JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAXIMILIEN MARIE

Extrait d'une lettre adressée à M. Liouville

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 17 (1872), p. 337-347.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1872_2_17__337_0>

Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville

PAR M. MAXIMILIEN MARIE.

De nouvelles recherches que je viens d'entreprendre relativement à la *Théorie des fonctions de variables imaginaires* ont incidemment ramené mon attention sur les questions que j'ai traitées dans le *Journal de Mathématiques*, de 1858 à 1862, et m'ont suggéré diverses remarques qui me paraissent assez intéressantes pour mériter d'être communiquées à vos lecteurs.

Il s'agit de l'enveloppe imaginaire des conjuguées, c'est-à-dire de la suite des points d'un lieu plan pour lesquels $\frac{dy}{dx}$ est réel. Cette ligne ne saurait trop attirer l'attention, puisqu'elle complète sous une infinité de rapports la courbe réelle, dont elle est la véritable supplémentaire, qu'elle joue le même rôle dans une infinité de questions et qu'elle la remplace totalement, dans ses relations avec les conjuguées, lorsque les coefficients de l'équation deviennent imaginaires.

L'enveloppe imaginaire des conjuguées est le lieu des points de contact des tangentes au lieu complet, dont les coefficients angulaires sont réels. C'est en quelque sorte sa définition, mais je ne l'avais pas présentée dans ces termes qui en font ressortir immédiatement plusieurs propriétés importantes.

Il résulte d'abord de cette manière de concevoir l'enveloppe imaginaire que les $m(m-1)$ tangentes, qu'on peut mener à une courbe de degré m parallèlement à une direction réelle donnée, sont les tangentes qu'on peut mener parallèlement à cette direction au système des deux enveloppes, de sorte que les deux courbes se complètent l'une l'autre sous ce rapport; il en résulte aussi que les asymptotes de l'enveloppe imaginaire sont les asymptotes du lieu complet dont les coefficients angulaires sont réels et les ordonnées à l'origine imaginaires; on en conclut encore que l'enveloppe imaginaire touche l'enveloppe réelle en ses points d'inflexion, puisque les tangentes aux points d'inflexion représentent des couples de tangentes réelles, confondues, qui vont devenir imaginaires si leur coefficient angulaire varie infiniment peu dans un sens convenable; mais on en déduit cette proposition bien plus importante que *lorsque les deux enveloppes coexistent, elles sont toujours réciproques l'une de l'autre,* c'est-à-dire que si, ayant déterminé l'enveloppe imaginaire des conjuguées d'un lieu, on considère le lieu dont l'équation représenterait cette enveloppe imaginaire en coordonnées réelles, on retrouvera la première courbe pour enveloppe imaginaire des conjuguées du second lieu.

En effet, soit

$$y = ax + \varphi(a)$$

l'équation générale des tangentes à une courbe $f(x,y) = 0$, de degré m, de sorte que $\varphi(a)$ aura $m(m-1)$ valeurs : si l'enveloppe imaginaire existe, $\varphi(a)$ pourra devenir imaginaire pour certaines valeurs de a. Soient

$$\varphi_1(a) \pm \sqrt{\varphi_2(a)}$$

deux formes de $\varphi(a)$ qui deviennent imaginaires en même temps; l'équation

$$y = ax + \varphi_1(a) \pm \sqrt{\varphi_2(a)}$$

représentera deux tangentes à l'enveloppe réelle, lorsque $\varphi_2(a)$ sera positif, et deux tangentes à l'enveloppe imaginaire dans le cas contraire; mais si $\varphi_2(a)$ est négatif, les deux tangentes à l'enveloppe imaginaire seront représentées en coordonnées réelles par

$$y = ax + \varphi_1(a) \pm \sqrt{-\varphi_2(a)};$$

les deux courbes sont donc l'une l'enveloppe des droites

$$y = ax + \varphi_1(a) \pm \sqrt{\varphi_2(a)},$$

et l'autre celle des droites

$$y = ax + \varphi_1(a) \pm \sqrt{-\varphi_2(a)};$$

par conséquent, elles sont réciproques l'une de l'autre.

