JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

BOUSSINESQ

Addition au mémoire intitulé: Théorie nouvelle des ondes lumineuses

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 13 (1868), p. 425-438.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1868_2_13__425_0>

Gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

ADDITION AU MÉMOIRE INTITULÉ :

THÉORIE NOUVELLE DES ONDES LUMINEUSES;

PAR M. BOUSSINESQ.

§ I. — *Puissance réfractive et pouvoir rotatoire des mélanges transparents.*

Dans ma *Théorie des ondes lumineuses* (t. XIII, p. 316), j'ai supposé que les déplacements u_1, v_1, w_1 des molécules pondérables contenues dans un volume très-petit sont, pour toutes celles-ci, les mêmes fonctions de l'état de l'éther adjacent. Cela revient à admettre qu'elles se comportent toutes de la même manière. Or il est probable que, dans un mélange de plusieurs corps, ou même dans tout milieu non cristallisé, amorphe ou fluide, les molécules de différente nature ou orientées diversement sont aussi diversement agitées par la même onde lumineuse qui les atteint. Si le corps est toujours supposé transparent, les déplacements, que j'appellerai u'_1, v'_1, w'_1, de ces molécules, seront bien des fonctions linéaires des déplacements (u, v, w) de l'éther en un point quelconque très-voisin, et des dérivées des divers ordres de u, v, w par rapport à x, y, z; mais les coefficients de ces fonctions linéaires varieront d'une molécule à une autre.

L'action totale exercée par la matière pondérable, suivant l'axe des x, sur un volume élémentaire ϖ d'éther, s'obtiendra en multipliant la masse de chaque molécule pondérable contenue dans ce volume à l'époque t par l'accélération correspondante $\frac{d^2u'_1}{dt^2}$, changée de signe, et en faisant la somme de tous les produits pareils. Cette somme vaut, sauf le signe, la masse totale pondérable $\rho_1\varpi$ multipliée par ce que j'appellerai la moyenne des valeurs de $\frac{d^2u'_1}{dt^2}$. Il suffira d'admettre que,

dans l'équation (2) du Mémoire, la première du mouvement, $\frac{d^2 u_1}{dt^2}$ représente cette valeur moyenne : u_1, déplacement moyen suivant les x des molécules pondérables, aura les mêmes expressions (3) avec $E = 0$, et (10), si le milieu est isotrope, et la même expression approchée (13), si le milieu est presque isotrope et presque symétrique. D'ailleurs, tous les déplacements étant très-petits, les variations des coefficients $A, B, C, D, Q, Q', \ldots, R, R', \ldots, S, S', \ldots, A(1+\alpha), A(1+\beta), A(1+\gamma)$, durant le mouvement, ne donneront que des termes négligeables du second ordre en u, v, w. Les résultats seront par conséquent les mêmes que s'il n'y avait qu'une seule espèce de molécules pondérables, vibrant toutes pareillement.

L'hypothèse la plus simple qu'on puisse faire sur la manière dont l'éther agite les molécules pondérables, consiste à admettre que son action sur chacune d'elles est la même que si les autres n'y étaient pas, et ne dépend, par exemple, la température étant supposée constante, que de la forme, du volume, de la densité et de l'orientation [*] de la molécule considérée. Alors chacun des coefficients $A, B, \ldots, A(1+\gamma)$ des formules (3), (10), (13), multiplié par $\rho_1 \varpi$, sera la somme des masses des molécules pondérables contenues dans l'élément ϖ de volume, respectivement multipliées par le coefficient analogue relatif à la molécule prise isolément. Comme il y aura généralement dans le milieu des molécules de plusieurs espèces, appelons $\rho', \rho'', \rho''', \ldots$ les densités partielles relatives aux diverses espèces. Considérons les molécules de la première : il est clair que le volume en contient, d'orientées dans un sens quelconque, un nombre proportionnel à $\rho' \varpi$. Donc les termes qui les concernent dans les sommes ci-dessus donneront un total proportionnel à $\rho' \varpi$. Il en sera de même des termes concernant les molécules des autres espèces, et, par suite, si $A', A'', \ldots, B', B'', \ldots, \ldots$ désignent des constantes, les coefficients seront donnés par des relations de la forme

$$A\rho_1 = A'\rho' + A''\rho'' + \ldots, \quad B\rho_1 = B'\rho' + B''\rho'' + \ldots, \ldots.$$

---

[*] Dans le cas où la chaleur serait constituée par des rotations rapides des molécules pondérables, l'influence de l'orientation serait remplacée par celle de ces rotations.

