JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. LAURENT

Sur un théorème de Poisson

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 17 (1872), p. 422-425.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1872_2_17__422_0>

Sur un théorème de Poisson;

Par M. H. LAURENT.

Poisson, dans le *Journal de l'École Polytechnique* (15e Cahier), a montré que, si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ étaient les intégrales d'un problème de Dynamique dont les variables sont $p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$, on avait identiquement, en appelant t le temps,

$$\frac{d(\alpha_i, \alpha_j)}{dt} = 0,$$

$$\frac{d(\alpha_i, \beta_j)}{dt} = 0,$$

$$\frac{d(\beta_i, \beta_j)}{dt} = 0.$$

On comprend toute l'importance du théorème de Poisson. En effet, si (α_i, α_j) ne se réduit pas identiquement à une constante ou à une combinaison des intégrales déjà trouvées, ce sera une nouvelle intégrale. Les fonctions (α_i, α_j) ne sont pas les seules qui jouissent de cette propriété remarquable de se réduire à des constantes, et j'ai déjà prouvé que le déterminant $\frac{D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)}{D(q_1, q_2, \ldots, p_1, p_2, \ldots, p_k)}$ jouissait de la même propriété, ce qui peut servir à déterminer la dernière intégrale quand on connaît les $2k - 1$ autres.

Je vais prouver maintenant que la somme

$$(m) \qquad (\alpha_\lambda, \alpha_\mu, \alpha_\nu, \alpha_\rho) = \sum_{i,j} \frac{D(\alpha_\lambda, \alpha_\mu, \alpha_\nu, \alpha_\rho)}{D(q_i, q_j, p_i, p_j} = \Theta$$

jouit de la même propriété. Je pose, pour abréger,

$$(n)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{R}_{i,j} = \frac{\mathrm{D}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)}{\mathrm{D}(q_i, q_j, p_i, p_j)} = \mathrm{R}_{j,i},\\ &\frac{d\alpha_m}{dq_n} = s_n^m, \quad \frac{d\alpha_m}{dp_n} = t_n^m. \end{aligned}\right.$$

En différentiant la formule (m), on a

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{ij}\mathrm{R}_{i,j},$$

ou

$$\frac{d\Theta}{dt} = \sum_{ij}\frac{d\mathrm{R}_{ij}}{ds_i^1}\frac{d}{dt}\frac{d\alpha_1}{dq_i} + \frac{d\mathrm{R}_{ij}}{ds_i^2}\frac{d}{dt}\frac{d\alpha_2}{dq_i} + \ldots;$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{d\Theta}{dt} = \sum_{i,j,\varepsilon}\left(\frac{d\mathrm{R}_{ij}}{ds_i^\varepsilon}\frac{d}{dt}\frac{d\alpha_\varepsilon}{dq_i} + \frac{d\mathrm{R}_{ij}}{ds_j^\varepsilon}\frac{d}{dt}\frac{d\alpha_\varepsilon}{dq_j} + \frac{d\mathrm{R}_{ij}}{dt_i^\varepsilon}\frac{d}{dt}\frac{d\alpha_\varepsilon}{dp_i} + \frac{d\mathrm{R}_{ij}}{dt_j^\varepsilon}\frac{d}{dt}\frac{d\alpha_\varepsilon}{dp_j}\right),$$

ou bien, en ayant égard à la formule suivante, où H est la constante des forces vives,

$$\frac{d}{dt}\frac{d\alpha_\varepsilon}{dq_i} = \left(\frac{d\mathrm{H}}{dq_i}, \alpha_\varepsilon\right),$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \sum_{i,j,\varepsilon}\left[\frac{d\mathrm{R}_{ij}}{ds_i^\varepsilon}\left(\frac{d\mathrm{H}}{dq_j}, \alpha_\varepsilon\right) + \frac{d\mathrm{R}_{ij}}{dt_i^\varepsilon}\left(\frac{d\mathrm{H}}{dp_i}, \alpha_\varepsilon\right) + \frac{d\mathrm{R}_{ij}}{ds_j^\varepsilon}\left(\frac{d\mathrm{H}}{dq_j}, \alpha_\varepsilon\right) + \frac{d\mathrm{R}_{ij}}{dt_j^\varepsilon}\left(\frac{d\mathrm{H}}{dp_j}, \alpha_\varepsilon\right)\right].$$