La proposition suivante est énoncée dans le Mémoire adressé par moi à l'Académie des Sciences, en 1865, où je détermine celui des points critiques d'une fonction y qui limite la convergence du développement de cette fonction, Mémoire qui est resté jusqu'ici inédit, le Rapport n'ayant pas encore été présenté. Voici cette proposition :

Lorsque les coefficients, d'abord réels, d'une équation $f(x, y) = 0$ *reçoivent des accroissements infiniment petits imaginaires, la courbe réelle que représentait d'abord l'équation se transforme instantanément en enveloppe imaginaire, sans changer de forme qu'infiniment peu. En d'autres termes, l'enveloppe imaginaire des conjuguées d'un lieu dont l'équation a ses coefficients imaginaires est substituée à la courbe réelle que représentait l'équation à coefficients réels de même forme, et est en continuité géométrique avec cette courbe réelle.* En effet, si l'on donne à x, dans la nouvelle équation, les valeurs des abscisses des points de l'ancienne courbe réelle, d'une part, les valeurs correspondantes de y différeront infiniment peu des ordonnées de l'ancienne courbe réelle, et, de l'autre, les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ aux points correspondants, qui étaient tout à l'heure réelles, auront maintenant leurs parties imaginaires infiniment petites; ces points seront donc à la fois infiniment voisins de l'ancienne courbe réelle et de la nouvelle enveloppe.

J'ai démontré dans le tome VI, 2^e^ série, du *Journal de Mathématiques*, 1861, que si $r + r'\sqrt{-1}$ est la valeur de

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

en un point de l'enveloppe, $r + r'$ est le rayon de courbure de l'enveloppe en ce point : il ne restait donc rien à faire sur la théorie de la courbure de l'enveloppe imaginaire; cependant voici une relation remarquable entre les développées des deux enveloppes. On possède si peu de théorèmes généraux sur la théorie des courbes que je ne crois pas devoir passer celui-ci sous silence : *La développée de l'enveloppe imaginaire des conjuguées d'une courbe est l'enveloppe imaginaire des conjuguées de la développée de cette courbe*, et réciproquement, puisque les deux enveloppes sont réciproques. En effet, le coefficient angulaire de la tangente à l'enveloppe imaginaire en un quelconque de ses points étant réel, celui de la normale l'est aussi; d'ailleurs x et y désignant les coordonnées d'un point de l'enveloppe, chacune des équations

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

et

$$Y - y = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}(X - x)$$

représente une seule droite, la première réellement tangente à l'enveloppe imaginaire et la seconde effectivement normale, de sorte que la développée de l'enveloppe imaginaire est l'enveloppe de la droite unique représentée par l'équation

$$Y - y = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}(X - x);$$

mais, d'un autre côté, la développée de la courbe réelle étant l'enveloppe de la droite représentée par l'équation

$$Y - y = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}(X - x),$$

lorsque x et y sont réels, il en résulte que, quel que soit le point du lieu dont x et y soient les coordonnées, le faisceau

$$Y - y = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}(X - x)$$

est toujours tangent au lieu représenté par l'équation de la développée; et enfin si le point $[x, y]$ appartient à l'enveloppe imaginaire, $\frac{dy}{dx}$ étant réel, la droite

$$Y - y = - \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} (X - x)$$

est effectivement tangente à l'enveloppe imaginaire des conjuguées de la courbe qu'elle enveloppe, lorsqu'elle est réelle, c'est-à-dire de la développée de la courbe réelle proposée.

On vérifiera aisément cette proposition sur l'hyperbole.

