courbes ont deux tangentes communes en ce point; en outre, elles ont un autre point de contact à l'infini sur l'axe Ox : $\omega = 8 + 1 = 9$.

X. Exemples pris du Mémoire de M. Minding : $\omega = 0$.

XI. Du même : $\omega = 0$.

XII. Autre exemple de M. Minding où $\omega = 1 + 2 = 3$.

Exemples. — Faisons

$$N = pp' - (p - m)(p' - m') - (p - n)(p' - n');$$

le nombre cherché sera $N - \omega$.

Soient les courbes :

$$\text{I.}\qquad \begin{gathered} y^3 - 2y^2x + yx - 1 = 0, \\ y^2 - 2yx - y - 2x + 2 = 0. \end{gathered}$$

$N = 6 - 2 = 4$. Les courbes ont un point commun à l'infini dans la direction de la droite $y = 2x$. Leurs tangentes en ce point ne coïncident pas; ainsi $\omega = 1$, et $N - \omega = 3$. Les deux courbes ont donc trois points d'intersection à distance finie. Effectivement l'équation finale en y est $5y^3 - 3y^2 - 2 = 0$.

$$\text{II.}\qquad \begin{gathered} y^3 - 7xy^2 + 14x^2y - 8x^3 + 7y^2 - 30xy \\ + 20x^2 + 7y + 13x - 15 = 0. \\ y^2 - 6xy + 8x^2 + 4y - 12x + 5 = 0. \end{gathered}$$

$N = 6$. Les courbes ont deux points communs à l'infini, dans les directions des droites $y = 2x$, $y = 4x$; le premier est un point d'intersection, et le second un point de contact du premier ordre; la tangente commune a pour équation $y = 4x - 2$; donc $\omega = 1 + 2$, et $N = 3$. Donc les courbes ont trois points d'intersection à distance finie, ce qui s'accorde avec le résultat de M. Magnus, de qui cet exemple est emprunté (*Journal de Crelle*, 1843; t. XXVI, p. 366; *Zur Eliminationstheorie*).

II *bis*.
$$2y^3 - 2x^2y + y^2 - 2xy + 3x^2 = 0.$$
$$y^3 - x^2y + 3y^2 - xy - x^2 = 0.$$

$N = 9 - 1 = 8$. Les deux courbes ont deux points de contact à l'infini; leurs tangentes en ces points ont pour équations $y = x - \frac{1}{2}$, $y = -x - \frac{3}{2}$. Donc $\omega = 4$; $N - 4 = 4$. Ainsi les deux courbes ont quatre points communs à distance finie; ces quatre points coïncident à l'origine des coordonnées où les courbes ont chacune un point double.

III.
$$x^3 + 2x^2y + y^3x + 3y^2 + y = 0.$$
$$x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0.$$

$N = 6$. Les deux courbes ont un point de contact à l'infini, dans la direction de la droite $y = -x$; leur tangente en ce point est la droite de l'infini : $\omega = 2$ et $N - \omega = 4$. Les courbes ont donc quatre points d'intersection à distance finie. L'un est l'origine des coordonnées; les trois autres sont déterminés par l'équation $y^3 + 6y^2 + 6y + 1 = 0$.

III *bis*.
$$y^2x - 2y^2 + 3xy + x^2 = 0.$$
$$y^2 - x + 0.$$

$N = 6 - 1 = 5$. Les deux courbes ont un point de contact avec la droite de l'infini sur l'axe Ox : $\omega = 1$, $N - 1 = 4$. Ainsi les deux courbes ont quatre points d'intersection à distance finie. Deux de ces points sont à l'origine des coordonnées, où la cubique a un point double; les deux autres sont déterminés par l'équation finale $2y^2 + 3y - 2 = 0$.

