JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE SARRAU

Sur la propagation et la polarisation de la lumière dans les cristaux; premier mémoire

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 12 (1867), p. 1-46.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1867_2_12__1_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

SUR LA

PROPAGATION ET LA POLARISATION DE LA LUMIÈRE DANS LES CRISTAUX;

PAR M. ÉMILE SARRAU,
Sous-Ingénieur des Manufactures de l'État.

PREMIER MÉMOIRE.

La théorie mathématique des phénomènes optiques produits par les cristaux nous paraît reposer sur deux principes fondamentaux :

1° La modification périodique de l'éther dans les milieux cristallisés;

2° La modification spéciale qu'éprouve la constitution de l'éther par suite de la symétrie propre au milieu cristallisé.

C'est à ce double point de vue que nous recherchons dans ce Mémoire quelques propriétés très-générales des équations qui régissent les vibrations de l'éther renfermé dans un cristal, réservant pour un nouveau travail l'analyse des conséquences qui en résultent pour l'étude des phénomènes.

C'est Cauchy qui a indiqué le premier l'influence des perturbations dues à la constitution périodique de l'éther. L'illustre géomètre a créé ainsi un principe nouveau, fécond en conséquences, et vraisembla-

blement destiné à donner la solution des problèmes qui, depuis Fresnel, ont si souvent occupé les géomètres et les physiciens. Il importait cependant de donner aux équations qu'il a obtenues une forme plus explicite et de les compléter par des termes qu'il néglige et qui ont une influence sensible. Nous essayons de le faire dans le premier Chapitre de ce Mémoire.

Le second est consacré à l'étude des modifications qu'éprouvent les équations des mouvements vibratoires par suite de la symétrie cristalline. Nous prenons comme point de départ les belles *Études cristallographiques* de Bravais. Suivant sa théorie, un cristal est caractérisé par le nombre et la disposition des éléments de symétrie communs au polyèdre moléculaire et à l'assemblage. Ces éléments déterminent la forme cristalline et se déduisent, inversement, de la forme cristalline observée.

Appliquant ces principes à la théorie des phénomènes lumineux, nous admettons que tout élément de symétrie commun à la molécule et à l'assemblage est un élément de symétrie des atomes de l'éther. L'expression analytique de ce fait assigne aux équations une forme spéciale, variable non-seulement avec le système cristallin, mais encore avec les divers cas de mériédrie que peut offrir chaque système.

C'est ainsi que s'établissent entre les phénomènes optiques des corps et leur forme cristalline des relations dont les conséquences sont particulièrement importantes, parce que leur vérification expérimentale doit être considérée comme une confirmation, non-seulement de la théorie des ondes, mais encore des conceptions sur lesquelles repose aujourd'hui l'explication des lois cristallographiques.

CHAPITRE I.

SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES QUI RÉGISSENT LES VIBRATIONS DE L'ÉTHER RENFERMÉ DANS UN MILIEU CRISTALLISÉ INDÉFINI.

1. Suivant la théorie physique généralement admise, les phénomènes lumineux résultent des vibrations d'un milieu particulier appelé *éther*. On suppose que l'éther existe dans tout l'espace et pénètre les

corps matériels dans l'intérieur desquels son état statique dépend à la fois des actions qu'il exerce sur lui-même et de celles qu'exercent sur lui les atomes matériels.

L'éther répandu dans le vide peut être considéré comme homogène. Dans les milieux matériels, sa constitution varie nécessairement d'un point à l'autre de l'espace : dans les milieux cristallisés, cette variation est *périodique*.

2. En effet, suivant les minéralogistes, les centres de gravité des molécules des cristaux forment un assemblage régulier de points situés sur les sommets de cellules parallélipipédiques égales déterminées par trois systèmes de plans équidistants et parallèles à trois plans fixes rectangulaires ou obliques.

Toutes les molécules sont, en outre, identiquement orientées, de sorte que les atomes correspondants occupent des positions homologues dans les diverses cellules. Cette disposition des atomes matériels entraîne évidemment une disposition analogue des atomes de l'éther, de sorte que la constitution de l'éther, variable dans l'intérieur d'une même cellule, est la même aux points correspondants de plusieurs cellules différentes.

L'éther renfermé dans un cristal peut donc être considéré comme un système *périodiquement homogène*.

3. Nous admettons que, dans les phénomènes lumineux, les vibrations de la matière sont insensibles. Dans cette hypothèse, il est aisé de déterminer la forme essentielle des équations qui représentent les vibrations de l'éther. Ces équations sont au nombre de trois et déterminent les projections du déplacement atomique sur trois axes fixes. Elles sont linéaires, aux dérivées partielles, et les coefficients sont des fonctions des coordonnées, variables avec la constitution de l'éther, dans l'intérieur du milieu matériel. Si ce milieu est cristallisé, il suffit de prendre les axes parallèles aux arêtes d'un des systèmes parallélipipédiques déterminés par les centres de gravité des molécules matérielles, pour réduire les coefficients à des fonctions périodiques ayant pour périodes les arêtes d'un parallélipipède élémentaire.

4. L'intégration de ces équations à coefficients périodiques peut

être ramenée, comme Cauchy l'a fait voir, à celle d'un système d'équations aux dérivées partielles et à coefficients constants.

Il suffit de substituer aux coefficients et aux fonctions inconnues leurs développements en séries ordonnées suivant les puissances entières positives et négatives de trois exponentielles trigonométriques ayant respectivement pour périodes les trois paramètres de l'assemblage moléculaire, et d'égaler, dans le résultat obtenu par cette substitution dans les équations, les coefficients des puissances semblables des exponentielles.

5. En opérant comme on vient de le dire, la différence entre un des trois déplacements composants d'un atome d'éther et sa *valeur moyenne* (c'est-à-dire le terme de son développement indépendant des exponentielles) se compose de termes proportionnels à des exponentielles reprenant périodiquement la même valeur dans des intervalles comparables aux intervalles moléculaires des corps. Or, ces dimensions étant insaisissables, il est naturel de supposer que, dans la théorie de la lumière, les termes dont il s'agit n'ont qu'une influence inappréciable à nos organes et qu'on pourra les négliger en réduisant les déplacements à leurs valeurs moyennes.

6. Le système d'équations à coefficients constants que fournit la méthode qui vient d'être indiquée renferme avec les valeurs moyennes des déplacements les coefficients des exponentielles trigonométriques qui entrent dans leurs développements. En éliminant ces derniers, on obtient trois équations aux dérivées partielles et à coefficients constants auxquelles doivent satisfaire les valeurs moyennes des inconnues.

C'est le système de ces équations, appelées par Cauchy équations *auxiliaires*, qui paraît représenter les phénomènes optiques des milieux cristallisés.

7. Il importe d'observer que les équations auxiliaires sont fort différentes de celles que l'on obtiendrait en réduisant les coefficients périodiques à leurs valeurs moyennes, c'est-à-dire à des constantes. Elles dépendent, en effet, des termes qui, dans le développement des coefficients, sont proportionnels aux puissances des exponentielles. Ce sont précisément ces termes qui, loin d'être négligeables, comme

on le suppose en réalité dans les théories généralement admises, renferment l'explication des phénomènes lumineux produits par les cristaux.

8. L'étude des perturbations dues à la périodicité de l'éther étant fondamentale, il est nécessaire d'exposer d'abord l'analyse qui conduit aux équations auxiliaires. La marche suivie dans ce Chapitre a été indiquée par Cauchy [*].

Analyse.

9. Considérons l'éther renfermé dans l'intérieur d'un corps quelconque. Prenant d'abord le système de ses atomes dans un état d'équilibre, désignons par x, y, z les coordonnées d'un de ces atomes m. Soient h, k, l les accroissements de ces coordonnées quand on passe de l'atome m à un atome voisin m'.

Les composantes de l'action mutuelle des atomes m, m' sont des fonctions de h, k, l devenant insensibles dès que ces variables dépassent de très-petites valeurs.

Supposons en second lieu que l'éther vibre, et désignons par u, v, w les projections du déplacement de l'atome m sur les axes de coordonnées. Les déplacements de m' seront $u + \delta u$, $v + \delta v$, $w + \delta w$, la caractéristique δ exprimant les accroissements qu'éprouvent les fonctions u, v, w quand les variables x, y, z s'accroissent de h, k, l. Les composantes de la force accélératrice exercée par m' sur m seront des fonctions de $h + \delta u$, $k + \delta v$, $l + \delta w$, projections de la distance mm' sur les axes. Elles pourront donc être réduites à des fonctions linéaires de δu, δv, δw si l'on suppose les différences des déplacements assez petites pour négliger leurs produits. Il suffit d'ajouter les composantes des forces accélératrices exercées par tous les atomes tels que m', pour obtenir la force accélératrice totale exercée sur l'atome m par l'éther qui l'environne.

Les composantes de l'action exercée par la matière sur m sont des fonctions linéaires de u, v, w quand les déplacements sont très-petits.

On obtiendra enfin les équations du mouvement de m en égalant les

---

[*] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXX, p. 17.

composantes de l'action exercée sur ce point par l'éther et la matière aux dérivées secondes de u, v, w prises par rapport au temps.

10. On a ainsi trois équations linéaires aux différences mêlées. Elles deviennent linéaires aux dérivées partielles en développant les δ par la série de Taylor. Les développements sont très-convergents à cause de la petitesse de h, k, l pour tous les points situés dans la sphère d'action de m.

11. On peut donc énoncer cette conclusion :

La forme la plus générale des équations qui régissent les vibrations très-petites de l'éther s'obtient en égalant la dérivée seconde, prise par rapport au temps de chacun des déplacements u, v, w à une fonction linéaire de ces déplacements, et de leurs dérivées de tous les ordres prises par rapport à x, y, z.

Les seconds membres de ces équations ne renferment pas de termes indépendants de u, v, w. En effet, ils doivent s'annuler avec u, v, w, puisque le système est en équilibre quand les déplacements sont nuls.

Si on prend pour axes de coordonnées un système d'axes de l'assemblage moléculaire, les coefficients des équations sont des fonctions périodiques des coordonnées.

Le système des trois équations fondamentales peut donc s'écrire comme il suit :

$$(1)\qquad \begin{cases} D_t^2 u = F_1 u + F_2 v + F_3 w, \\ D_t^2 v = G_1 u + G_2 v + G_3 w, \\ D_t^2 w = H_1 u + H_2 v + H_3 w; \end{cases}$$

les F, G, H étant des fonctions entières symboliques de D_x, D_y, D_z, dont les coefficients sont des fonctions périodiques de x, y, z.

Le problème de la propagation de la lumière dans un milieu indéfini consiste à trouver des fonctions satisfaisant aux équations (1), et se réduisant à des fonctions données de x, y, z, ainsi que leurs dérivées premières par rapport à t, pour $t = 0$.

Avant d'appliquer la méthode d'intégration, il convient d'introduire une notation qui simplifie l'écriture.

12. Le second membre de chacune des équations (1) peut être con-

sidéré comme une fonction symbolique de D_x, D_y, D_z et de u, v, w, linéaire et homogène par rapport à ces dernières variables. On peut donc écrire comme il suit le système (1) :

$$(2)\qquad \begin{cases} D_t^2 u = F(D_x, D_y, D_z, u, v, w), \\ D_t^2 v = G(D_x, D_y, D_z, u, v, w), \\ D_t^2 w = H(D_x, D_y, D_z, u, v, w). \end{cases}$$

Les fonctions F, G, H jouissent des propriétés suivantes.