Soient ω_0 la vitesse de la lumière dans l'éther libre, ω sa vitesse dans le mélange considéré, supposé isotrope. D'après la formule sensiblement exacte $\omega = \sqrt{L}$, qui termine le § III, rapprochée des formules (7), on aura, en négligeant le terme en D,

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 = \frac{\rho_1 A}{\rho} = \frac{A'}{\rho}\rho' + \frac{A''}{\rho}\rho'' + \dots.$$

Le premier nombre est dit la *puissance réfractive* du corps. Nous pourrons donc énoncer la loi suivante, que l'expérience a déjà fait découvrir chez les gaz :

Abstraction faite de la dispersion, la puissance réfractive d'un mélange transparent est la somme des puissances réfractives des divers corps qui composent le mélange, et chacune de celles-ci est elle-même proportionnelle à la densité du corps correspondant.

Si nous négligeons toujours le terme en D, l'angle ψ[(12)], dont tourne le plan de polarisation, sera proportionnel à $\rho_1 B$ [formules (10 *bis*)], où B est une fonction linéaire des coefficients R, R', ... des formules (10). Ces coefficients, multipliés ainsi par ρ_1, sont eux-mêmes des fonctions linéaires de ρ', ρ'', ... Par conséquent :

Abstraction faite de la dispersion, le pouvoir rotatoire d'un mélange transparent est la somme des pouvoirs rotatoires des corps qui le composent, et chacun de ces pouvoirs partiels est lui-même proportionnel à la densité du corps correspondant.

C'est la loi approchée généralement admise pour les dissolutions.

§ II. — *Essai sur la rotation du plan de polarisation par le magnétisme.*

Supposons qu'un aimant se termine à ses deux pôles par deux cylindres circulaires égaux, à axe commun, laissant entre eux un intervalle. L'expérience démontre qu'en adaptant à leurs bases des armatures d'une certaine forme, et en amenant, au moyen de vis, les deux pôles à une distance convenable l'un de l'autre, l'espace compris entre eux constituera un champ magnétique d'intensité constante, c'est-à-dire que l'action magnétique y sera partout sensiblement la même. Cela posé, plaçons dans cet espace un corps homogène transparent, isotrope-

symétrique, et proposons-nous d'obtenir les lois des ondes lumineuses qui le traverseront.

Prenons pour axe des z l'axe commun des deux cylindres, pour origine des coordonnées le milieu de la distance des pôles, et pour axes des x et des y deux droites perpendiculaires entre elles et à l'axe des z. Il est clair que le milieu transparent, primitivement homogène et isotrope-symétrique, mais actuellement soumis à des actions magnétiques constantes, sera resté homogène, et, de plus, semblablement constitué par rapport à tous les systèmes d'axes qu'on obtient en faisant tourner d'un angle quelconque autour de celui des z l'ensemble des deux autres. D'ailleurs, en observant que l'aimant peut être assimilé à une infinité de courants électriques disposés deux à deux symétriquement de part et d'autre du plan des xy, on verra que le milieu transparent est aussi constitué symétriquement par rapport à ce plan. Donc, si, comme nous l'avons admis jusqu'ici, les déplacements moyens u_1, v_1, w_1 des molécules pondérables ne sont fonctions linéaires que des déplacements u, v, w de l'éther au même point, et des dérivées en x, y, z de u, v, w, ces fonctions devront être telles ici, qu'elles ne changent pas quand on change à la fois z en $-z$, w en $-w$, w_1 en $-w_1$; ou encore x en $-x$, y en $-y$, u en $-u$, v en $-v$, u_1 en $-u_1$, v_1 en $-v_1$; ou enfin x en y, y en $-x$, u en v, v en $-u$, u_1 en v_1, v_1 en $-u_1$. En effet, ces transformations reviennent, la première à changer le sens de l'axe des z, la seconde et la troisième à faire tourner autour de cet axe, de 180 et de 90 degrés respectivement, le système des deux autres. En nous bornant aux termes qui contiennent u, v, w et leurs dérivées premières, il viendra ainsi des relations de la forme

$$(24) \qquad u_1 = \mathrm{A}u - \mathrm{B}_1 v, \quad v_1 = \mathrm{A}v + \mathrm{B}_1 u, \quad w_1 = \mathrm{A}_1 w.$$

Il serait facile de voir qu'une rotation quelconque des axes des x et des y, autour de celui des z, les laisse invariables.