J'ai fait voir, dans le tome IV, 2ᵉ série, du *Journal de Mathématiques*, 1859, que la rectification de l'enveloppe imaginaire est fournie par la même intégrale qui donne celle de la courbe réelle, et, à ce propos, après avoir démontré que la période imaginaire de l'intégrale rectificatrice de l'hyperbole est le produit par $\sqrt{-1}$ de la différence totale entre la somme des longueurs des deux branches de l'hyperbole supplémentaire et la somme des longueurs des deux asymptotes communes, j'ai été amené, pour interpréter semblablement la période réelle, à constater que la rectificatrice de l'une des deux hyperboles a pour périodes les produits par $\sqrt{-1}$ de celles de l'autre. Le fait est général : *l'intégrale rectificatrice de l'enveloppe imaginaire des conjuguées d'une courbe a toujours pour périodes les produits par* $\sqrt{-1}$ *des périodes de l'intégrale rectificatrice de la courbe réelle*, et réciproquement, puisque les deux enveloppes sont réciproques. En effet, il est clair, d'une part, que l'intégrale

$$\int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

a pour périodes réelles les longueurs des anneaux fermés de la courbe réelle.

D'un autre côté, si l'enveloppe imaginaire présente un anneau fermé composé de points imaginaires conjugués deux à deux, les tangentes à cet anneau en deux points imaginaires conjugués seront parallèles, car les coefficients différentiels

$$\frac{d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1}}{d\alpha + d\beta\sqrt{-1}} \quad \text{et} \quad \frac{d\alpha' - d\beta'\sqrt{-1}}{d\alpha - d\beta\sqrt{-1}}$$

en ces deux points ne différeront pas l'un de l'autre, en raison de l'hypothèse

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = \frac{d\beta'}{d\beta}$$

qu'entraîne celle de leur réalité; les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ aux deux points considérés de l'anneau seront donc égales, et quant à celles de dx, elles seront telles que $d\alpha + d\beta\sqrt{-1}$ et $d\alpha - d\beta\sqrt{-1}$. D'un autre côté, si l'on fait parcourir l'anneau entier au point mobile, les deux éléments conjugués seront parcourus en sens contraires; par conséquent, la somme des éléments de l'intégrale, correspondant à ces deux éléments de l'anneau, sera

$$2\,d\beta\sqrt{-1}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2};$$

elle sera imaginaire, sans partie réelle, et représentera le produit par $\sqrt{-1}$ de la somme des deux éléments réalisés de l'anneau. Les produits par $\sqrt{-1}$ des longueurs des anneaux fermés de l'enveloppe imaginaire sont donc les périodes imaginaires de l'intégrale

$$\int dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

D'ailleurs, les deux enveloppes étant réciproques, il est clair que, si l'on forme les deux intégrales qui les rectifieraient réelles, chacune de ces deux intégrales aura pour périodes celles de l'autre multipliées par $\sqrt{-1}$. Cette proposition, au reste, dérive immédiatement de ce théorème plus général que les quadratrices de deux courbes conjuguées l'une de l'autre ont chacune pour périodes les produits par $\sqrt{-1}$ de celles de l'autre. En effet, si l'on désigne par z la fonction de x

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

relative à un lieu $f(x, y) = 0$, la quadratrice de la courbe dont l'ordonnée serait z sera la rectificatrice de celle dont l'ordonnée est y. Or, suivant que le point $[x, y]$ appartiendra à l'enveloppe réelle ou à l'enveloppe imaginaire du lieu $f(x, y) = 0$, z et x seront tous deux réels, ou bien z sera réel et x imaginaire; par conséquent, le lieu des points $[z, x]$, correspondant à l'enveloppe imaginaire du lieu $f(x, y) = 0$, ne sera autre chose que la conjuguée à z réels du lieu des points $[z, x]$ correspondant à l'enveloppe réelle.

J'ai, dans le même tome IV, 2e série, du *Journal de Mathématiques,* décomposé l'intégrale $\int y\,dx$ prise entre des limites imaginaires $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$ en trois parties qui, en désignant par $[x'_0, y'_0]$ et $[x'_1, y'_1]$ les points de contact avec l'enveloppe totale des deux conjuguées menées par les points $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$, sont représentées par