1° Si on suppose

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2, \quad w = w_1 + w_2,$$

on a

$$(3)\qquad \begin{cases} F(D_x, D_y, D_z, u_1 + u_2, v_1 + v_2, w_1 + w_2) = F(D_x, D_y, D_z, u_1, v_1, w_1) \\ \qquad\qquad + F(D_x, D_y, D_z, u_2, v_2, w_2). \end{cases}$$

2° Si on suppose en second lieu

$$u = u_1 \varepsilon, \quad v = v_1 \varepsilon, \quad w = w_1 \varepsilon,$$

u_1, v_1, w_1 étant des fonctions de x, y, z, et ε une exponentielle de la forme $\varepsilon = e^{ax+by+cz}$, on a

$$(4)\qquad \begin{cases} F(D_x, D_y, D_z, u_1 \varepsilon, v_1 \varepsilon, w_1 \varepsilon) \\ \quad = F(D_x + a, D_y + b, D_z + c, u_1, v_1, w_1)\varepsilon. \end{cases}$$

La première propriété est évidente : en effet, un terme quelconque $AD_x^p D_y^q D_z^r$ de la fonction F donne identiquement

$$AD_x^p D_y^q D_z^r (u_1 + u_2) = AD_x^p D_y^q D_z^r u_1 + AD_x^p D_y^q D_z^r u_2.$$

Pour établir la seconde, il suffit d'observer que le terme simple $D_x u$ donne, en supposant $u = u_1 \varepsilon$,

$$D_x u = D_x u_1 . \varepsilon + u_1 . D_x \varepsilon = (D_x u_1 + a u_1)\varepsilon,$$

ou symboliquement

$$D_x u = (D_x + a) u_1 . \varepsilon.$$

On établit de la même manière l'égalité symbolique

$$\mathrm{AD}_x^p \mathrm{D}_y^q \mathrm{D}_z^r u = \mathrm{A}(\mathrm{D}_x + a)^p (\mathrm{D}_y + b)^q (\mathrm{D}_z + c)^r u_{1,2},$$

d'où l'on déduit immédiatement la formule (4).

13. Considérons actuellement une des équations (2), la première par exemple.

Chaque coefficient A de F est une fonction périodique de x, y, z. Désignons par a, b, c les résultats obtenus en divisant 2π par les périodes dont on peut accroître respectivement x, y, z sans changer la valeur de cette fonction, et par e, f, g les trois exponentielles imaginaires e^{axi}, e^{byi}, e^{czi}. D'après une propriété générale des fonctions périodiques, on a

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_0 + \sum_m \mathrm{A}_{m,m',m''} e^m f^{m'} g^{m''}, \tag{5}$$

m, m', m'' étant trois nombres entiers positifs ou négatifs.

En développant ainsi en série tous les coefficients périodiques de F, on obtient

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{F}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, u, v, w) &= \mathrm{F}_0(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, u, v, w) \\ &\quad + \sum_m \mathrm{F}_{m,m',m''}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, u, v, w) e^m f^{m'} g^{m''}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Les fonctions G et H étant développées de la même manière, le système (2) devient

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{D}_t^2 u &= \mathrm{F}_0(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, u, v, w) \\ &\quad + \sum_m \mathrm{F}_{m,m',m''}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, u, v, w) e^m f^{m'} g^{m''}, \\ \mathrm{D}_t^2 v &= \mathrm{G}_0(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, u, v, w) \\ &\quad + \sum_m \mathrm{G}_{m,m',m''}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, u, v, w) e^m f^{m'} g^{m''}, \\ \mathrm{D}_t^2 w &= \mathrm{H}_0(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, u, v, w) \\ &\quad + \sum_m \mathrm{H}_{m,m',m''}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, u, v, w) e^m f^{m'} g^{m''}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

14. Posons actuellement

$$(8)\qquad \begin{cases} u = u_0 + \sum_n u_{n,n',n''} e^n f^{n'} g^{n''}, \\ v = v_0 + \sum_n v_{n,n',n''} e^n f^{n'} g^{n''}, \\ w = w_0 + \sum_n w_{n,n',n''} e^n f^{n'} g^{n''}; \end{cases}$$

$u_{n,n',n''}$, $v_{n,n',n''}$, $w_{n,n',n''}$ étant des fonctions de x, y, z, t à déterminer.

La substitution des développements (8) dans les équations (7) s'opère sans difficulté, grâce aux remarques du n° 12, et on obtient trois équations telles que la suivante :

$$(9)\qquad \begin{cases} \mathrm{D}_t^2 u_0 + \sum_p \mathrm{D}_t^2 u_{p,p',p''} e^p f^{p'} g^{p''} \\ \quad = \mathrm{F}_0(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, u_0, v_0, w_0) \\ \qquad + \sum_m \mathrm{F}_{m,m',m''}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, u_0, v_0, w_0)\, e^m f^{m'} g^{m''} \\ \qquad + \sum_n \mathrm{F}_0(\mathrm{D}_x + nai, \mathrm{D}_y + n'bi, \mathrm{D}_z + n''ci, \\ \qquad\qquad u_{n,n',n''}, v_{n,n',n''}, w_{n,n',n''})\, e^n f^{n'} g^{n''} \\ \qquad + \sum_m \sum_n \mathrm{F}_{m,m',m''}(\mathrm{D}_x + nai, \mathrm{D}_y + n'bi, \mathrm{D}_z + n''ci, \\ \qquad\qquad u_{n,n'n''}, v_{n,n',n''}, w_{n,n',n''})\, e^{m+n} f^{m'+n'} g^{m''+n''}. \end{cases}$$

En identifiant dans ces équations les coefficients des puissances semblables de e, f, g, on a un système d'équations aux dérivées partielles et à coefficients constants auquel doivent satisfaire les fonctions inconnues.

15. En opérant ainsi, on obtient :

1° Trois équations obtenues en identifiant les termes indépendants

de e, f, g, savoir :

$$(10)\quad \begin{cases} \mathrm{D}_t^2 u_0 = \mathrm{F}_0(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, u_0, v_0, w_0) \\ \qquad + \sum_m \sum_n \mathrm{F}_{m,m',m''}(\mathrm{D}_x + nai, \mathrm{D}_y + n'bi, \mathrm{D}_z + n''ci, \\ \qquad\qquad u_{n,n',n''}, v_{n,n',n''}, w_{n,n',n''}), \\ \mathrm{D}_t^2 v_0 = \mathrm{G}_0(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, u_0, v_0, w_0) \\ \qquad + \sum_m \sum_n \mathrm{G}_{m,m',m''}(\mathrm{D}_x + nai, \mathrm{D}_y + n'bi, \mathrm{D}_z + n''ci, \\ \qquad\qquad u_{n,n',n''}, v_{n,n',n''}, w_{n,n',n''}), \\ \mathrm{D}_t^2 w_0 = \mathrm{H}_0(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, u_0, v_0, w_0) \\ \qquad + \sum_m \sum_n \mathrm{H}_{m,m',m''}(\mathrm{D}_x + nai, \mathrm{D}_y + n'bi, \mathrm{D}_z + n''ci, \\ \qquad\qquad u_{n,n',n''}, v_{n,n',n''}, w_{n,n',n''}), \end{cases}$$

les doubles $\sum$ s'étendant aux valeurs de m, m', m'', n, n', n'', différentes de zéro, qui satisfont aux conditions

$$m + n = 0, \quad m' + n' = 0, \quad m'' + n'' = 0.$$

2° Un système d'équations ayant une forme analogue aux trois suivantes, obtenues en identifiant les termes qui contiennent le produit $e^p f^{p'} g^{p''}$:

$$(11)\quad \begin{cases} \mathrm{D}_t^2 u_{p,p',p''} = \mathrm{F}_{p,p',p''}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, u_0, v_0, w_0) \\ \qquad + \mathrm{F}_0(\mathrm{D}_x + pai, \mathrm{D}_y + p'bi, \mathrm{D}_z + p''ci, u_{p,p',p''}, v_{p,p',p''}, w_{p,p',p''}) \\ \qquad + \sum_m \sum_n \mathrm{F}_{m,m',m''}(\mathrm{D}_x + nai, \mathrm{D}_y + n'bi, \mathrm{D}_z + n''ci, \\ \qquad\qquad u_{n,n',n''}, v_{n,n',n''}, w_{n,n',n''}), \\ \mathrm{D}_t^2 v_{p,p',p''} = \mathrm{G}_{p,p',p''}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, u_0, v_0, w_0) \\ \qquad + \mathrm{G}_0(\mathrm{D}_x + pai, \mathrm{D}_y + p'bi, \mathrm{D}_z + p''ci, u_{p,p',p''}, v_{p,p',p''}, w_{p,p',p''}) \\ \qquad + \sum_m \sum_n \mathrm{G}_{m,m',m''}(\mathrm{D}_x + nai, \mathrm{D}_y + n'bi, \mathrm{D}_z + n''ci, \\ \qquad\qquad u_{n,n',n''}, v_{n,n',n''}, w_{n,n',n''}), \\ \mathrm{D}_t^2 w_{p,p',p''} = \mathrm{H}_{p,p',p''}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, u_0, v_0, w_0) \\ \qquad + \mathrm{H}_0(\mathrm{D}_x + pai, \mathrm{D}_y + p'bi, \mathrm{D}_z + p''ci, u_{p,p',p''}, v_{p,p',p''}, w_{p,p',p''}) \\ \qquad + \sum_m \sum_n \mathrm{H}_{m,m',m''}(\mathrm{D}_x + nai, \mathrm{D}_y + n'bi, \mathrm{D}_z + n''ci, \\ \qquad\qquad u_{n,n',n''}, v_{n,n',n''}, w_{n,n',n''}), \end{cases}$$

Les doubles $\sum$ s'étendant aux valeurs de m, m', m'', n, n', n'' différentes de zéro, qui satisfont aux conditions

$$m + n = p, \quad m' + n' = p', \quad m'' + n'' = p''.$$

16. Rigoureusement, les développements (5) et (8) se composant d'un nombre infini de termes, le nombre des équations (11) est lui-même infini. Dans tout ce qui va suivre, nous raisonnerons comme si le nombre de ces équations était limité, en étendant au cas réel toutes les propriétés indépendantes du nombre des termes conservés.

17. Observant actuellement que les dimensions des intervalles dans lesquels se manifeste la périodicité des coefficients sont insensibles, on est conduit à supposer que, dans la production des phénomènes lumineux, les valeurs moyennes des déplacements ont seules une influence appréciable. En conséquence, il y a lieu d'éliminer entre les équations aux dérivées partielles (10) et (11) toutes les inconnues, à l'exception des trois qui représentent les valeurs moyennes des déplacements. Pour montrer comment on peut effectuer dans certains cas cette élimination, il est nécessaire de rappeler la méthode d'intégration applicable aux équations aux dérivées partielles à coefficients constants.

18. On obtient des intégrales particulières des équations (10) et (11), en supposant toutes les inconnues proportionnelles à une même exponentielle, de sorte que

$$(12)\quad \frac{u_0}{P_0} = \frac{v_0}{Q_0} = \frac{w_0}{R_0} = \dots = \frac{u_{n,n',n''}}{P_{n,n',n''}} = \frac{v_{n,n',n''}}{Q_{n,n',n''}} = \frac{w_{n,n',n''}}{R_{n,n',n''}} = \dots = e^{\alpha x + \beta y + \gamma z + \sigma t},$$

$\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ et les P, Q, R étant des constantes réelles ou imaginaires, assujetties à satisfaire au système que l'on obtient en substituant les valeurs particulières (12) dans les équations (10) et (11), ce qui se fait très-simplement en remplaçant dans ces équations D_x, D_y, D_z, D_t, par $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$, et en écrivant partout P, Q, R au lieu de u, v, w.