Ces valeurs de u_1, v_1, w_1, portées dans l'équation (2) et dans ses deux pareilles, donneront les trois équations du mouvement.

Dans le cas particulier d'ondes transversales perpendiculaires à l'axe des z, ces équations se réduisent à

$$\mu \frac{d^2 u}{dz^2} = (\rho + \rho_1 \mathrm{A}) \frac{d^2 u}{dt^2} - \rho_1 \mathrm{B}_1 \frac{d^2 v}{dt^2}, \quad \mu \frac{d^2 v}{dz^2} = (\rho + \rho_1 \mathrm{A}) \frac{d^2 v}{dt^2} + \rho_1 \mathrm{B}_1 \frac{d^2 u}{dt^2}.$$

Substituons-y les valeurs de u, v, w données par

$$\frac{u}{M} = \frac{v}{N} = \frac{w}{P} = e^{\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{z}{\omega}\right)\sqrt{-1}}, \tag{25}$$

et nous trouverons

$$\frac{\mu}{\omega^2} - \rho - \rho_1 A = -\rho_1 B_1 \frac{N}{M} = \rho_1 B_1 \frac{M}{N},$$

d'où

$$N = \mp M\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \frac{\mu}{\omega^2} = \rho + \rho_1 A \pm \rho_1 B_1 \sqrt{-1}.$$

Si B_1 n'est pas nul, ω aura un terme imaginaire; par suite, l'exponentielle qui termine les relations (25) sera en partie réelle, les expressions des déplacements contiendront une exponentielle décroissante pour z grandissant, et le milieu éteindra la lumière. Puisqu'on le suppose transparent, il faut poser $B_1 = 0$, et il n'y a pas de rotation du plan de polarisation.

Le résultat serait le même si l'on étendait les expressions de u_1, v_1, w_1 aux dérivées d'ordre quelconque de u, v, w en x, y, z. Les mêmes considérations de symétrie par rapport au plan des xy et d'isotropie autour de l'axe des z montreraient que ces expressions, spécifiées pour le cas d'ondes perpendiculaires aux z, ne contiennent pas de dérivées d'ordre impair, et se réduisent respectivement, pour celle de l'ordre pair $2n$, à des termes de la forme

$$A_2 \frac{d^{2n}u}{dz^{2n}} - B_2 \frac{d^{2n}v}{dz^{2n}}, \quad A_2 \frac{d^{2n}v}{dz^{2n}} + B_2 \frac{d^{2n}u}{dz^{2n}}, \quad A_3 \frac{d^{2n}w}{dz^{2n}}.$$

Une méthode, employée au § IV, p. 326, permet de réduire à un seul, dans l'expression de chacun des déplacements u_1, v_1, w_1, la somme de tous les termes qui contiennent les dérivées de la même variable u, v, w; u_1, v_1, w_1 acquerront ainsi la forme (24), dans laquelle chaque coefficient sera une série ordonnée suivant les puissances négatives de $\tau^2\omega^2$. Si donc le milieu est transparent, il n'y aura pas de pouvoir rotatoire.