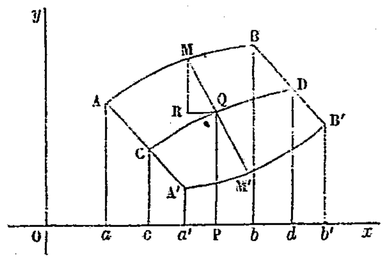
$$\int_{x_0, y_0}^{x'_0, y'_0} y\,dx, \quad \int_{x'_0, y'_0}^{x'_1, y'_1} y\,dx, \quad \text{et} \quad \int_{x'_1, y'_1}^{x_1, y_1} y\,dx.$$

La première et la troisième intégrale représentent, à des parties algébriques près, les aires correspondant aux arcs des deux conjuguées compris entre les limites de ces intégrales, et lorsque ces conjuguées touchent la courbe réelle, l'intégrale intermédiaire représente à plus forte raison une aire connue.

Mais, si les deux conjuguées menées par les limites ne touchaient pas la courbe réelle, l'intégrale intermédiaire se rapportait à l'enveloppe imaginaire, et je ne savais ni l'évaluer ni l'interpréter, en sorte qu'il y avait là une lacune fâcheuse. Cette lacune est aujourd'hui comblée, et l'on pourrait maintenant évaluer avec une approximation indéfinie, par les formules de quadrature approchée, toute intégrale $\int y\,dx$ portant sur une fonction y définie par une équation algébrique quelconque et prise entre des limites quelconques.

La formule que je vais établir s'appliquant à un parcours quelconque, il ne sera pas nécessaire de supposer qu'il s'agisse de l'enveloppe imaginaire, mais il est tout simple qu'elle ne présentera d'intérêt véritable que par rapport à cette enveloppe, courbe algébrique bien définie, qu'on aura toujours dû discuter avec soin et dont on aura l'équation en coordonnées réelles, équation toujours plus ou moins semblable à celle de la courbe réelle.

Soient AB un arc d'une courbe quelconque formée des points correspondant à une suite continue, mais arbitraire, de solutions de l'équation du lieu, et A'B' l'arc dont les points correspondraient aux valeurs de x et de y conjuguées de celles qui donnent les points de AB.



L'arc A'B' fera ou non partie du lieu selon que l'équation de ce lieu aura ses coefficients réels ou en aura d'imaginaires. Dans le second cas, cet arc A'B' appartiendrait au lieu représenté par l'équation conjuguée de la proposée; mais cette remarque n'a pas d'importance dans la question, car si l'on a pu construire par points l'arc AB, on saura par là même construire l'arc A'B'. En effet, si $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$ sont les coordonnées d'un point M de AB, pour obtenir ce point on aura dû former le contour OPQRM dont les côtés représenteraient respectivement en grandeur et en signe α, α', β et β'. Or le point M' conjugué de M s'obtiendra en prolongeant simplement MQ d'une longueur égale à elle-même.

Enfin, soit CD le lieu des milieux des cordes réelles joignant deux à deux les points correspondants de AB et de A'B'.

L'intégrale $\int y\,dx$ prise le long de l'arc AB est

$$\Sigma(\alpha' + \beta'\sqrt{-1})(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})$$

ou

$$\Sigma(\alpha' d\alpha - \beta' d\beta) + \sqrt{-1}\,\Sigma(\alpha' d\beta + \beta' d\alpha).$$

Mais les aires $\mathrm{AB}ba$ et $\mathrm{A'B'}b'a'$ ont respectivement pour mesures

$$\Sigma(\alpha'+\beta')(d\alpha+d\beta)$$

ou

$$\Sigma(\alpha' d\alpha+\beta' d\beta)+\Sigma(\alpha' d\beta+\beta' d\alpha),$$

et

$$\Sigma(\alpha'-\beta')(d\alpha-d\beta)$$

ou

$$\Sigma(\alpha' d\alpha+\beta' d\beta)-\Sigma(\alpha' d\beta+\beta' d\alpha).$$

Il en résulte

$$\Sigma(\alpha' d\beta+\beta' d\alpha)=\tfrac{1}{2}(\mathrm{AB}ba-\mathrm{A'B'}b'a')$$

et

$$\Sigma(\alpha' d\alpha+\beta' d\beta)=\tfrac{1}{2}(\mathrm{AB}ba+\mathrm{A'B'}b'a').$$