Ces équations sont les suivantes :

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l}
\sigma^2 P_0 = F_0(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0) \\
\qquad + \sum_m \sum_n F_{m,m',m''}(\alpha + nai, \beta + n'bi, \gamma + n''ci, P_{n,n',n''}, Q_{n,n',n''}, R_{n,n',n''}), \\
\sigma^2 Q_0 = G_0(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0) \\
\qquad + \sum_m \sum_n G_{m,m',m''}(\alpha + nai, \beta + n'bi, \gamma + n''ci, P_{n,n',n''}, Q_{n,n',n''}, R_{n,n',n''}), \\
\sigma^2 R_0 = H_0(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0) \\
\qquad + \sum_m \sum_n H_{m,m',m''}(\alpha + nai, \beta + n'bi, \gamma + n''ci, P_{n,n',n''}, Q_{n,n',n''}, R_{n,n',n''}), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}\right.$$

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l}
\sigma^2 P_{p,p',p''} \\
\quad = F_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0) \\
\qquad + F_0(\alpha + pai, \beta + p'bi, \gamma + p''ci, P_{p,p',p''}, Q_{p,p',p''}, R_{p,p',p''}) \\
\qquad + \sum_m \sum_n F_{m,m',m''}(\alpha + nai, \beta + n'bi, \gamma + n''ci, P_{n,n',n''}, Q_{n,n',n''}, R_{n,n',n''}), \\
\sigma^2 Q_{p,p',p''} \\
\quad = G_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0) \\
\qquad + G_0(\alpha + pai, \beta + p'bi, \gamma + p''ci, P_{p,p',p''}, Q_{p,p',p''}, R_{p,p',p''}) \\
\qquad + \sum_m \sum_n G_{m,m',m''}(\alpha + nai, \beta + n'bi, \gamma + n''ci, P_{n,n',n''}, Q_{n,n',n''}, R_{n,n',n''}), \\
\sigma^2 R_{p,p',p''} \\
\quad = H_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0) \\
\qquad + H_0(\alpha + pai, \beta + p'bi, \gamma + p''ci, P_{p,p',p''}, Q_{p,p',p''}, R_{p,p',p''}) \\
\qquad + \sum_m \sum_n H_{m,m',m''}(\alpha + nai, \beta + n'bi, \gamma + n''ci, P_{n,n',n''}, Q_{n,n',n''}, R_{n,n',n''}), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Lorsque l'on connaît plusieurs intégrales particulières des équations (10) et (11), il suffit de les combiner par voie d'addition pour obtenir de nouvelles intégrales.

Une fonction quelconque de plusieurs variables pouvant d'ailleurs être représentée par la somme d'un nombre fini ou infini de termes

respectivement proportionnels à des exponentielles dont les exposants sont des fonctions linéaires réelles ou imaginaires de ces variables, il est clair que tout système d'intégrales des équations (9) sera toujours la somme d'un nombre fini ou infini d'intégrales de la forme (12).

19. Cela posé, on peut éliminer entre les équations (13) et (14) les coefficients $P_{n,n',n''}$, $Q_{n,n',n''}$, $R_{n,n',n''}$ correspondant à toutes les valeurs entières des indices, de manière à avoir trois équations entre P_0, Q_0, R_0, α, β, γ, σ. Il suffit pour cela de déduire les $P_{n,n',n''}$, $Q_{n,n',n''}$, $R_{n,n',n''}$ des équations (14) et de les substituer dans les équations (13). Leurs valeurs sont des fonctions linéaires et homogènes des termes de la forme

$$(15)\qquad \begin{cases} F_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0), \\ G_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0), \\ H_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0), \end{cases}$$

et on peut poser, par exemple,

$$(16)\qquad \begin{cases} P_{n,n',n''} = \sum_p A_{p,p',p''} F_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0), \\ \qquad + \sum_p B_{p,p',p''} G_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0), \\ \qquad + \sum_p C_{p,p',p''} H_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0), \end{cases}$$

les A, B, C étant des fonctions de α, β, γ, σ^2. Les expressions des $Q_{n,n',n''}$ et $R_{n,n',n''}$ sont de la même forme.

En substituant ces expressions dans les équations (13), les seconds membres de ces équations deviennent des fonctions linéaires et homogènes des termes (15), ayant pour coefficients des fonctions de α, β, γ, σ^2. Pour ne pas multiplier les notations, nous désignerons ces nouveaux coefficients par les lettres A, B, C affectées d'indices.

On a ainsi :

$$
(17)\quad\left\{\begin{aligned}
\sigma^2 P_0 &= F_0(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0)+\sum_p A_{p,p',p''}F_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0)\\
&\quad+\sum_p B_{p,p',p''}G_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0)\\
&\quad+\sum_p C_{p,p',p''}H_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0),\\
\sigma^2 Q_0 &= G_0(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0)+\sum_p A'_{p,p',p''}F_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0)\\
&\quad+\sum_p B'_{p,p',p''}G_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0)\\
&\quad+\sum_p C'_{p,p',p''}H_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0),\\
\sigma^2 R_0 &= H_0(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0)+\sum_p A''_{p,p',p''}F_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0)\\
&\quad+\sum_p B''_{p,p',p''}G_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0)\\
&\quad+\sum_p C''_{p,p',p''}H_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0).
\end{aligned}\right.
$$

20. Nous ne considérons, dans ce Mémoire, que le cas où les fonctions A, B, C sont développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières et positives de α, β, γ, σ^2. C'est ce qui a lieu, en général, quand les modules de ces quantités sont très-petits par rapport aux quantités a, b, c définies au n° **13**.

En supposant, dans ce cas, les séries limitées par approximation à un certain nombre de termes, les seconds membres des équations (17) se réduisent à des fonctions entières à coefficients constants des variables α, β, γ, σ^2, P_0, Q_0, R_0 linéaires et homogènes par rapport aux trois dernières.

Or, ces équations sont alors celles que l'on obtiendrait en cherchant à intégrer, par la méthode des intégrales particulières indiquée au n° **18**, le système suivant d'équations aux dérivées partielles et à coefficients constants :

$$
(18)\quad
\begin{cases}
D_t^2 u = F_0(D_x, D_y, D_z, u, v, w) + \sum_p A_{p,p',p''} F_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w) \\
\qquad\qquad + \sum_p B_{p,p',p''} G_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w) \\
\qquad\qquad + \sum_p C_{p,p',p''} H_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w), \\
D_t^2 v = G_0(D_x, D_y, D_z, u, v, w) + \sum_p A'_{p,p',p''} F_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w) \\
\qquad\qquad + \sum_p B'_{p,p',p''} G_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w) \\
\qquad\qquad + \sum_p C'_{p,p',p''} H_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w), \\
D_t^2 w = H_0(D_x, D_y, D_z, u, v, w) + \sum_p A''_{p,p',p''} F_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w) \\
\qquad\qquad + \sum_p B''_{p,p',p''} G_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w) \\
\qquad\qquad + \sum_p C''_{p,p',p''} H_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w),
\end{cases}
$$

obtenu en remplaçant, dans le système (17), α, β, γ, σ, P_0, Q_0, R_0 par D_x, D_y, D_z, D_t, u, v, w, et où, par conséquent, les A, B, C sont des fonctions entières de D_x, D_y, D_z, D_t^2.

21. Le système des équations (18) est donc celui qu'il s'agissait d'obtenir au n° **17**, et si on veut se borner à étudier les lois qui régissent les *vibrations atomiques moyennes* de l'éther, on est conduit à intégrer généralement le système des équations (19), qu'il convient d'appeler, avec Cauchy, *équations auxiliaires*.

Les déplacements moyens sont seuls considérés dans ce qui suit, et on peut les désigner désormais par les notations u, v, w, attribuées jusqu'à présent aux déplacements effectifs.

22. La forme des équations auxiliaires dépend d'une manière très-simple de celle des équations (2) à coefficients périodiques. En effet, un terme $F_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w)$, compris dans le développe-

ment (8), s'obtient en substituant, dans la fonction

$$F(D_x, D_y, D_z, u, v, w),$$

des constantes aux coefficients périodiques. Par suite, une somme de termes de la forme

$$\sum A_{p,p',p''} F_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w)$$

donne un résultat égal à celui que l'on obtiendrait en substituant à la place des coefficients périodiques, dans la fonction F, des fonctions entières de D_x, D_y, D_z, D_t^2.

On peut donc énoncer le résultant suivant :

THÉORÈME. — *Les trois équations auxiliaires s'obtiennent en égalant la dérivée seconde de chaque variable, prise par rapport au temps, à la somme de trois expressions obtenues en substituant des fonctions entières à coefficients constants de* D_x, D_y, D_z, D_t^2 *aux coefficients périodiques des fonctions* F, G, H *définies au* n° **12**.

23. Il importe d'observer que l'on peut, par l'emploi de substitutions successives, ramener le second membre des équations auxiliaires à ne pas renfermer de dérivées relatives au temps. En effet, si on suppose les seconds membres des équations (17) développées en séries de termes décroissants ordonnés suivant les puissances ascendantes de σ^2, on a, en réduisant ces séries aux termes indépendants de σ^2, des valeurs approchées de $\sigma^2 P_0$, $\sigma^2 Q_0$, $\sigma^2 R_0$ qui, étant substituées dans les termes en σ^2 des séries, donnent lieu à une seconde approximation, et ainsi de suite.

En opérant ainsi, on élimine σ dans les seconds membres des équations (17), et par conséquent D_t dans les seconds membres des équations (20).

On peut alors, dans l'énoncé du théorème précédent, substituer aux fonctions entières de D_x, D_y, D_z, D_t^2 des fonctions entières de D_x, D_y, D_z seulement.

24. En résumé, comme conclusion de l'analyse qui précède, on

obtient les deux propositions suivantes, fondamentales dans la théorie mathématique des phénomènes lumineux :

THÉORÈME I. — *Dans tout milieu cristallisé, les trois équations qui régissent les vibrations très-petites de l'éther sont des équations linéaires aux dérivées partielles que l'on obtient en égalant la dérivée seconde prise par rapport au temps de chacun des trois déplacements u, v, w à une fonction linéaire, à coefficients périodiques, de ces déplacements et de leurs dérivées partielles de tous les ordres prises par rapport à x, y, z.*

THÉORÈME II. — *Dans tout milieu cristallisé, les trois équations qui régissent les vibrations moyennes de l'éther sont des équations linéaires, aux dérivées partielles et à coefficients constants, que l'on obtient en égalant la dérivée seconde de chaque déplacement moyen prise par rapport au temps, à la somme de trois expressions résultant de la substitution de fonctions entières de D_x, D_y, D_z aux coefficients périodiques des seconds membres des équations auxquelles satisfont, d'après le théorème précédent, les déplacements effectifs.*

Si donc on représente par

$$(19)\qquad \begin{cases} D_t^2 u = F(D_x, D_y, D_z, u, v, w), \\ D_t^2 v = G(D_x, D_y, D_z, u, v, w), \\ D_t^2 w = H(D_x, D_y, D_z, u, v, w), \end{cases}$$

les équations à coefficients périodiques auxquelles satisfont les déplacements effectifs, les équations auxiliaires auxquelles satisfont les déplacements moyens seront de la forme

$$(20)\qquad \begin{cases} D_t^2 u = F' + G' + H', \\ D_t^2 v = F'' + G'' + H'', \\ D_t^2 w = F''' + G''' + H''', \end{cases}$$

F', F'', F''' désignant des fonctions symboliques obtenues en substituant des fonctions entières de D_x, D_y, D_z aux coefficients périodiques de la fonction F, et G', G'', G''', ainsi que H', H'', H''', se déduisant de la même manière des fonctions G et H.

25. Ces résultats, obtenus en supposant les axes de coordonnées parallèles aux arêtes d'un parallélipipède élémentaire de l'assemblage cristallin, subsistent avec des axes quelconques.

Supposons, en effet, que les équations (2) soient celles qui représentent les vibrations de l'éther rapportées non plus à un système S' d'axes parallèles aux arêtes d'un parallélipipède élémentaire, mais à un système S d'axes dirigé d'une manière quelconque.

Soient x', y', z' et x, y, z les coordonnées d'un point par rapport aux systèmes S' et S; x', y', z' étant des fonctions linéaires et homogènes de x, y, z.

Un coefficient quelconque des équations (2), fonction périodique de x', y', z', est développable en série ordonnée suivant les puissances positives et négatives de trois exponentielles dont les exposants sont des fonctions linéaires et homogènes de x, y, z. En désignant par e, f, g ces trois exponentielles, les équations (5), (7), (8) subsistent, et l'on voit aisément que rien n'est à changer aux conséquences qui s'en déduisent.

On peut donc rapporter les vibrations de l'éther à un système d'axes *rectangulaires*, quel que soit le système cristallin. Après avoir déterminé la forme correspondante des fonctions F, G, H, on en déduira les équations auxiliaires par la règle que fournit le deuxième théorème du n° **24**.

25. Par suite de cette règle, tout se réduit à déterminer pour chaque milieu la forme des fonctions F, G, H. L'analyse du n° **9** établit la forme essentielle des fonctions dont il s'agit avec une généralité qu'on ne peut restreindre sans admettre de nouvelles hypothèses sur la constitution intime de l'éther et de la matière.