L'expérience prouve, au contraire, que le plan de polarisation de

la lumière est dévié en traversant le corps. Nous ne devons donc pas regarder comme suffisamment générale notre hypothèse, d'après laquelle les déplacements moyens u_1, v_1, w_1 de la matière pondérable en un point quelconque ne seraient fonctions que des déplacements de l'éther aux points environnants. Et, en effet, pour que l'état mécanique actuel de l'éther soit complétement déterminé dans un certain espace, on conçoit qu'il ne suffit pas de donner les positions actuelles des diverses molécules contenues dans cet espace, c'est-à-dire les valeurs qu'ont pour chacune u, v, w, mais qu'il faut encore connaître les vitesses actuelles $\frac{d(u, v, w)}{dt}$ de ces molécules, vitesses qui définissent leur mouvement. L'idée fondamentale de notre théorie étant que les déplacements u_1, v_1, w_1 dépendent de cet état mécanique, nous devons les regarder comme des fonctions linéaires, non-seulement de u, v, w et de leurs dérivées partielles en x, y, z, mais encore de $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ et de leurs dérivées en x, y, z. Lors de tout changement de coordonnées, ces vitesses se transformeront comme les déplacements correspondants. Par suite, dans le cas d'un milieu isotrope, et dans celui d'un milieu presque isotrope et presque symétrique, nous devrons ajouter aux seconds membres des relations (3) avec $E = 0$, (10) et (13), de nouvelles parties exactement pareilles à ces seconds membres, mais contenant partout $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ au lieu de u, v, w. On reconnaîtra aisément, comme nous venons de le faire pour un autre cas, que ces nouvelles parties ont des coefficients nuls si les corps sont transparents, c'est-à-dire si les ondes ne s'éteignent pas en les traversant sous une épaisseur finie. Donc, les expressions de u_1, v_1, w_1 resteront en définitive telles que je les ai données dans mon Mémoire, et il n'y aura rien à changer aux lois obtenues.

Mais, dans le cas actuel d'un milieu symétrique par rapport au plan des xy et isotrope autour de l'axe des z, les relations (24) montrent qu'en nous bornant aux dérivées premières, nous devrons respectivement ajouter, aux expressions (24) de u_1, v_1, w_1, des parties de la forme

$$\mathfrak{a}\frac{du}{dt} - \mathfrak{b}\frac{dv}{dt}, \quad \mathfrak{a}\frac{dv}{dt} + \mathfrak{b}\frac{du}{dt}, \quad \mathfrak{a}_1\frac{dw}{dt}.$$

Annulons les coefficients B_1, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$, incompatibles avec la transparence, et supposons, conformément à l'expérience, que notre milieu soit resté monoréfringent, ce qui revient à égaler A_1 à A; nous aurons

$$(26)\qquad u_1 = A u - \mathfrak{B}\frac{dv}{dt},\quad v_1 = A v + \mathfrak{B}\frac{du}{dt},\quad w_1 = A w.$$

Portons ces valeurs dans les trois équations du mouvement, puis substituons dans celles-ci, à u, v, w, leurs expressions données par l'intégrale simple

$$\frac{u}{M} = \frac{v}{N} = \frac{w}{P} = e^{\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x\sin i + z\cos i}{\omega}\right)\sqrt{-1}},$$

qui correspond aux ondes planes dont la normale fait un angle i avec les z positifs. Il viendra

$$(27)\quad \begin{cases} \frac{\lambda+\mu}{\omega^2}(M\sin i + P\cos i)\sin i + \left(\frac{\mu}{\omega^2} - \rho - \rho_1 A\right) M = -\frac{2\pi}{\tau}\mathfrak{B} N\sqrt{-1}, \\ \left(\frac{\mu}{\omega^2} - \rho - \rho_1 A\right) N = \frac{2\pi}{\tau}\mathfrak{B} M\sqrt{-1}, \\ \frac{\lambda+\mu}{\omega^2}(M\sin i + P\cos i)\cos i + \left(\frac{\mu}{\omega^2} - \rho - \rho_1 A\right) P = 0. \end{cases}$$

Ces trois équations, respectivement multipliées par M, N, P, et ajoutées, donnent

$$\frac{\lambda+\mu}{\omega^2}(M\sin i + P\cos i)^2 + \left(\frac{\mu}{\omega^2} - \rho - \rho_1 A\right)(M^2 + N^2 + P^2) = 0;$$

ce qui change la troisième en

$$(28)\qquad N = \mp\sqrt{-1}\sqrt{M^2 + P^2 - \frac{P}{\cos i}(M\sin i + P\cos i)},$$

et, par suite, la seconde (27) en

$$(29)\quad \left(\frac{\mu}{\omega^2} - \rho - \rho_1 A\right)\sqrt{M^2 + P^2 - \frac{P}{\cos i}(M\sin i + P\cos i)} = \mp\frac{2\pi\mathfrak{B}}{\tau} M.$$

On éliminera le rapport $\frac{M}{P}$ entre (29) et la troisième (27), ce qui

donnera l'équation aux vitesses; puis on prendra M de la forme $Je^{\varphi\sqrt{-1}}$, J et φ étant deux constantes arbitraires réelles; la troisième relation (27) et la relation (28) donneront ensuite P et N; enfin on choisira pour les déplacements de l'éther les parties réelles de u, v, w.