Cette dernière équation donne

$$\Sigma(\alpha' d\alpha-\beta' d\beta)=2\Sigma\alpha' d\alpha-\tfrac{1}{2}(\mathrm{AB}ba+\mathrm{A'B'}b'a').$$

D'ailleurs α' et α étant les coordonnées d'un point quelconque de CD,

$$\Sigma\alpha' d\alpha=\mathrm{CD}dc;$$

par conséquent

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} y\,dx=2\mathrm{CD}dc-\tfrac{1}{2}(\mathrm{AB}ba+\mathrm{A'B'}b'a')+\tfrac{1}{2}(\mathrm{AB}ba-\mathrm{A'B'}b'a')\sqrt{-1}.$$

La même formule appliquée à l'arc A'B' donnerait

$$\int_{\mathrm{A'}}^{\mathrm{B'}} y\,dx=2\mathrm{CD}dc-\tfrac{1}{2}(\mathrm{AB}ba+\mathrm{A'B'}b'a')-\tfrac{1}{2}(\mathrm{AB}ba-\mathrm{A'B'}b'a')\sqrt{-1}.$$

Si les deux arcs AB et A'B' se rejoignaient aux deux extrémités, sur la courbe réelle, car deux points imaginaires conjugués restent toujours à distance finie tant que les parties imaginaires de leurs coordonnées ne s'évanouissent pas simultanément, l'ensemble de ces deux arcs formerait un contour fermé, et si le point $[xy]$ parcourait ce contour, la somme des éléments de l'intégrale $\int y\,dx$ s'obtiendrait par la soustraction des formules précédentes, parce que l'un des arcs serait parcouru en sens contraire de celui qui a été supposé dans les formules précédentes.

L'intégrale se réduirait donc à

$$(\mathrm{AB}ba - \mathrm{A'B'}b'a')\sqrt{-1},$$

c'est-à-dire à l'aire enveloppée par le contour.

Il en résulte que l'aire enveloppée par un contour composé de points imaginaires conjugués est constante et égale à celle d'un anneau de conjuguée compris entre les mêmes branches de la courbe réelle.

Cette proposition ne présente aucun intérêt géométrique comparable à celui qui s'y attache lorsqu'il s'agit des conjuguées, courbes algébriques bien définies et liées déjà par tant de rapports à la courbe réelle, mais elle a une certaine importance au point de vue analytique.

La formule qui précède n'a d'importance que parce qu'elle fournit le moyen d'exprimer simplement la valeur de l'intégrale $\int y\,dx$ prise le long de l'enveloppe imaginaire des conjuguées. Un exemple très-simple suffira pour indiquer l'usage qu'on en pourra faire.

Supposons qu'il s'agisse du lieu

$$x^2 + y^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2.$$

L'enveloppe est, comme je l'ai montré dans le tome VI, 2e série, du *Journal de Mathématiques*, le cercle

$$x^2 + y^2 = (r + r')^2 :$$

c'est la courbe AB.

L'enveloppe conjuguée est

$$x^2 + y^1 = (r - r')^2 :$$

c'est A'B'.

Quant au lieu des points milieux des cordes qui joignent les points conjugués de l'une et de l'autre enveloppe, c'est le cercle

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

L'intégrale $\int y\,dx$, prise le long de l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu

$$x^2 + y^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2,$$

est donc, pour un tour entier,

$$2\pi r^2 - \tfrac{1}{2}\pi[(r + r')^2 + (r - r')^2] + \tfrac{1}{2}\pi[(r + r')^2 - (r - r')^2]\sqrt{-1}.$$

ou

$$\pi(r + r'\sqrt{-1})^2;$$

ce à quoi l'on devait s'attendre et que j'avais annoncé dans le tome IV, 2e série, du *Journal de Mathématiques*, comme une chose qui devait être, parce que la période de l'intégrale $\int y\,dx$ relative au lieu

$$x^2 + y^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2$$

devait évidemment être $\pi(r + r'\sqrt{-1})^2$; mais je n'aurais pas pu alors en donner une démonstration directe.