Un second Mémoire sera consacré à examiner les résultats auxquels conduit une hypothèse fort simple dont les conséquences paraissent conformes aux faits d'expérience. Cette hypothèse réduit notablement la forme des fonctions F, G, H, et par suite celle des équations auxiliaires.

Enfin, de nouvelles et importantes simplifications résultent de la symétrie propre au milieu cristallisé que l'on considère. C'est à l'étude de ces réductions qui établissent de remarquables relations entre les

phénomènes optiques et les lois cristallographiques qu'est consacré le Chapitre II du présent Mémoire.

26. En dehors de toute hypothèse et en laissant aux équations auxiliaires toute la généralité qu'elles comportent, elles renferment un nombre fort considérable de coefficients indéterminés.

Si l'on suppose, par exemple, que les fonctions F, G, H sont du second ordre par rapport à D_x, D_y, D_z et renferment les six dérivées partielles de chaque déplacement, si de plus on se borne dans les équations auxiliaires aux termes du second ordre, on voit que le nombre total des coefficients distincts peut s'élever à $18 \times 3 = 54$.

27. Il importe d'observer que le théorème général du n° **24** a été obtenu en supposant (n° **20**) que les fonctions A, B, C sont développables en séries très-convergentes ordonnées suivant les puissances entières et positives de α, β, γ, σ^2. Cette condition est remplie en général quand les modules des quantités α, β, γ, σ^2 sont très-petits par rapport à a, b, c : ce qui a lieu, dans les corps transparents, quand les longueurs d'ondulation sont très-grandes par rapport aux intervalles moléculaires. Dans le cas contraire, les fonctions A, B, C doivent être considérées comme des fonctions transcendantes. Il y a lieu de supposer que cette circonstance peut se présenter, dans les corps solides, pour les ondes les plus courtes, c'est-à-dire pour les rayons chimiques, et dans les corps gazeux ou vapeurs, dont les intervalles moléculaires sont plus grands, pour les ondes lumineuses ou même pour les ondes obscures.

Dans ce cas, la propagation de la lumière peut donc s'effectuer suivant des lois toutes spéciales. Nous ne faisons qu'indiquer ici ces circonstances remarquables, nous bornant à observer que, dans tous les cas, on obtient une infinité d'intégrales particulières des équations à coefficients périodiques, en égalant les déplacements aux produit s d'une même exponentielle $e^{\alpha x+\beta y+\gamma z+\sigma t}$ par des fonctions périodiques de x, y, z dont les coefficients sont des fonctions généralement transcendantes de α, β, γ, σ^2, ces derniers paramètres étant liés entre eux par une équation caractéristique généralement transcendante.

CHAPITRE II.

RÉDUCTION DES ÉQUATIONS DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES DE L'ÉTHER D'APRÈS LA SYMÉTRIE PROPRE AUX DIVERS SYSTÈMES CRISTALLINS.

1. Les corps cristallisés sont considérés comme composés de molécules polyédriques semblablement orientées, et dont les centres de gravité forment un *assemblage* de points distribués régulièrement. En admettant cette hypothèse, on est conduit à étudier les particularités qui résultent, au point de vue des phénomènes optiques, de la symétrie que peuvent présenter le polyèdre moléculaire et l'assemblage moléculaire.

2. M. Delafosse a signalé le premier le rôle important de la symétrie moléculaire dans les phénomènes cristallographiques, et spécialement dans celui qui est connu sous le nom d'*hémiédrie*. Dans une série de beaux Mémoires dont l'ensemble constitue une véritable cristallographie rationnelle, Bravais a montré comment les faits observés et les lois connues s'expliquaient par la symétrie moléculaire et la symétrie de l'assemblage. Il est indispensable de résumer brièvement ces remarquables travaux qui se rattachent intimement à l'étude des phénomènes optiques que présentent les cristaux.

3. Bravais a donné d'abord [*] une classification complète des polyèdres, au point de vue de leur symétrie.

Un polyèdre, ou plus généralement un système de points, peut présenter trois éléments de symétrie :

1° L'élément centre de symétrie;

2° L'élément axe de symétrie;

3° L'élément plan de symétrie.

Un point est centre de symétrie d'un système lorsque les points du système pris deux à deux sont rangés sur des diagonales dont ce point est le milieu.

Un *axe de symétrie* est une droite telle, qu'il suffit d'imprimer au

---

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville, t. XIV.

système une certaine rotation autour de cette droite pour substituer les divers points les uns aux autres. Le rapport de la circonférence au plus petit des arcs mesurant la rotation est toujours un nombre entier qui mesure l'*ordre* de la symétrie de l'axe. Un axe est dit *principal* quand il est parallèle ou perpendiculaire à tous les axes ou plans de symétrie du système. Un système dénué d'axe principal est dit *sphéroédrique*.

Enfin, *un plan de symétrie* est un plan tel, que les points du système sont deux à deux à égales distances de ce plan sur des droites qui lui sont perpendiculaires.

L'existence de deux de ces trois sortes d'éléments entraîne l'existence de la troisième.

4. Les polyèdres peuvent être divisés en vingt-trois classes réparties entre six groupes distincts comprenant :

1° Les polyèdres asymétriques (ne possédant aucun élément de symétrie);

2° Les polyèdres symétriques, sans axes;

3° Les polyèdres symétriques ayant un axe principal d'ordre pair;

4° Les polyèdres symétriques ayant un axe principal d'ordre impair;

5° Les polyèdres sphéroédriques à quatre axes ternaires;

6° Les polyèdres sphéroédriques à dix axes ternaires.

5. Après avoir étudié les divers genres de symétrie que peuvent présenter les polyèdres moléculaires, Bravais a examiné la symétrie de l'assemblage, c'est-à-dire la symétrie d'un *système réticulaire* de points déterminés par l'intersection de trois systèmes de plans équidistants et parallèles [*].

Il a démontré d'abord que l'ordre de la symétrie d'un système réticulaire ne pouvait être qu'un des nombres 2, 3, 4, 6, de sorte que la symétrie d'un axe de l'assemblage est nécessairement binaire, ternaire, quaternaire ou sénaire. Cela posé, classant les assemblages d'après la nature et le nombre de leurs axes de symétrie, il les a divisés en sept groupes ou *systèmes* distincts.

---

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, XXXIII^e^ Cahier.

Pour rappeler avec concision la nature de la symétrie qui caractérise chaque système, nous emploierons la notation de Bravais. Dans cette notation :

La lettre C représente un centre de symétrie;

Les symboles A^2, L^2, ... représentent des axes de symétrie binaires;

A^3, L^3, ... des axes de symétrie ternaires, et ainsi de suite;

La lettre A s'applique toujours à l'axe principal;

La lettre Π représente un plan de symétrie normal à l'axe principal;

La lettre P^2 un plan de symétrie normal à un axe binaire L^2;

La lettre P^3 un plan de symétrie normal à un axe ternaire L^3, et ainsi de suite.

Le nombre des axes d'un ordre est marqué par un coefficient précédant la lettre qui désigne un de ces axes : le nombre des plans de symétrie est marqué de la même manière.

Cela posé, la symétrie des sept systèmes est représentée par les notations du tableau ci-dessous.

NUMÉRO du système.	NOM de la symétrie.	SYMBOLE DE LA SYMÉTRIE.
1	Terquaternaire. . .	$3L^4$, $4L^3$, $6L^2$, C, $3P^4$, $6P^2$
2	Sénaire.	A^6, $6L^2$, C, Π, $6P^2$
3	Quaternaire.	A^4, $4L^2$, C, Π, $4P^2$
4	Ternaire.	A^3, $3L^2$, C, Π, $3P^2$
5	Terbinaire.	A^2, $2L^2$, C, Π, $2P^2$
6	Binaire.	A^2, C, Π
7	Asymétrique.	oL, C, oΠ

Dans un assemblage quelconque, chaque sommet étant un centre de symétrie, la lettre C se présente dans la notation de la symétrie de chaque système.

La notation même de la symétrie des six derniers systèmes rappelle immédiatement la situation relative des divers éléments de symétrie

qui les caractérisent. Ainsi, par exemple, pour le deuxième système, on voit que les six axes binaires sont dans le plan Π perpendiculaire à l'axe principal Λ et situés de manière que deux consécutifs de ces axes comprennent un angle de $\frac{360}{6} = 60$ degrés. Les six plans de symétrie sont perpendiculaires à ces six axes, et leur intersection est l'axe principal Λ.

Dans le premier système, les trois axes quaternaires, les quatre axes ternaires et les six axes binaires sont disposés comme le sont, dans un cube, les lignes joignant deux à deux : 1° les centres des faces opposées; 2° les sommets opposés; 3° les milieux des arêtes opposées.

6. Après ces études préliminaires, Bravais a examiné comment la symétrie d'une molécule peut être transmise, par la cristallisation, à l'assemblage moléculaire. Il a fait voir, à ce sujet, que l'équilibre doit s'établir plus facilement, dans un cristal qui se forme, si les centres de gravité des molécules se placent de manière que les axes et plans de symétrie de ces molécules, indéfiniment prolongés, deviennent des axes et plans de symétrie de l'assemblage moléculaire.

Il a admis, en conséquence, la règle suivante : Parmi les sept systèmes cristallins possibles, les molécules d'une substance donnée qui vient à cristalliser adoptent celui dont la symétrie offre le plus d'éléments communs avec la symétrie propre à leur polyèdre moléculaire.

Il a été conduit, en outre, à admettre que, dans le cas où plusieurs systèmes cristallins présenteraient les mêmes éléments de symétrie communs à leurs assemblages moléculaires et au polyèdre moléculaire donné, la cristallisation se fera suivant le système de moindre symétrie.

C'est d'après ces deux règles que Bravais a déterminé le système dans lequel doit cristalliser une substance dont le polyèdre moléculaire a une symétrie donnée.

7. On voit, d'après ce qui précède, que le polyèdre moléculaire d'une substance donnée et son assemblage cristallin possèdent en général des éléments de symétrie communs. Mais certains éléments de symétrie possibles dans un polyèdre sont impossibles dans un système réticulaire : par suite, ces éléments ne se transmettront pas de la molécule à l'assemblage moléculaire. Inversement, la coexistence de cer-

tains éléments de symétrie étant nécessaire dans un système réticulaire sans être nécessaire dans un polyèdre, on conçoit que le système cristallin d'une substance peut posséder certains éléments de symétrie absents dans la molécule.

A ce sujet, nous rappellerons quelques définitions données par Bravais.

Un cristal dans lequel le polyèdre moléculaire possède tous les éléments de symètrie de l'assemblage est dit *holoédrique*. Lorsque certains éléments de symétrie de l'assemblage manquent dans la molécule, le cristal est dit *mériédrique*.

Le polyèdre moléculaire est dit *holoaxe* lorsqu'il a tous les axes de symétrie de l'assemblage. Il est dit *hémiaxe* lorsque l'ordre de la symétrie de ses axes d'un certain ordre pair est moitié moindre que l'ordre de la symétrie des axes parallèles de l'assemblage. Il est dit *tétartoaxe* quand cette réduction à moitié a lieu pour tous les axes d'ordre pair ayant la même direction dans le polyèdre moléculaire et dans l'assemblage.

Tout polyèdre moléculaire qui ne possède ni centre ni plans de symétrie est dit *hémisymétrique*.

Tout polyèdre qui possède un centre de symétrie sera dit polyèdre *centré*.

Enfin, tout polyèdre dépourvu de centre, mais possédant un ou plusieurs plans de symétrie, est appelé *dichosymétrique*. Les mêmes désignations peuvent s'appliquer aux cristaux auxquels les polyèdres donnent naissance.

De là résulte la classification suivante des polyèdres moléculaires et des cristaux :

1° Holoaxes centrés ou holoédriques;
2° Holoaxes hémisymétriques;
3° Hémiaxes centrés;
4° Hémiaxes dichosymétriques;
5° Hémiaxes hémisymétriques;
6° Tétartoaxes centrés;
7° Tétartoaxes dichosymétriques;
8° Tétartoaxes hémisymétriques.

