JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Nouveau théorème concernant la fonction numérique $F(k)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 14 (1869), p. 260-262.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1869_2_14__260_0>

Nouveau théorème concernant la fonction numérique $F(k)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Nous désignons, à notre ordinaire, par

$$F(k)$$

le nombre des formes quadratiques binaires, primitives ou non, de déterminant $-k$, dont un au moins des coefficients extrêmes est impair. Soit m un nombre entier donné, impair et premier à 5, et t un entier variable, dont les valeurs successives sont celles de la suite naturelle

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ldots,$$

en s'arrêtant au moment où l'on cesserait d'avoir

$$10m - 25t^2 > 0.$$

Cela posé, le théorème que je veux énoncer ici consiste en ce que l'on a toujours

$$F(10m) + 2\Sigma F(10m - 25t^2) = 2\zeta_1(m),$$

équation où je représente, comme d'habitude, par

$$\zeta_1(m)$$

la somme des diviseurs de m, et où le signe sommatoire porte sur les valeurs de t.

Vérifions cette équation sur quelques exemples. Et d'abord, soit $m = 1$. Elle se réduit alors à

$$F(10) = 2,$$

ce qui est exact.

Pour $m = 3$, elle donne

$$F(30) + 2F(5) = 8,$$

ce qui est vrai aussi, attendu que l'on a, par un procédé direct,

$$F(5) = 2$$

et

$$F(30) = 4.$$

D'après notre énoncé même, nous ne pouvons pas prendre

$$m = 5.$$

Mais pour

$$m = 7,$$

il nous viendra

$$F(70) + 2F(70 - 25.1^2) = 2\zeta_1(7),$$

c'est-à-dire

$$F(70) + 2F(45) = 16.$$

Or on a d'une part

$$F(45) = 6,$$

et d'autre part

$$F(70) = 4.$$

La vérification cherchée a donc lieu.

Il en serait de même pour

$$m = 9,\ 11,\ 13,\ 17, \ldots;$$

mais à quoi bon pousser plus loin ces calculs?

L'équation

$$F(10m) + 2\Sigma F(10m - t^2) = \zeta_1(m),$$

où l'entier m est premier à 10, nous a paru mériter une mention spéciale; mais elle peut être généralisée : je veux dire qu'il y a une formule analogue, quoique naturellement un peu moins simple, pour le cas d'un entier donné quelconque. Ce sera le sujet d'un autre article.