Supposons $\mathfrak{v}$ très-petit, ainsi que cela a toujours lieu dans les expériences. Alors les équations (27) donnent : soit, avec N très-petit, des ondes quasi-longitudinales ayant même vitesse de propagation, sauf erreur du second ordre, que si $\mathfrak{v}$ était nul; soit, avec $M\sin i + P\cos i$ très-petit, des vibrations quasi-transversales.

Dans ce dernier cas, si nous posons

$$\sqrt{M^2 + P^2} = Ie^{\frac{2\pi\varphi}{\tau}\sqrt{-1}},$$

d'où, à très-peu près,

$$M = Ie^{\frac{2\pi\varphi}{\tau}\sqrt{-1}}\cos i, \quad P = -Ie^{\frac{2\pi\varphi}{\tau}\sqrt{-1}}\sin i,$$

les relations (28) et (29) deviendront sensiblement

$$(30)\quad N = \mp\sqrt{-1}\,Ie^{\frac{2\pi\varphi}{\tau}\sqrt{-1}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{\mu}{\rho + \rho_1 A}}\left(1 \pm \frac{\pi\mathfrak{v}\cos i}{\rho + \rho_1 A}\frac{1}{\tau}\right).$$

Appelons ω_1, ω_2 les deux valeurs de ω. Les parties réelles de u, v, w seront, avec la première, qui correspond aux signes supérieurs,

$$u = I\cos i\cos\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x\sin i + z\cos i}{\omega_1} + \varphi\right),$$

$$w = -I\sin i\cos\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x\sin i + z\cos i}{\omega_1} + \varphi\right),$$

$$v = I\sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x\sin i + z\cos i}{\omega_1} + \varphi\right).$$

Chaque molécule d'éther décrira, dans le plan de l'onde, un cercle de rayon I, qui a pour équations

$$u^2 + v^2 + w^2 = I^2, \quad u\sin i + w\cos i = 0.$$

De plus, si nous supposons l'axe des y à droite de celui des x, relativement à un observateur qui aurait les pieds à l'origine et la tête du

côté des z positifs, ce cercle sera décrit de gauche à droite pour un autre observateur qui aurait les pieds à son centre et la tête du côté où va l'onde.

A la seconde racine ω_2 correspondront des vibrations circulaires pareilles, mais décrites de droite à gauche.

Lorsque $\mathfrak{w}$ est positif, ω_1 est $> \omega_2$ pour $i < 90^\circ$, et $< \omega_2$ pour $i > 90^\circ$. C'est le contraire quand $\mathfrak{w}$ est négatif.

En continuant comme au § III, p. 324, on verra que le milieu peut propager, dans chaque direction, un système d'ondes planes à vibrations rectilignes quasi-transversales, dont le plan de polarisation tourne, à mesure que l'onde avance, dans un sens qui est le même, par rapport à un observateur fixe, pour deux ondes de direction contraire. L'angle qui mesure cette rotation est proportionnel au chemin parcouru et au cosinus de l'angle que fait la normale à l'onde avec l'axe de l'aimant; il varie, de plus, à très-peu près, en raison inverse du carré de la longueur d'onde.

Si l'on joint à ces lois celle-ci très-naturelle, que le petit coefficient $\mathfrak{w}$, dû à l'action magnétique, est sensiblement proportionnel à cette action, on aura toutes celles que l'expérience a données.

§ III. — *Ondes lumineuses dans les corps en mouvement.*

Concevons un corps transparent, animé de vitesses comparables à celles de la lumière, et telles que, pendant la durée d'un nombre fini de vibrations lumineuses, la vitesse de chaque portion du corps reste à peu près constante. Chaque molécule, à l'époque t, se trouvera en un certain point, que nous appellerons *sa position actuelle d'équilibre*. Comme les actions développées entre l'éther et la matière pondérable, lors de tout mouvement d'amplitude finie, sont extrêmement faibles, l'éther du corps ne sera presque pas entraîné avec lui, mais restera comparativement immobile.