Bravais a montré comment les phénomènes cristallographiques

observés sur les cristaux doivent varier avec celle de ces huit catégories à laquelle appartient leur polyèdre moléculaire. En appliquant, en particulier, sa théorie à la détermination de la forme cristalline, c'est-à-dire du nombre des faces possibles dans un cristal, il a montré comment et suivant quelles lois, dans chaque système, l'absence, dans le polyèdre moléculaire, de certains éléments de symétrie de l'assemblage, entraînait une réduction du nombre des faces de manière à produire les phénomènes désignés par les cristallographes sous les noms de *hémiédrie* et *tétartoédrie*.

8. En résumé, les travaux dont nous venons de donner un aperçu établissent une relation entre la forme cristalline des diverses substances et la symétrie de leur molécule.

La forme cristalline se déduit théoriquement d'une symétrie moléculaire donnée et, inversement, la symétrie moléculaire d'une substance se déduit de sa forme cristalline observée.

Nous replaçant actuellement sur le terrain de l'optique théorique, nous sommes conduits à admettre une relation nécessaire entre la constitution que présente l'éther dans un cristal et la symétrie de sa molécule et de son assemblage. L'expression analytique de cette relation assigne aux équations des mouvements vibratoires une forme spéciale, variable avec la symétrie cristalline et à laquelle correspondent des phénomènes particuliers. On voit ainsi comment les deux théories, cristallographique et optique, établissent parallèlement une mutuelle dépendance entre les phénomènes lumineux que présentent les corps cristallisés et leur forme cristalline.

Le présent Chapitre de ce Mémoire est consacré à rechercher comment la forme des équations auxiliaires varie non-seulement avec le système cristallin, mais encore avec les différents cas de mériédrie qui peuvent se présenter dans chaque système.

Analyse.

9. L'analyse qui fait l'objet de ce Chapitre est fondée sur la remarque suivante.

La constitution de l'éther variant d'un point à un autre dans l'in-

térieur d'un cristal, d'après une loi qui dépend de l'action résultante exercée par la matière sur chacun de ses points, doit se reproduire la même partout où cette action est la même. Par suite, tout élément de symétrie des atomes matériels, c'est-à-dire tout élément de symétrie commun au polyèdre moléculaire du cristal et à son assemblage moléculaire, doit être considéré comme un élément de symétrie des atomes de l'éther.

Par suite, les équations des mouvements vibratoires des atomes de l'éther rapportés à un système d'axes S_1 ne doivent pas différer de celles que l'on obtient en rapportant les vibrations à un second système d'axes S_2 symétrique du premier par rapport à un centre ou plan de symétrie, commun au polyèdre et à l'assemblage moléculaires, ou obtenu en faisant tourner le premier de l'angle $\frac{2\pi}{n}$ autour d'un axe d'ordre n commun au polyèdre et à l'assemblage moléculaires.

Or cette transformation de coordonnées revient analytiquement à appliquer une substitution linéaire aux coordonnées x, y, z, et cette substitution doit transformer en elles-mêmes les équations auxiliaires auxquelles satisfont les vibrations moyennes de l'éther.

De cette condition dérive la forme particulière qui résulte, pour ces équations, de chacun des éléments de symétrie communs à la molécule et à l'assemblage.

10. *Lemme.* — On résout généralement ce problème en se fondant sur la proposition suivante :

Il existe généralement trois fonctions linéaires et homogènes de la forme $Ax + By + Cz$ qu'une substitution linéaire reproduit à un facteur constant près.

En effet, pour que la fonction

$$Ax + By + Cz$$

se reproduise multipliée par un certain facteur s, quand on y remplace x, y, z par

$$(1) \qquad \begin{cases} lx + my + nz, \\ l'x + m'y + n'z, \\ l''x + m''y + n''z, \end{cases}$$

il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$(2)\qquad \begin{cases} Al + Bl' + Cl'' = sA, \\ Am + Bm' + Cm'' = sB, \\ An + Bn' + Cn'' = sC; \end{cases}$$

or, ces trois équations déterminent s et des quantités proportionnelles à A, B, C; s est une des trois racines de l'équation

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} l - s, & l', & l'', \\ m, & m' - s, & m'' \\ n, & n', & n'' - s \end{vmatrix} = 0,$$

et à ces trois racines correspondent trois systèmes de valeurs de A, B, C.

11. Cela posé, considérons les équations auxiliaires. En désignant, pour abréger, D_x, D_y, D_z, D_t par α, β, γ, σ, ces équations sont de la forme

$$(4)\qquad \begin{cases} \sigma^2 u = F_1 u + F_2 v + F_3 w, \\ \sigma^2 v = G_1 u + G_2 v + G_3 w, \\ \sigma^2 w = H_1 u + H_2 v + H_3 w; \end{cases}$$

les F, G, H étant des fonctions entières à coefficients constants de α, β, γ. Supposons actuellement que l'on change la direction des axes de manière à substituer à x, y, z les expressions (1). Il est aisé de voir que, pour obtenir les transformées du système (3), il suffit d'y faire les substitutions suivantes :

$$(5)\qquad \begin{pmatrix} u, & v, & w \\ lu + mv + nw, & l'u + m'v + n'w, & l''u + m''v + n''w \end{pmatrix},$$

$$(6)\qquad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, \\ l\alpha + m\beta + n\gamma, & l'\alpha + m'\beta + n'\gamma, & l''\alpha + m''\beta + n''\gamma \end{pmatrix}.$$

Admettons qu'en opérant ainsi on reproduise identiquement le système (3).

12. Pour apercevoir plus aisément les conséquences de cette con-

dition, introduisons comme variables les trois fonctions linéaires de u, v, w que la substitution linéaire multiplie par s, s', s'' racines de l'équation (3). Soient u', v', w' ces fonctions, et α', β', γ' les fonctions analogues de α, β, γ.

Il est clair que le système (3) peut être remplacé par un système équivalent de la forme

$$(7)\qquad \begin{cases} \sigma^2 u' = f_1 u' + f_2 v' + f_3 w', \\ \sigma^2 v' = g_1 u' + g_2 v' + g_3 w', \\ \sigma^2 w' = h_1 u' + h_2 v' + h_3 w', \end{cases}$$

les f, g, h étant des fonctions entières de α', β', γ'. Cela posé, ce nouveau système se transforme par la substitution dans le suivant :

$$(8)\qquad \begin{cases} s\sigma^2 v' = sf'_1 u' + s' f'_2 v' + s'' f'_3 w', \\ s'\sigma^2 v' = sg'_1 u' + s' g'_2 v' + s'' g'_3 w', \\ s''\sigma^2 w' = sh'_1 u' + s' h'_2 v' + s'' h'_3 w', \end{cases}$$

où les f', g', h' représentent les transformées des f, g, h.

Pour que les systèmes (7) et (8) soient identiques, il faut que

$$(9)\qquad \begin{cases} f'_1 = f_1, & s' f'_2 = s f_2, & s'' f'_3 = s f_3, \\ s g'_1 = s' g_1, & g'_2 = g_2, & s'' g'_3 = s' g_3, \\ s h'_1 = s'' h_1, & s' h'_2 = s'' h_2, & h'_3 = h_3. \end{cases}$$

Des conditions (9) résulte la forme nécessaire des f, g, h. Considérons en effet une de ces fonctions, f_2 par exemple, et soit $A\alpha'^p \beta'^q \gamma'^r$ un de ses termes; ce terme devient par la substitution $A\alpha'^p \beta'^q \gamma'^r s^p s'^q s''^r$ et la condition $s' f'_2 = s f_2$ exige que l'on ait $s^p s'^{q+1} s''^r = s$. Il ne devra donc entrer dans f_2 que des termes tels, que les exposants entiers p, q, r satisfassent à la relation ci-dessus. Si cette condition est réalisable avec la substitution donnée, on détermine ainsi la forme des f, g, h et par suite celle des équations (7), d'où on déduit enfin les équations (4).

Quand on passe d'un système d'axes rectangulaires à un autre système d'axes rectangulaires, l'équation (3) a pour racines l'unité et

deux imaginaires conjuguées à module égal à l'unité. On a donc

$$s = 1, \quad s' = e^{\varphi i}, \quad s'' e^{-\varphi i}.$$

La condition

$$s^p s'^{q+1} s''^r = s$$

devient alors

$$e^{(q+1-r)\varphi i} = 1 :$$

d'où on déduit

$$q + 1 - r = \frac{2j\pi}{\varphi},$$

j désignant un nombre entier quelconque.

La condition n'est donc réalisable que si l'argument φ est commensurable avec la circonférence 2π.

13. Après avoir exposé ainsi la méthode générale, cherchons la forme des équations auxiliaires quand le polyèdre et l'assemblage moléculaires ont en commun :

1° Un centre de symétrie ;

2° Un plan de symétrie ;

3° Un axe de symétrie.

1° *Centre de symétrie.*

14. Prenons un centre comme origine. Les équations ne sont pas altérées quand on change le sens des x, y, z positifs, c'est-à-dire quand on fait les substitutions

$$(10) \qquad \begin{pmatrix} u, & v, & w \\ -u, & -v, & -w \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ -\alpha, & -\beta, & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Donc les F, G, H ne doivent renfermer que des termes de degré pair par rapport à α, β, γ.

2° *Plan de symétrie.*

15. Prenons le plan de symétrie pour plan des yz. Les équations ne doivent pas être altérées quand on change le sens des x positifs, et par suite quand on y change le signe de u et α.

Donc F_1, G_2, G_3, H_2, H_3 sont des fonctions paires et F_2, F_3, G_1, H_1 des fonctions impaires de α.

3° *Axe de symétrie.*

16. Prenons l'axe de symétrie pour axe des x, et soit φ l'angle dont on peut déplacer solidairement dans leur plan les oy, oz sans altérer la forme des équations (4). Le changement d'axes entraîne la substitution

$$(11) \qquad \begin{pmatrix} u, & v, & w, \\ u, & v\cos\varphi - w\sin\varphi, & v\sin\varphi + w\cos\varphi \end{pmatrix},$$

de sorte que les coefficients de la substitution (5) sont

$$\begin{array}{lll} 1, & 0, & 0, \\ 0, & \cos\varphi, & -\sin\varphi, \\ 0, & \sin\varphi, & \cos\varphi; \end{array}$$

les racines de l'équation (3) sont

$$s = 1, \quad s' = e^{\varphi i}, \quad s'' = e^{-\varphi i},$$

et l'on a enfin

$$\begin{aligned} u' &= u, \quad v' = v + wi, \quad w' = v - wi, \\ \alpha' &= \alpha, \quad \beta' = \beta + \gamma i, \quad \gamma' = \beta - \gamma i. \end{aligned}$$

Par conséquent, les deux premières des équations (7) deviennent

$$(12) \qquad \begin{cases} \sigma^2 u = f_1 u + f_2 (v + wi) + f_3 (v - wi), \\ \sigma^2 (v + wi) = g_1 u + g_2 (v + wi) + g_3 (v - wi), \end{cases}$$

les f, g, h désignant des fonctions entières, généralement imaginaires, de α, $\beta + \gamma i$, $\beta - \gamma i$. Il est inutile d'écrire la troisième équation, qui se déduit de la seconde en y changeant le signe de i.

Dans ce cas, les équations (9) deviennent

$$(13) \qquad \begin{cases} f_1' = f_1, & f_2' = e^{-\varphi i} f_2, & f_3' = e^{\varphi i} f_3, \\ g_1' = e^{\varphi i} g_1, & g_2' = g_2, & g_3' = e^{2\varphi i} g_3. \end{cases}$$

17. Il reste à déterminer la forme générale des fonctions qui satisfont à ces conditions. Soit $A\alpha^p(\beta+\gamma i)^q(\beta-\gamma i)^r$ le terme général d'une fonction que la substitution reproduit identiquement. La substitution multipliant ce terme par $e^{(q-r)\varphi i}$, on aura $e^{(q-r)\varphi i}=1$, et par suite $(q-r)\varphi=2j\pi$, j désignant un nombre entier quelconque. Il en résulte la condition

$$q-r=j\omega; \tag{14}$$

$\omega=\frac{2\pi}{\varphi}$ étant l'ordre de la symétrie; posons

$$q=q'+k\omega,$$
$$r=r'+l\omega,$$

k et l désignant des entiers positifs, et q' et r' des résidus positifs inférieurs à ω. La condition (14) entraînera évidemment la relation $r'=q'$, ce qui montre que le terme général peut être mis sous la forme

$$A\alpha^p(\beta^2+\gamma^2)^{q'}(\beta+\gamma i)^{k\omega}(\beta-\gamma i)^{l\omega}.$$

Si donc on pose

$$X+Yi=(\beta+\gamma i)^{\omega}, \tag{15}$$

on obtient le théorème suivant :

Toute fonction entière des variables α, β, γ se reproduisant identiquement, quand on applique à ces variables la substitution

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma\\ \alpha, & \beta\cos\varphi-\gamma\sin\varphi, & \beta\sin\varphi+\gamma\cos\varphi\end{pmatrix}, \tag{16}$$

est une fonction entière des quantités

$$\alpha,\quad \beta^2+\gamma^2,\quad X,\quad Y,$$

X et Y représentant les parties réelle et imaginaire de $(\beta+\gamma i)^{\omega}$, et ω désignant le rapport, supposé entier, de l'angle φ à la circonférence.

