

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

J. LIOUVILLE

Sur la forme ternaire  $x^2 + 2y^2 + 3z^2$

*Journal de mathématiques pures et appliquées* 2<sup>e</sup> série, tome 14 (1869), p. 359-360.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1869\\_2\\_14\\_\\_359\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1869_2_14__359_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur la forme ternaire*

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soit  $m$  un entier donné, impair et premier à 3, de façon que l'on ait

$$m = 6\mu \pm 1.$$

On demande une expression simple du nombre  $N$  des représentations de  $m$  sous la forme ternaire indiquée

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2,$$

c'est-à-dire du nombre  $N$  des solutions que l'équation indéterminée

$$m = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

comporte quand on admet pour  $x, y, z$  des valeurs entières quelconques, positives, nulles ou négatives.

Or, je trouve que l'on a toujours

$$N = F(6m),$$

en désignant généralement, comme d'ordinaire, par

$$F(k)$$

le nombre des formes quadratiques binaires et impaires (primitives ou non, mais distinctes) de déterminant  $-k$ . Au surplus, le mot *impaires* pourrait être supprimé ici; car, dans le cas présent, il n'y a lieu qu'à de telles formes.

La démonstration du théorème que je viens d'énoncer n'est pas difficile. Pour le moment, toutefois, je me bornerai à vérifier ma formule sur deux exemples, tirés des plus petits entiers qu'on puisse employer après l'unité, savoir  $m = 5$ , puis  $m = 7$ .

Pour  $m = 5$ , la formule indiquée donne

$$N = F(30) = 4,$$

résultat exact, en vertu de l'identité

$$5 = 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2.$$

Pour  $m = 7$ , elle fournit ensuite

$$N = F(42) = 4,$$

et cela s'accorde avec l'identité

$$7 = (\pm 2)^2 + 2 \times 0^2 + 3(\pm 1)^2.$$

Il serait inutile de pousser plus loin ces calculs.