Je dis que le second membre de cette formule est identiquement nul; en effet, il contient deux termes en $\frac{d^2\mathrm{H}}{dq_i\,dq_j}$: par exemple, le premier a pour coefficient

$$\sum_\varepsilon\frac{d\mathrm{R}_{ij}}{ds_i^\varepsilon}\frac{d\alpha_\varepsilon}{dp_j} = 0,$$

l'autre a pour coefficient

$$\sum_\varepsilon\frac{d\mathrm{R}_{ij}}{ds_j^\varepsilon}\frac{d\alpha_\varepsilon}{dp_j} = 0.$$

Les termes en $\frac{d^2H}{dq_i\,dp_j}$ ont pour coefficients

$$-\sum_\varepsilon \frac{dR_{ij}}{ds_i^\varepsilon}\frac{d\alpha_\varepsilon}{dq_j} \quad \text{et} \quad \sum_\varepsilon \frac{dR_{ij}}{dt_i^\varepsilon}\frac{d\alpha_\varepsilon}{dp_j},$$

c'est-à-dire $-$ R et $+$ R. Leur somme est donc nulle; donc enfin

$$\frac{d\Theta}{dt} = 0,$$

et, par suite, Θ reste constant pendant toute la durée du mouvement. Il est clair que la démonstration précédente peut être généralisée. Et si l'on pose

$$(\alpha_\lambda, \alpha_\mu, \alpha_\nu, \alpha_\rho, \alpha_\sigma, \alpha_\xi) = \sum_{ijl} \frac{D(\alpha_\lambda, \alpha_\mu, \alpha_\nu, \alpha_\rho, \alpha_\sigma, \alpha_\xi)}{D(q_i, q_j, q_l, p_i, p_j, p_l)},$$

la quantité $(\alpha_\lambda, \alpha_\mu, \alpha_\nu, \alpha_\rho, \alpha_\sigma, \alpha_\xi)$ sera encore constante pendant toute la durée du mouvement. On arrive ainsi, comme cas particulier, à ce théorème, que le déterminant de toutes les intégrales est une constante.

On peut s'assurer par un calcul direct que la somme de déterminants dont je viens de parler ne se réduit pas identiquement à une constante ou à une combinaison d'intégrales déjà trouvées. Prenons, par exemple, les équations canoniques

$$\frac{dx'}{dt} = x, \quad \frac{dx}{dt} = x',$$
$$\frac{dy'}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = y',$$
$$\frac{dz'}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = z'.$$

On vérifie aisément que

$$(\mathrm{P}') \qquad \begin{cases} \alpha = x^2 - x'^2, & \gamma = zx' - xz', \\ \beta = y^2 - y'^2, & \delta = yz' - zy' \end{cases}$$

sont des intégrales; et si l'on forme

$$\sum \frac{D(\alpha, \beta, \gamma, \delta)}{D(x, x', y, y')},$$

on trouve

$$(xz - x'z')(yz - y'z') = \text{const.} = \theta.$$

Or je dis que θ n'est pas une fonction de α, β, γ, δ, ou, si l'on veut, je dis qu'en faisant $\gamma = 0$, $\delta = 0$, on ne peut pas calculer θ en fonction de α et β. En effet, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ donnent $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \lambda$, et l'on a

$$\alpha = x^2(1 - \lambda^2), \quad \beta = y^2(1 - \lambda^2),$$
$$\theta = xyz^2(1 - \lambda^2)^2;$$

$(1 - \lambda)$ peut s'éliminer, et l'on aurait

$$\alpha\beta z^2 = \theta xy, \quad \beta x^2 = \alpha y^2.$$

Si l'on différentie ces équations en laissant α et β constants, on doit avoir $d\theta = 0$. Or on a

$$2\alpha\beta z dz = \theta\, dxy + xy\, d\theta, \quad \beta x dx = \alpha y dy;$$

$d\theta$ ne peut pas être identiquement nul; donc, enfin, θ ne peut être fonction de α et β.

C. Q. F. D.