Nous appellerons *invariantes* les fonctions de cette forme jouissant de la propriété de ne pas être altérées par la substitution (16).

18. Supposons, en second lieu, que la fonction dont le terme général est $A\alpha^p(\beta+\gamma i)^q(\beta-\gamma i)^r$ soit multipliée, lorsqu'on lui applique la substitution (16), par le facteur $e^{n\varphi i}$, n désignant un nombre entier inférieur à ω. On a, dans ce cas, la condition

$$q - r = j\omega + n, \tag{17}$$

et en posant, comme précédemment,

$$q = q' + k\omega,$$
$$r = r' + l\omega,$$

on voit que la différence $q' - (r' + n)$ doit être un multiple de ω. Or, q' et r' variant de 0 à $\omega - 1$, et n variant de 1 à $\omega - 1$, la différence dont il s'agit varie de $\omega - 2$ à $-(2\omega - 2)$. On doit donc avoir

$$q' - (r' + n) = 0, \quad \text{d'où} \quad q' = r' + n,$$

ou bien

$$q' - (r' + n) = -\omega, \quad \text{d'où} \quad r' = q' + \omega - n;$$

par suite, le terme général présente une des deux formes

$$A\alpha^p(\beta^2+\gamma^2)^{r'}(\beta+\gamma i)^{k\omega}(\beta-\gamma i)^{l\omega}(\beta+\gamma i)^n,$$
$$A\alpha^p(\beta^2+\gamma^2)^{q'}(\beta+\gamma i)^{k\omega}(\beta-\gamma i)^{l\omega}(\beta-\gamma i)^{\omega-n}.$$

On en déduit le théorème suivant :

Toute fonction entière de α, β, γ, que la substitution (16) multiplie par $e^{n\varphi i}$, n étant un nombre entier inférieur à ω, est de la forme

$$F(\beta+\gamma i)^n + G(\beta-\gamma i)^{\omega-n},$$

F et G désignant deux fonctions entières *invariantes* de α, β, γ.

On démontre de la même manière que toute fonction que la substi-

tution multiplie par $e^{-n\varphi i}$ est de la forme

$$F(\beta-\gamma i)^n+G(\beta+\gamma i)^{\omega-n}.$$

19. Si on pose actuellement

$$(18)\qquad \begin{cases} X+Yi=(\beta+\gamma i)^{\omega}, \\ X_1+Y_1 i=(\beta+\gamma i)^{\omega-1}, \\ X_2+Y_2 i=(\beta+\gamma i)^{\omega-2}, \end{cases}$$

il résulte des formules (13) et des théorèmes précédemment démontrés :

1° Que les fonctions f_1 et g_2 sont des fonctions invariantes de α, β, γ. La fonction f_1 est réelle.

2° Que les fonctions f_2, f_3, g_1, g_3 sont de la forme

$$(19)\qquad \begin{cases} f_2=\psi\ (\beta-\gamma i)+\chi\ (X_1+Y_1 i), \\ f_3=\psi'(\beta+\gamma i)+\chi'(X_1-Y_1 i), \\ g_1=\psi''(\beta+\gamma i)+\chi''(X_1-Y_1 i), \\ g_3=\psi'''(\beta+\gamma i)^2+\chi'''(X_2-Y_2 i), \end{cases}$$

les ψ et χ désignant des fonctions entières invariantes de α, β, γ.

De plus, les fonctions f_2, f_3 étant évidemment conjuguées, il en est de même des fonctions ψ et ψ', et des fonctions χ et χ'.

Cela posé, écrivant $g_2+G_2 i$ à la place de g_2, et désignant les fonctions

$$\psi,\quad \psi',\quad \psi'',\quad \psi''',$$
$$\chi,\quad \chi',\quad \chi'',\quad \chi''',$$

respectivement par

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{f_2-f_3 i}{2},\quad \dfrac{\varphi_2-\varphi_3 i}{2},\quad g_1+G_1 i,\quad g_3+G_3 i, \\ \dfrac{f_2+f_3 i}{2},\quad \dfrac{\varphi_2+\varphi_3 i}{2},\quad h_1+H_1 i,\quad h_2+H_3 i, \end{cases}$$

on parvient aisément à mettre les équations (12) sous la forme sui-

vante, qui est la forme la plus générale des équations auxiliaires dans un milieu cristallisé ayant un axe de symétrie d'ordre ω :

$$
(21)\quad \begin{cases}
\sigma^2 u = f_1 u + f_2(\beta v + \gamma w) + f_3(\beta w - \gamma v) \\
\qquad + \varphi_2(X_1 v - Y_1 w) + \varphi_3(X_1 w + Y_1 v), \\
\sigma^2 v = g_2 v - G_2 w + (g_1\beta - G_1\gamma)u + (g_3\beta - G_3\gamma)(\beta v + \gamma w) \\
\qquad + (g_3\gamma + G_3\beta)(\beta w - \gamma v) \\
\qquad + (h_1 X_1 + H_1 Y_1)u + h_2(X_2 v - Y_2 w) + H_2(X_2 w + Y_2 v), \\
\sigma^2 w = g_2 w + G_2 v + (g_1\gamma + G_1\beta)u + (g_3\gamma + G_3\beta)(\beta v + \gamma w) \\
\qquad - (g_3\beta - G_3\gamma)(\beta w - \gamma v) \\
\qquad + (H_1 X_1 - h_1 Y_1)u + H_2(X_2 v - Y_2 w) - h_2(X_2 w + Y_2 v),
\end{cases}
$$

les fonctions f, φ, g, G, h, H étant des fonctions réelles de

$$\alpha, \quad \beta^2 + \gamma^2, \quad X, \quad Y,$$

et les X, Y ayant les valeurs fournies par les formules (18).

20. Nous passons actuellement à l'étude des équations particulières propres à chaque système cristallin et aux divers cas de mériédrie réalisés dans la nature.

1° *Système asymétrique.*

La seule réduction se présente quand la molécule est centrée. Dans ce cas, les termes d'ordre impair disparaissent dans les équations.

2° *Système binaire.*

Prenons l'axe de symétrie pour axe des x. Les équations (4) doivent rester inaltérées quand on y substitue $-v$, $-w$ à v, w, et $-\beta$, $-\gamma$ à β, γ. Il en résulte que F_1, G_2, G_3, H_2, H_3 ne doivent pas changer quand on y change le signe de β, γ, et F_2, F_3, G_1, H_1 doivent changer de signe par la même substitution. Les fonctions non altérées ne renferment que des termes d'ordre pair par rapport à β, γ, et les autres des termes d'ordre impair par rapport aux mêmes variables.

Dans le système binaire, on a deux cas à considérer :

1° *Holoaxie centrée* (Λ^2, C, P). — Les équations sont composées de termes d'ordre pair par rapport à α, β, γ.

2° *Holoaxie hémisymétrique* (Λ^2, oC, oP). — Les équations renferment des puissances paires et impaires de α.

3° *Symétrie terbinaire.*

21. 1° *Holoaxie hémisymétrique* (Λ^2, $2L^2$, oC, oP). — Les équations ne doivent pas être altérées quand on y change le signe des variables comprises dans un des trois groupes suivants :

$$(22)\qquad \begin{cases} v, & w; & \beta, & \gamma, \\ w, & u; & \gamma, & \alpha, \\ u, & v; & \alpha, & \beta; \end{cases}$$

il est aisé d'en déduire la forme des F, G, H.

En effet, la fonction F_1 ne devant être altérée par aucune des trois substitutions doit être composée de termes $A\alpha^p\beta^q\gamma^r$ tels, que les sommes $q+r$, $r+p$, $p+q$ soient des nombres pairs. Donc p, q, r sont simultanément pairs ou impairs, suivant que la somme $p+q+r$ est paire ou impaire. Par suite, la fonction F_1 est de la forme

$$(23)\qquad F_1 = f_1 + \varphi_1 \alpha\beta\gamma,$$

f_1 et φ_1 désignant des fonctions entières de α^2, β^2, γ^2.

La fonction F_2 change de signe par la première et la seconde substitution, et ne change pas par la troisième : par suite, $q+r$, $r+p$ sont impairs et $p+q$ pair. Il en résulte : 1° que si le degré $p+q+r$ du terme général est pair, p et q sont impairs et r pair; 2° si le degré $p+q+r$ est impair, p et q sont pairs et r est impair. On en conclut que la fonction F_2 est de la forme

$$(24)\qquad F_2 = f_2\alpha\beta + \varphi_2\gamma,$$

f_2 et φ_2 désignant des fonctions entières de α^2, β^2, γ^2.

On détermine de même les autres fonctions, et on obtient les équa-

tions auxiliaires sous la forme suivante :

$$(25)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f_1 u + f_2 \alpha\beta v + f_3 \alpha\gamma w + \varphi_1 \alpha\beta\gamma u + \varphi_2 \gamma v + \varphi_3 \beta w, \\ \sigma^2 v = g_1 \alpha\beta u + g_2 v + g_3 \beta\gamma w + \chi_1 \gamma u + \chi_2 \alpha\beta\gamma v + \chi_3 \alpha w, \\ \sigma^2 w = h_1 \alpha\gamma u + h_2 \beta\gamma v + h_3 w + \psi_1 \beta u + \psi_2 \alpha v + \psi_3 \alpha\beta\gamma w, \end{cases}$$

les f, g, h, φ, χ, ψ désignant des fonctions entières de α^2, β^2, γ^2.

22. 2° *Holoaxie centrée* [Λ^2, $2L^2$, C, Π, $2P$]. — Les termes d'ordre impair disparaissant, les équations sont

$$(26)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f_1 u + f_2 \alpha\beta v + f_3 \alpha\gamma w, \\ \sigma^2 v = g_1 \beta\alpha u + g_2 v + g_3 \beta\gamma w, \\ \sigma^2 w = h_1 \gamma\alpha u + h_2 \gamma\beta v + h_3 w. \end{cases}$$

23. 3° *Hémiaxie dichosymétrique* [Λ^2, oL^2, oC, $2P$]. — Prenons l'axe de symétrie Λ^2 pour axe des x, les axes des y et z étant respectivement perpendiculaires aux deux plans de symétrie. Les équations (4) ne doivent pas être altérées quand on y change le signe de v, β, ou bien de w, γ.

On voit, par suite, que F_1 est une fonction paire de β et de γ, réductible à la forme

$$(27)\quad F_1 = f_1 + \varphi_1 \alpha,$$

f_1 et φ_1 étant fonctions de α^2, β^2, γ^2.

F_2 est une fonction impaire de β et paire de γ, réductible à la forme

$$(28)\quad F_2 = f_2 \alpha\beta + \varphi_2 \beta,$$

f_2 et φ_2 étant également fonctions de α^2, β^2, γ^2.