Supposons actuellement qu'une onde lumineuse pénètre dans ce milieu, et proposons-nous d'obtenir les lois de sa propagation.

Nous appellerons : x, y, z les coordonnées, par rapport à un système d'axes rectangulaires fixes, d'un point de l'espace occupé par le corps à l'époque t; u, v, w les déplacements à la même époque, comptés à

partir de la position actuelle d'équilibre, de la molécule d'éther dont cette position, sensiblement fixe, est actuellement en (x, y, z); u'_1, v'_1, w'_1 les déplacements pareils d'une molécule pondérable qui a sa position d'équilibre, au moment t, en (x, y, z); enfin V la vitesse dont se trouve animée la position d'équilibre de la molécule considérée, et V_1, V_2, V_3 les composantes de V, qui seront des fonctions continues de x, y, z, t.

D'après notre manière de concevoir la transparence d'un corps, u'_1, v'_1, w'_1 dépendront des déplacements et des vitesses vibratoires de l'éther environnant, et seront les mêmes fonctions de $u, v, w, \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$ et de leurs dérivées par rapport à x, y, z, que si toutes les positions d'équilibre étaient rendues immobiles aux points qu'elles occupent actuellement. Or, avec ces positions actuelles d'équilibre, l'éther du corps doit être, à fort peu près, constitué comme l'éther libre, car la lenteur relative de ses mouvements lui permet d'être sans cesse en équilibre de tension et de densité avec l'éther libre qui l'environne. Si donc nous désignons par $\sum$ une somme de termes pareils à celui qui suivra ce signe, et respectivement égaux à des coefficients a, multipliés par $u, v, w, \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$, ou par leurs dérivées de divers ordres en x, y, z, nous pourrons poser

$$u'_1 = \sum au,$$

et regarder les coefficients a comme variables peut-être, pour la même molécule, avec son orientation ou avec d'autres éléments, mais non avec la vitesse V de sa position d'équilibre. Pendant la durée d'une vibration lumineuse, l'orientation, ou, à sa place, tout autre élément capable de modifier ces coefficients, change à peine, et, par suite, les variations du déplacement u'_1 de la même molécule durant un instant très-court seront les mêmes que si les coefficients étaient constants.

La portion de la vitesse suivant les x de la même molécule, qui correspond au mouvement vibratoire, s'obtiendra en prenant le rapport à dt de l'accroissement que reçoit u'_1 quand on y fait croître t de dt, x de $V_1 dt$, y de $V_2 dt$, z de $V_3 dt$. Cette vitesse peut s'écrire symbo-

liquement

$$\sum a\left(\frac{d}{dt}+V_1\frac{d}{dx}+V_2\frac{d}{dy}+V_3\frac{d}{dz}\right)u.$$

La portion de l'accélération suivant les x de la même molécule, qui correspond au mouvement vibratoire, sera de même, en observant que V_1, V_2, V_3 ne varient pas d'une manière appréciable durant une vibration,

$$\sum a\left(\frac{d}{dt}+V_1\frac{d}{dx}+V_2\frac{d}{dy}+V_3\frac{d}{dz}\right)^2u.$$

La partie correspondante de la force motrice exercée suivant les x sur la matière pondérable contenue dans le volume ϖ, s'obtiendra en multipliant la masse de chaque molécule qui en fait partie par la portion pareille de son accélération, et en ajoutant les produits. Le résultat aura la forme

$$\rho_1\varpi\sum a_1\left(\frac{d}{dt}+V_1\frac{d}{dx}+V_2\frac{d}{dy}+V_3\frac{d}{dz}\right)^2u.$$

On peut regarder les coefficients a_1 comme constants dans une étendue assez petite et durant un temps très-court. Ils le seraient même dans de plus larges limites, si le corps ne cessait pas d'être homogène et isotrope, ou si, étant homogène, mais d'une constitution d'ailleurs quelconque, il n'était soumis qu'à un mouvement de translation incapable de changer son orientation.