IV. $$y^2x - 2yx^2 + 2y + x = 0.$$
$$2y^2x - 4yx^2 + y + 3x = 0.$$

$N = 9 - 2 = 7$. Les deux courbes ont trois tangentes communes en trois points de l'infini; l'une est la droite $y = 2x$, et les deux autres sont les axes Ox, Oy : $\omega = 2 + 1 + 1 = 4$. Les courbes ont donc $N - 4 = 3$ points d'intersection à distance finie. L'un de ces points est en O; les deux autres sont déterminés par les équations finales $3y^2 - 1 = 0$, $x^2 - 3 = 0$.

V. $$y^3 + x^3 - 3ayx = 0.$$
$$y^2 + yx + ax = 0.$$

$N = 6$. La première courbe a un point d'inflexion à l'infini dans la direction de la droite $y = -x$; la tangente en ce point a pour équation $y = -x - a$. La seconde courbe passe par le même point et a la même tangente. Donc $\omega = 2$ et $N - \omega = 4$. Ainsi les deux courbes ont quatre points d'intersection à distance finie. Deux de ces points sont à l'origine des coordonnées, où la première courbe a un point double; les deux autres sont déterminés par l'équation finale $2x^2 - 3ax + 16a^2 = 0$.

VI. $$y^3 - 3y^2x + 3yx^2 - x^3 + y^2 - x^2 + 3y - x = 0.$$
$$y^2 - 3yx + 2x^2 + y = 0.$$

$N = 6$. La première courbe a un point double à l'infini, dans la direction de la droite $y = x$: les tangentes en ce point sont la droite $y = x - 1$ et la droite de l'infini. La deuxième courbe passe par le même point, et sa tangente est la droite $y = x + 1$. Les deux courbes ont donc deux points communs : $\omega = 2$, $N - \omega = 4$. Les courbes ont quatre points d'intersection à distance finie, dont un est l'origine des coordonnées, et les trois autres sont déterminés par l'équation $4x^2 - 3x^2 + 12x + 3 = 0$.

VII. $$y^3 - 3y^2x + 3yx^2 - x^3 + y^2 - x^2 - 3y + x = 0.$$
$$y^2 - 3yx + 2x^2 + y = 0.$$

$N = 6$. La première courbe a un point double à l'infini dans la direction de la droite $y = x$; les tangentes en ce point sont la droite de l'infini et la droite $y = x + 1$. La deuxième courbe passe par ce point et a la même tangente, ce qui fait trois points communs aux deux courbes; ainsi $\omega = 3$, $N - \omega = 6 - 3 = 3$, et les courbes ont trois points d'intersection à distance finie. L'un de ces points est l'origine des coordonnées; les deux autres sont déterminés par l'équation finale $3x^2 - 7x + 3 = 0$.

VIII.
$$y^2x - 2x^2y + x^3 + y^2 - 5xy + 4x^2 + 2y = 0.$$
$$2y^2x - 4x^2y + 2x^3 - y^2 + 5x^2 + 4y = 0.$$

$N = 9 - 1 = 8$. Les deux courbes ont chacune un point double en un même point de l'infini, dans la direction de la droite $y = x$, et ont les mêmes tangentes en ce point, lesquelles ont pour équations

$$y = x + 1, \quad y = x + 2.$$

Ce qui fait six points communs à l'infini : $\omega = 6$ et $N - \omega = 2$. Ainsi les deux courbes n'ont que deux points d'intersection à distance finie. Ces points sont à l'origine des coordonnées, où les deux courbes sont tangentes à l'axe Ox.

IX.
$$x(y - x)^3 - (3y + 4x)(y - x) + 6y = 0,$$
$$x(y - x)^2 - 3x(y - x) + 2y = 0.$$

$N = 12 - 1 = 11$. La première courbe a un point triple à l'infini, dans la direction de la droite $y = x$; les tangentes en ce point ont pour équations

$$y = x + 1, \quad y = x + 2, \quad y = x + 3.$$

La courbe est tangente à l'axe Oy, à l'infini.