Les équations auxiliaires sont les suivantes :

$$(29)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f_1 u + f_2 \alpha\beta v + f_3 \alpha\gamma w + \varphi_1 \alpha u + \varphi_2 \beta v + \varphi_3 \gamma w, \\ \sigma^2 v = g_1 \beta\alpha u + g_2 v + g_3 \beta\gamma w + \chi_1 \beta u + \chi_2 \alpha v + \chi_3 \alpha\beta\gamma w, \\ \sigma^2 w = h_1 \gamma\alpha u + h_2 \gamma\beta v + h_3 w + \psi_1 \gamma u + \psi_2 \alpha\beta\gamma v + \psi_3 \alpha w, \end{cases}$$

les f, g, h, φ, χ, ψ désignant des fonctions entières de α^2, β^2, γ^2.

4° Symétries ternaire, quaternaire et sénaire.

24. Les équations relatives à ces trois systèmes sont comprises dans les équations (21) et diffèrent, quand on passe d'un système à l'autre, par les valeurs des six quantités X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 qui ont, dans les trois genres de symétrie, les valeurs comprises dans le tableau suivant.

	SYMÉTRIE ternaire.	SYMÉTRIE quaternaire.	SYMÉTRIE sénaire.
X	$\beta^3 - 3\beta\gamma^2$	$(\beta^2+\gamma^2)^2$	$\beta^6 - 15\beta^4\gamma^2 + 15\beta^2\gamma^4 - \gamma^6$
Y	$3\beta^2\gamma - \gamma^3$	$4\beta\gamma(\beta^2-\gamma^2)$	$6\beta^5\gamma - 20\beta^3\gamma^3 + 6\beta\gamma^5$
X_1	$\beta^2 - \gamma^2$	$\beta^3 - 3\beta\gamma^2$	$\beta^5 - 10\beta^3\gamma^2 + 5\beta\gamma^4$
Y_1	$2\beta\gamma$	$3\beta^2\gamma - \gamma^3$	$5\beta^4\gamma - 10\beta^2\gamma^3 + \gamma^5$
X_2	β	$\beta^2 - \gamma^2$	$\beta^4 - 6\beta^2\gamma^2 + \gamma^4$
Y_2	γ	$2\beta\gamma$	$4\beta\gamma(\beta^2-\gamma^2)$

En substituant, pour chacun des trois systèmes cristallins, les valeurs des six quantités données par ce tableau, on obtient les équations générales propres à représenter les vibrations de la lumière dans un cristal de ce système.

Nous examinerons actuellement ce que deviennent ces équations quand le cristal présente :

1° L'holoaxie hémisymétrique;
2° L'holoaxie centrée;
3° L'hémiaxie dichosymétrique;
4° L'hémiaxie hémisymétrique.

25. *Holoaxie hémisymétrique.* — Dans ce cas, le polyèdre moléculaire et l'assemblage présentent trois, quatre ou six axes de symétrie dirigés dans un plan perpendiculaire à l'axe principal de symétrie. Prenant un de ces axes pour axe des y, on voit que les équations (21)

ne doivent pas être altérées quand, sans changer l'axe des y positifs, on substitue aux axes positifs des x et des z leurs prolongements.

Ce changement de coordonnées entraîne les substitutions suivantes :

$$\begin{pmatrix} u, & v, & w \\ -u, & v, & -w \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ -\alpha, & \beta, & -\gamma \end{pmatrix}.$$

On voit d'ailleurs que ces substitutions ne changent pas X, X_1, X_2 et changent le signe de Y, Y_1, Y_2. En effet, en changeant le signe de γ, l'expression

$$(\beta + \gamma i)^m = X_m + Y_m i$$

devient

$$(\beta - \gamma i)^m = X_m - Y_m i.$$

Cela posé, on voit aisément que, pour que les substitutions dont il s'agit n'altèrent pas le système des équations (21), il faut que, par la substitution de $-\alpha$, $-Y$ à α, Y :

1° Les fonctions

$$f_1, f_3, \varphi_3, G_1, g_2, g_3, H_1, H_2$$

ne changent pas de valeur;

2° Les fonctions

$$f_2, \varphi_2, g_1, G_2, G_3, h_1, H_2$$

changent de signe.

D'ailleurs, toute fonction entière de α, Y qui change de signe quand on y change le signe de ces variables, est de la forme

$$f\alpha + f'Y,$$

et toute fonction ne changeant pas, par la même substitution, est de la forme

$$f + f'\alpha Y,$$

f et f' désignant des fonctions entières de α^2, Y^2.

On en déduit définitivement que le système des équations (21) peut, dans le cas que nous considérons, s'écrire de la manière suivante :

$$
(30)\quad
\begin{cases}
\sigma^2 u = f_1 u + f_2\alpha(\beta v+\gamma w) + f_3(\beta w-\gamma v)\\
\qquad + Y[f'_1\alpha u + f'_2(\beta v+\gamma w) + f'_3\alpha(\beta w-\gamma v)]\\
\qquad + \varphi_2\alpha(X_1 v - Y_1 w) + \varphi_3(X_1 w + Y_1 v)\\
\qquad + Y[\varphi'_2(X_1 v - Y_1 w) + \varphi'_3\alpha(X_1 w + Y_1 v)],\\
\sigma^2 v = g_2 v - G_2\alpha w + (g_1\alpha\beta - G_1\gamma)u\\
\qquad + (g_3\beta - G_3\alpha\gamma)(\beta v+\gamma w) + (g_3\gamma + G_3\alpha\beta)(\beta w-\gamma v)\\
\qquad + Y[g'_2\alpha v - G'_2 w + (g'_1\beta - G'_1\alpha\gamma)u\\
\qquad\qquad + (g'_3\alpha\beta - G'_3\gamma)(\beta v+\gamma w) + (g'_3\alpha\gamma + G'_3\beta)(\beta w-\gamma v)]\\
\qquad + (h_1\alpha X_1 + H_1 Y_1)u + h_2(X_2 v - Y_2 w) + H_2\alpha(X_2 w + Y_2 v)\\
\qquad + Y[(h'_1 X_1 + H'_1\alpha Y_1)u\\
\qquad\qquad + h'_2\alpha(X_2 v - Y_2 w) + H'_2(X_2 w + Y_2 v)],\\
\sigma^2 w = g_2 w + G_2\alpha v + (g_1\alpha\gamma + G_1\beta)u\\
\qquad + (g_3\gamma + G_3\alpha\beta)(\beta v+\gamma w) - (g_3\beta - G_3\alpha\gamma)(\beta w-\gamma v)\\
\qquad + Y[g'_2\alpha w + G'_2\alpha v + (g'_1\gamma + G'_1\alpha\beta)u\\
\qquad\qquad + (g'_3\alpha\gamma + G'_3\beta)(\beta v+\gamma w) - (g'_3\alpha\beta - G'_3\gamma)(\beta w-\gamma v)]\\
\qquad + (H_1 X_1 - h_1\alpha Y_1)u + H_2\alpha(X_2 v - Y_2 w) - h_2(X_2 w + Y_2 v)\\
\qquad + Y[(H'_1\alpha X_1 - h'_1 Y_1)u\\
\qquad\qquad + H'_2(X_2 v - Y_2 w) - h'_2\alpha(X_2 w + Y_2 v)],
\end{cases}
$$

les fonctions indéterminées qui entrent dans ces équations étant des fonctions entières de

$$\alpha^2,\ \beta^2+\gamma^2,\ X,\ Y^2.$$

26. *Holoaxie centrée.* — Les équations s'obtiennent en supprimant dans les précédentes les termes de degré impair par rapport à α, β, γ.

27. *Hémiaxie dichosymétrique.* — Supposons que le polyèdre moléculaire soit dénué de centre et possède, en commun avec l'assemblage, plusieurs plans de symétrie passant par l'axe principal ox. Si

l'on prend un de ces plans pour plan des xy, on voit que les équations (21) ne doivent pas être altérées quand on y change w en $-w$ et γ en $-\gamma$, ce qui substitue $-Y$, $-Y_1$, $-Y_2$ à Y, Y_1, Y_2.

On en déduit aisément que les fonctions

$$f_1,\ f_2,\ \varphi_2,\ g_1,\ g_2,\ g_3,\ h_1,\ h_2$$

ne changent pas et que les fonctions

$$f_3,\ \varphi_3,\ G_1,\ G_2,\ G_3,\ H_1,\ H_2$$

changent de signe quand on y change le signe de Y.

Les premières sont donc des fonctions de Y^2, et les autres sont égales au produit de Y par des fonctions de Y^2. On parvient ainsi à mettre les équations (21) sous la forme :

$$(31)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f_1 u + f_2(\beta v + \gamma w) + f_3 Y(\beta w - \gamma v) \\ \qquad + \varphi_2(X_1 v - Y_1 w) + \varphi_3 Y(X_1 w + Y_1 v), \\ \sigma^2 v = g_2 v - G_2 Y w + (g_1\beta - G_1 Y\gamma)u + (g_3\beta - G_3 Y\gamma)(\beta v + \gamma w) \\ \qquad + (g_3\gamma + G_3 Y\beta)(\beta w - \gamma v) + (h_1 X_1 + H_1 Y Y_1)u \\ \qquad + h_2(X_2 v - Y_2 w) + H_2 Y(X_2 w + Y_2 v), \\ \sigma^2 w = g_2 w + G_2 Y v + (g_1\gamma + G_1 Y\beta)u + (g_3\gamma + G_3 Y\beta)(\beta v + \gamma w) \\ \qquad - (g_3\beta - G_3 Y\gamma)(\beta w - \gamma v) + (H_1 Y X_1 - h_1 Y_1)u \\ \qquad + H_2 Y(X_2 v - Y_2 w) - h_2(X_2 w + Y_2 v), \end{cases}$$

les fonctions renfermées dans ces équations dépendant de α, $\beta^2 + \gamma^2$, X, Y^2.

28. *Hémiaxie hémisymétrique.* — L'hémiaxie peut avoir lieu, soit par la suppression des axes binaires, soit par la réduction à moitié de l'ordre de l'axe principal.

Dans le premier cas, les équations auxiliaires sont les équations (21). Dans le second cas, elles coïncident avec celles qui correspondent à l'holoaxie du système caractérisé par un axe principal d'un ordre moitié moindre que celui que présente le système cristallin considéré.

Enfin, en supprimant les termes d'ordre impair dans les équations de l'hémiaxie hémisymétrique, on obtient les équations de l'*hémiaxie centrée*.

5° *Symétrie terquaternaire.*

29. On a, dans ce système, cinq cas à considérer :

1° Holoaxie hémisymétrique. . $[3L^4, 4L^3, 6L^2, oC, oP]$;
2° Holoaxie centrée . . . . . $[3L^4, 4L^3, 6L^2, C, 3P^4, 6P^2]$;
3° Hémiaxie hémisymétrique. . $[3L^2, 4L^3, oC, oP]$;
4° Hémiaxie dichosymétrique. . $[3L^2, 4L^3, oC, 6P]$;
5° Hémiaxie centrée . . . . . $[3L^2, 4L^3, C, 3P^2]$.

Nous allons examiner la forme des équations auxiliaires dans chacun de ces cas particuliers.

Observant d'abord que, dans chacun de ces cas, le polyèdre moléculaire et l'assemblage possèdent quatre axes ternaires, nous allons déterminer les conséquences qui résultent de l'existence de ces axes. Ces quatre axes sont dirigés, comme on l'a remarqué au n° 5, suivant les lignes qui dans un cube joignent les sommets opposés.

Nous prendrons pour axes de coordonnées les arêtes du cube dont les grandes diagonales sont parallèles aux quatre axes ternaires. Ces axes sont dirigés suivant les trois axes quaternaires de l'assemblage.

30. Considérons d'abord l'axe ternaire compris dans le trièdre déterminé par les parties positives des axes de coordonnées, et supposons que l'on fasse tourner le système de ces axes de 120 degrés autour de l'axe ternaire. Les équations (4) ne doivent pas être altérées par la substitution.

Or, cette rotation permute circulairement les directions des axes, de sorte que les nouveaux axes des x, y, z coïncident avec les anciens des y, z, x, si la rotation s'effectue dans un sens, et avec les anciens axes des z, x, y si elle s'effectue en sens inverse.

On a donc les deux substitutions

$$(32)\qquad \begin{pmatrix} u, & v, & w \\ v, & w, & u \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \beta, & \gamma, & \alpha \end{pmatrix};$$

$$(33)\qquad \begin{pmatrix} u, & v, & w \\ w, & u, & v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \gamma, & \alpha, & \beta \end{pmatrix}.$$

qui ne doivent pas altérer les équations (4).