Appelons u_1, v_1, w_1 les déplacements moyens, dont le premier est $\sum a_1u$, des molécules pondérables qui, à l'époque t, ont leurs positions d'équilibre autour de (x, y, z) : ces déplacements moyens seront donnés : dans le cas d'un milieu isotrope, par les formules (3) avec $E=0$ et (10); dans celui d'un milieu presque isotrope et presque symétrique rapporté à ses axes, par les formules (13); enfin, dans le cas d'un milieu monoréfringent, symétrique par rapport au plan des xy et isotrope autour de l'axe des z, par les formules (26).

La portion, correspondante au mouvement vibratoire, de la force motrice exercée suivant les x sur la matière pondérable contenue dans le volume ϖ, vaudra

$$\rho_1\varpi\left(\frac{d}{dt}+V_1\frac{d}{dx}+V_2\frac{d}{dy}+V_3\frac{d}{dz}\right)^2u_1.$$

La partie pareille de l'action qui meut l'éther du même volume est, à très-peu près, $\rho\varpi\frac{d^2u}{dt^2}$, puisque les vitesses analogues à V_1, V_2, V_3 sont comme nulles pour l'éther.

La force motrice qui est appliquée suivant les x à la matière du volume ϖ, en sus de celle qui agirait seule si les vibrations étudiées n'existaient pas, vaut donc en tout

$$(31)\qquad \rho\varpi\frac{d^2u}{dt^2}+\rho_1\varpi\left(\frac{d}{dt}+V_1\frac{d}{dx}+V_2\frac{d}{dy}+V_3\frac{d}{dz}\right)^2u_1.$$

Elle est égale à la somme des forces qui, émanées de points extérieurs et produites par le mouvement vibratoire, agissent suivant les x sur la même matière. Ces forces sont de trois sortes. Il y a :

1° Les actions élastiques que les petites vibrations considérées développent dans l'éther : celui-ci, avec les positions actuelles d'équilibre de ses molécules, est, à fort peu près, constitué comme l'éther libre, et les déplacements (u, v, w) donnent, suivant les x, une résultante élastique très-peu différente de

$$(32)\qquad \varpi\left[(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx}+\mu\Delta_2u\right];$$

2° Les forces pareilles de la matière pondérable : nous avons vu au § I qu'elles sont insensibles;

3° Les actions exercées, sur la matière pondérable qui appartient au volume ϖ et qui se trouve près de sa surface, par l'éther extérieur adjacent, et celles qui le sont sur l'éther superficiel du même volume par la matière pondérable extérieure adjacente. Ces actions, dues aux différences de vitesse entre les molécules des deux espèces de matière, sont très-petites par rapport à celles de même nature qui sont produites entre toute la matière pondérable du volume ϖ et tout l'éther de ce volume. Comme celles-ci ne sont que de l'ordre de ϖ, les premières sont négligeables.

Nous pouvons donc égaler les expressions (31) et (32) : ce qui donne, pour la première équation du mouvement, à laquelle les deux autres seraient pareilles,

$$(33)\quad (\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx}+\mu\Delta_2u=\rho\frac{d^2u}{dt^2}+\rho_1\left(\frac{d}{dt}+V_1\frac{d}{dx}+V_2\frac{d}{dy}+V_3\frac{d}{dz}\right)^2u_1.$$

Dans le cas d'un système d'ondes planes, de période τ, de vitesse ω', et perpendiculaires à la direction (m, n, p), les déplacements suivant les axes, à l'époque t, de la molécule d'éther dont la position d'équilibre est en (x, y, z) à cette époque, sont les parties réelles des expressions de u, v, w données par des intégrales simples de la forme

$$\frac{u}{M} = \frac{v}{N} = \frac{w}{P} = e^{\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{mx+ny+pz}{\omega'}\right)\sqrt{-1}}.$$

u_1, v_1, w_1, fonctions linéaires de u, v, w, $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$, et de leurs dérivées partielles en x, y, z, deviendront, ainsi que leurs dérivées, égales à des constantes multipliées par la même exponentielle. On aura donc

$$\frac{du_1}{dx} = -\frac{m}{\omega'}\frac{du_1}{dt}, \quad \frac{du_1}{dy} = -\frac{n}{\omega'}\frac{du_1}{dt}, \quad \frac{du_1}{dz} = -\frac{p}{\omega'}\frac{du_1}{dt}, \quad \frac{d^2u_1}{dx^2} = \frac{m^2}{\omega'^2}\frac{d^2u_1}{dt}, \ldots,$$

et la première équation du mouvement deviendra

$$(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx} + \mu\Delta_2 u = \rho\frac{d^2u}{dt^2} + \rho_1\left(1 - \frac{mV_1 + nV_2 + pV_3}{\omega'}\right)^2\frac{d^2u_1}{dt^2}.$$