La deuxième courbe est aussi tangente à cet axe en ce point, et a un point double coïncidant avec le point triple de la première; en outre, ses deux branches sont tangentes à deux branches de celle-ci : ce qui fait huit points communs aux deux courbes, et un neuvième au point de contact sur l'axe Oy; ainsi $\omega = 9$ et $N - \omega = 2$. Les courbes n'ont donc que deux points communs à distance finie. Ces deux points coïncident à l'origine des coordonnées où les deux courbes sont tangentes à l'axe Ox.

X. $(x, 2)y^4 + (x, 4)y^2 + (x, 5)y + (x, 2)y^3 + (x, 5) = 0.$
$(x, 8)y^5 + (x, 9)y^3 + (x, 6)y^4 + (x, 4)y^2 + (x, 3)y + (x, 4) = 0.$

(x, α) désigne un polynôme quelconque en x du degré α [*]. On ne peut déterminer que N. On a $N = 6.13 - 1.4 - 2.8 = 78 - 20 = 58$, quels que soient les polynômes; ce qui s'accorde avec la formule de M. Minding, qui donne

$$4.8 + \frac{11}{2} + \frac{11}{2} + 5 + 5 + 5 = 4.8 + 11 + 15 = 58.$$

La première courbe a trois points à l'infini, autres que les trois qui s'y trouvent aux extrémités des axes coordonnés; et la seconde courbe n'en a qu'un, lequel se trouve infiniment voisin de l'axe des x, dû à ce que la courbe est tangente en ce point à la droite de l'infini, de sorte que les deux courbes n'auront pas de points communs s'exprimant par $x = \infty$, $y = \infty$, quels que soient les polynômes multiplicateurs des puissances de y; mais elles pourront en avoir aux extrémités des axes coordonnés, s'exprimant par $y = 0$, $x = \infty$, ou bien $x = 0$, $y = \infty$, selon ce que seront les polynômes.

XI. $bx^2y^4 + ay^4 + gx^3y + exy^2 + lx^3 + cy^2 + kx^2 + h = 0.$
$6x^5y^2 + \mu x^2 + \delta x^2 y + \gamma y + \lambda = 0.$

$N = 42 - 16 = 26$. La première courbe n'a qu'un point à l'infini, autre que les cinq qui s'y trouvent aux extrémités des deux axes coordonnés, et la seconde courbe n'en a aucun; en outre, les deux courbes n'ont pas de contact sur les axes Ox, Oy. Donc $\omega = 0$, et les deux

[*] Exemple donné par M. Minding dans son *Mémoire sur le degré de l'équation finale qui résulte de l'élimination* (*Journal de Crelle,* t. XXII, 1841, p. 178, reproduit dans le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, t. VI, 1841, p. 412-418).

courbes ont leurs vingt-six points d'intersection à distance finie; ce qui s'accorde avec le résultat de M. Minding.

XII.
$$bx^2y^4 + gx^3y + exy^2 + fy^2 + kx^2 + h = 0.$$
$$6x^5y^2 + \mu x^4 + \delta x^2y + \gamma y + \lambda = 0.$$

$N = 42 - 6 - 10 = 26$. Ces équations sont les mêmes que les précédentes, où l'on a fait $a = 0$ et $l = 0$ dans la première.

La première courbe a l'axe Ox pour asymptote, et l'axe Oy pour asymptote double; en d'autres termes, la courbe a deux points à l'infini sur Ox, et trois points à l'infini sur Oy.

La seconde courbe a une asymptote double coïncidant avec Ox, et cinq asymptotes coïncidant avec Oy. Ainsi les deux courbes ont un point de contact (c'est-à-dire deux points consécutifs) à l'infini sur l'axe Ox, et un contact double (trois points consécutifs) à l'infini sur l'axe Oy; ce qui fait $\omega = 1 + 2 = 3$, $N - \omega = 23$. Ainsi les deux courbes ont vingt-trois points communs à distance finie.

Les trois points qui entrent dans ω forment trois couples de solutions des deux équations, savoir :

$$y = 0,\ x = \infty;\quad x = 0,\ y = \infty;\quad x = 0,\ y = \infty.$$

Ce résultat s'accorde avec la méthode analytique de M. Minding.