Désignons par un ou deux accents les transformées des F, G, H par les substitutions (32) ou (33). Ces substitutions transforment évidemment la première équation (4) dans les suivantes :

$$\sigma^2 v = F'_3 u + F'_1 v + F'_2 w,$$
$$\sigma^2 w = F''_2 u + F''_3 v + F''_1 w.$$

Donc, par suite de l'existence de l'axe ternaire, le système des équations (4) doit être de la forme

$$(34) \qquad \begin{cases} \sigma^2 u = F_1 u + F_2 v + F_3 w, \\ \sigma^2 v = F'_3 u + F'_1 v + F'_2 w, \\ \sigma^2 w = F''_2 u + F''_3 v + F''_1 w. \end{cases}$$

31. Considérons maintenant l'axe ternaire également incliné sur les parties positives des axes ox, oz et sur la partie négative de oy.

Dans ce cas, le système des équations (4) ne doit pas être altéré par la substitution

$$(35) \qquad \begin{pmatrix} u, & v, & w \\ -v, & -w, & u \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ -\beta, & -\gamma, & \alpha \end{pmatrix}.$$

Or, le même système étant inaltéré par la substitution (32) devra l'être par la suivante :

$$\begin{pmatrix} u, & v, & w \\ -u, & -v, & w \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ -\alpha, & -\beta, & \gamma \end{pmatrix}.$$

Par conséquent l'axe des z est un axe de symétrie binaire.

Ainsi, l'existence des deux axes de symétrie ternaires entraîne l'existence d'un axe de symétrie binaire, et inversement l'existence de cet axe binaire et d'un des axes ternaires entraîne l'existence du second axe ternaire.

On en conclut immédiatement que, avec les quatre axes ternaires disposés comme les quatre grandes diagonales d'un cube, existent nécessairement trois axes binaires dirigés suivant les arêtes de ce cube ; et

inversement, les trois axes binaires et un des axes ternaires entraînent les trois autres axes ternaires.

32. *Hémiaxie hémisymétrique* ($3L^2, 4L^3$, oC, oP).

Cela posé, pour obtenir les équations auxiliaires de l'hémiaxie hémisymétrique, il suffira de prendre comme point de départ les équations de l'holoaxie hémisymétrique du système terbinaire (25), et d'y introduire les conditions établies au n° **30**. On obtient ainsi le système suivant :

$$(36)\begin{cases} \sigma^2 u = f_1 u + f_2 \alpha\beta v + f_3 \alpha\gamma w + \varphi_1 \alpha\beta\gamma u + \varphi_2 \gamma v + \varphi_3 \beta w, \\ \sigma^2 v = f'_3 \beta\alpha u + f'_1 v + f'_2 \beta\gamma w + \varphi'_3 \gamma u + \varphi'_1 \alpha\beta\gamma v + \varphi'_2 \alpha w, \\ \sigma^2 w = f''_2 \alpha\gamma u + f''_3 \gamma\beta v + f''_1 w + \varphi''_2 \beta u + \varphi''_3 \alpha v + \varphi''_1 \alpha\beta\gamma w, \end{cases}$$

où on dénote toujours par un ou deux accents ce que deviennent les fonctions de la première équation par les substitutions

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \beta, & \gamma, & \alpha \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \gamma, & \alpha, & \beta \end{pmatrix}.$$

Nous rappelons que ces fonctions sont des fonctions entières de α^2, β^2, γ^2.

33. *Hémiaxie dichosymétrique* ($3L^2, 4L^3$, oC, 6P).

Le système cristallisé présente, dans le cas actuel, six plans de symétrie, partageant en deux parties égales les dièdres que forment deux à deux les plans coordonnés. Les axes de symétrie sont les mêmes que dans le cas précédent. Les équations sont donc comprises dans le système (36) : exprimons en outre la condition qu'entraîne le plan de symétrie bissecteur du dièdre droit compris entre les plans xoz, yoz.

Il est clair que, si l'on donne aux axes oy, oz des positions symétriques par rapport à ce plan de celles qu'ils occupent effectivement, on permute ces deux axes, de sorte qu'au changement d'axes dont il s'agit correspond la substitution

$$\begin{pmatrix} u, & v, & w \\ u, & w, & v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha, & \gamma, & \beta \end{pmatrix},$$

et cette substitution doit transformer en elles-mêmes les équations (36). On en conclut aisément que :

1° Les fonctions f_1, φ_1 sont des fonctions symétriques de β^2, γ^2, c'est-à-dire des fonctions de $\beta^2+\gamma^2$ et $\beta^2\gamma^2$.

2° L'on a les relations identiques

$$f_3(\alpha^2,\beta^2,\gamma^2)=f_2(\alpha^2,\gamma^2,\beta^2),$$
$$\varphi_3(\alpha^2,\beta^2,\gamma^2)=\varphi_2(\alpha^2,\gamma^2,\beta^2).$$

Par conséquent les équations sont nécessairement de la forme

$$(37)\quad\left\{\begin{aligned}
\sigma^2 u &= f_1(\alpha^2,\beta^2+\gamma^2,\beta^2\gamma^2)u+f_2(\alpha^2,\beta^2,\gamma^2)\beta\gamma v\\
&\quad+f_2(\alpha^2,\gamma^2,\beta^2)\alpha\gamma w+\varphi_1(\alpha^2,\beta^2+\gamma^2,\beta^2\gamma^2)\alpha\beta\gamma u\\
&\quad+\varphi_2(\alpha^2,\beta^2,\gamma^2)\gamma v+\varphi_2(\alpha^2,\gamma^2,\beta^2)\beta w,\\
\sigma^2 v &= f_2(\beta^2,\alpha^2,\gamma^2)\beta\alpha u+f_1(\beta^2,\alpha^2+\gamma^2,\alpha^2\gamma^2)v\\
&\quad+f_2(\beta^2,\gamma^2,\alpha^2)\beta\gamma w+\varphi_2(\beta^2,\alpha^2,\gamma^2)\gamma u\\
&\quad+\varphi_1(\beta^2,\alpha^2+\gamma^2,\alpha^2\gamma^2)\alpha\beta\gamma v+\varphi_2(\beta^2,\gamma^2,\alpha^2)\alpha w,\\
\sigma^2 w &= f_2(\gamma^2,\alpha^2,\beta^2)\alpha\gamma u+f_2(\gamma^2,\beta^2,\alpha^2)\beta\gamma v\\
&\quad+f_1(\gamma^2,\alpha^2+\beta^2,\alpha^2\beta^2)w+\varphi_2(\gamma^2,\alpha^2,\beta^2)\beta u\\
&\quad+\varphi_2(\gamma^2,\beta^2,\alpha^2)\alpha v+\varphi_1(\gamma^2,\alpha^2+\beta^2,\alpha^2\beta^2)\alpha\beta\gamma w.
\end{aligned}\right.$$

Il est d'ailleurs facile de voir que ces équations jouissent des propriétés analytiques qui correspondent aux six plans de symétrie que possède le système. De sorte que les équations (37) constituent les équations générales relatives à l'hémiaxie dichosymétrique du système terquaternaire.

34. *Hémiaxie centrée.* — Les équations sont les équations (36), moins les termes d'ordre impair, c'est-à-dire les suivantes :

$$(38)\quad\left\{\begin{aligned}
\sigma^2 u &= f_1 u+f_2\alpha\beta v+f_3\alpha\gamma.w,\\
\sigma^2 v &= f_3'\beta\alpha u+f_1' v+f_2'\beta\gamma.w,\\
\sigma^2 w &= f_2''\gamma\alpha.u+f_3''\gamma\beta v+f_1''.w.
\end{aligned}\right.$$

35. *Holoaxie hémisymétrique* ($3L^4$, $4L^3$, $6L^2$, oC, oP).

Il est clair que les équations qu'il s'agit d'obtenir sont comprises

dans les formules (36). Il suffit d'exprimer dans celles-ci que le système possède un axe quaternaire ; en effet, l'existence des axes ternaires entraîne l'existence des deux autres axes quaternaires.

D'ailleurs, on sait que les axes binaires sont une conséquence nécessaire des axes ternaires et quaternaires.

Il suffit donc d'exprimer que l'axe des x est un axe quaternaire.

Par suite, les équations ne doivent pas être altérées, si on fait tourner solidairement les axes oy et oz de 90 degrés dans leur plan. Or, ce changement d'axes introduit la substitution

$$\begin{pmatrix} u, & v, & w \\ u, & -w, & v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha, & -\gamma, & \beta \end{pmatrix}.$$

Cette substitution ne devant pas altérer les équations (36), on voit que :

1° La fonction f_1 est une fonction symétrique de β^2 et γ^2.

2° La fonction φ_1 est une fonction alternée des mêmes variables, et est par conséquent égale au produit de $\beta^2 - \gamma^2$ par une fonction symétrique de β^2, γ^2.

3° L'on a enfin les relations

$$f_3(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = f_2(\alpha^2, \gamma^2, \beta^2),$$
$$\varphi_3(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = -\varphi_2(\alpha^2, \gamma^2, \beta^2).$$

On obtient ainsi le système des équations auxiliaires sous la forme :

$$(39)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f_1(\alpha^2, \beta^2+\gamma^2, \beta^2\gamma^2)\,u + f_2(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)\,\alpha\beta v \\ \qquad + f_2(\alpha^2, \gamma^2, \beta^2)\,\alpha\gamma w + \varphi_1(\alpha^2, \beta^2+\gamma^2, \beta^2\gamma^2)(\beta^2-\gamma^2)\,\alpha\beta\gamma u \\ \qquad + \varphi_2(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)\,\gamma v - \varphi_2(\alpha^2, \gamma^2, \beta^2)\,\beta w, \\ \sigma^2 v = f_2(\beta^2, \alpha^2, \gamma^2)\,\beta\alpha u + f_1(\beta^2, \gamma^2+\alpha^2, \gamma^2\alpha^2)\,v \\ \qquad + f_2(\beta^2, \gamma^2, \alpha^2)\,\beta\gamma w - \varphi_2(\beta^2, \alpha^2, \gamma^2)\,\gamma u \\ \qquad + \varphi_1(\beta^2, \gamma+\alpha^2, \gamma^2\alpha^2)(\gamma^2-\alpha^2)\,\alpha\beta\gamma v + \varphi_2(\beta^2, \gamma^2, \alpha^2)\,\alpha w, \\ \sigma^2 w = f_2(\gamma^2, \alpha^2, \beta^2)\,\gamma\alpha u + f_2(\gamma^2, \beta^2, \alpha^2)\,\gamma\beta v \\ \qquad + f_1(\gamma^2, \alpha^2+\beta^2, \alpha^2\beta^2)\,w + \varphi_2(\gamma^2, \alpha^2, \beta^2)\,\beta u \\ \qquad - \varphi_2(\gamma^2, \beta^2, \alpha^2)\,\alpha v + \varphi_1(\gamma^2, \alpha^2+\beta^2, \alpha^2\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)\,\alpha\beta\gamma w \end{cases}$$

36. *Holoaxie centrée* ($3L^4, 4L^3, 6L^2, C, 3P^4, 6P^2$).

Les équations se déduisent des précédentes par la suppression des termes d'ordre impair

$$(40)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f_1(\alpha^2, \beta^2+\gamma^2, \beta^2\gamma^2)u + f_2(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)\alpha\beta v \\ \qquad\quad + f_2(\alpha^2, \gamma^2, \beta^2)\alpha\gamma w, \\ \sigma^2 v = f_2(\beta^2, \alpha^2, \gamma^2)\beta\alpha u + f_1(\beta^2, \gamma^2+\alpha^2, \gamma^2\alpha^2)v \\ \qquad\quad + f_2(\beta^2, \gamma^2, \alpha^2)\beta\gamma w, \\ \sigma^2 w = f_2(\gamma^2, \alpha^2, \beta^2)\gamma\alpha u + f_2(\gamma^2, \beta^2, \alpha^2)\gamma\beta v \\ \qquad\quad + f_1(\gamma^2, \alpha^2+\beta^2, \alpha^2\beta^2)w. \end{cases}$$