L'expression $mV_1 + nV_2 + pV_3$ est égale à la composante, suivant la normale à l'onde, de la vitesse du corps : nous la désignerons par V'.

Les équations des ondes planes se déduiront, par conséquent, de celles qu'on aurait dans le cas $V = 0$, par les simples changements de ω en ω' et de ρ_1 en $\rho_1\left(1 - \frac{V'}{\omega'}\right)^2$.

Lorsque V' est assez petit par rapport à la vitesse ω des ondes de même direction dans le corps supposé en repos, ω' diffère peu de ω, et l'on peut, sauf erreur négligeable, remplacer $\frac{V'}{\omega'}$ par $\frac{V'}{\omega}$. Si, de plus, le corps est un de ceux étudiés aux §§ III, IV, V, VI et au paragraphe précédent, on pourra négliger les termes qui seront à la fois de l'ordre du facteur $\frac{V'}{\omega}$, et de celui du pouvoir dispersif, ou biréfringent, ou rotatoire : on remplacera par exemple, dans ce facteur, ω par sa valeur

approchée constante, qui est $\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho+\rho_1 A}}$ pour les ondes longitudinales, et $\sqrt{\frac{\mu}{\rho+\rho_1 A}}$ pour les ondes transversales.

Ainsi les ondes se propageront comme si le corps était en repos et avait pour densité, au lieu de ρ_1,

$$(34)\quad \text{soit}\quad \rho_1\left(1-V'\sqrt{\frac{\rho+\rho_1 A}{\lambda+2\mu}}\right)^2,\quad \text{soit}\quad \rho_1\left(1-V'\sqrt{\frac{\rho+\rho_1 A}{\mu}}\right)^2.$$

Les pouvoirs dispersif, biréfringent, rotatoire ne seront modifiés que très-peu. De plus, le carré de la vitesse ω^2 se composant de l'un des deux termes

$$\frac{\lambda+2\mu}{\rho+\rho_1 A}\quad \text{ou}\quad \frac{\mu}{\rho+\rho_1 A},$$

plus de termes très-petits, si l'on y change ρ_1 en l'expression (34) correspondante, le terme principal aura seul une variation du premier ordre. Cette variation vaudra respectivement

$$\frac{\lambda+2\mu}{(\rho+\rho_1 A)^2}\,A\,2\rho_1 V'\sqrt{\frac{\rho+\rho_1 A}{\lambda+2\mu}}=2\omega\frac{\rho_1 A}{\rho+\rho_1 A}V',$$

et

$$\frac{\mu}{(\rho+\rho_1 A)^2}\,A\,2\rho_1 V'\sqrt{\frac{\rho+\rho_1 A}{\mu}}=2\omega\frac{\rho_1 A}{\rho+\rho_1 A}V'.$$

On aura donc

$$\omega'^2=\omega^2+2\omega\frac{\rho_1 A}{\rho+\rho_1 A}V',\quad \text{ou}\quad \omega'=\omega+\frac{\rho_1 A}{\rho+\rho_1 A}V'.$$

Appelons $\mathfrak{N}$ l'indice de réfraction du corps, indice dont le carré est égal, sauf des termes très-petits, à $\frac{\rho+\rho_1 A}{\rho}$, et cette relation deviendra

$$(35)\qquad \omega'=\omega+\left(1-\frac{1}{\mathfrak{N}^2}\right)V'.$$

C'est la formule connue, que Fresnel a déduite de plusieurs hypothèses, et que confirment diverses expériences, dues notamment à Arago et à M. Fizeau.

FIN DU TOME TREIZIÈME (2ᵉ SÉRIE).

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.