

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES  
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

J. LIOUVILLE

Sur la forme  $x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2$

*Journal de mathématiques pures et appliquées* 2<sup>e</sup> série, tome 9 (1864), p. 421-424.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1864\\_2\\_9\\_421\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9_421_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR LA FORME

$$x^2 + 2(\gamma^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Après ce que nous avons donné (dans le cahier d'août) au sujet des deux formes à six variables

$$x^2 + \gamma^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)$$

et

$$x^2 + \gamma^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2),$$

c'est chose bien facile que de trouver une expression simple du nombre des représentations d'un entier donné  $n$  par la forme nouvelle

$$x^2 + 2(\gamma^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2,$$

c'est-à-dire du nombre

$$N[n = x^2 + 2(\gamma^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2]$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 2(\gamma^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2,$$

dans laquelle  $x, \gamma, z, t, u, v$  sont des entiers indifféremment pairs ou impairs, positifs, nuls ou négatifs.

Il est évident, en effet, que quand  $n$  est impair la valeur demandée de

$$N[n = x^2 + 2(\gamma^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2]$$

est précisément la moitié de celle de

$$N[n = x^2 + \gamma^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)],$$

et que quand  $n$  est au contraire un nombre pair  $2g$  elle est égale à

celle de

$$N[g = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)].$$

2. Pour déduire de là des formules explicites, nous poserons

$$n = 2^\alpha m,$$

$m$  désignant un entier impair, et nous distinguerons trois cas, savoir : le cas de  $\alpha = 0$ , celui de  $\alpha = 1$ , celui de  $\alpha > 1$ .

Pour  $\alpha = 0$ , c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier impair  $m$ , la formule est

$$N[m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2] = 2\rho_2(m),$$

$\rho_2(m)$  désignant (comme à l'endroit cité plus haut) la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2,$$

relative aux diviseurs conjugués  $d, \delta$  de l'entier  $m = d\delta$ .

Pour  $\alpha = 1$ , c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier impairement pair  $2m$ , on a

$$N[2m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2] = 8\rho_2(m).$$

Enfin pour  $\alpha > 1$ , c'est-à-dire quand l'entier  $2^\alpha m$  est pairement pair, on obtient

$$N[2^\alpha m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2] = 4 \left[ 2^{2\alpha-1} - (-1)^{\frac{m-1}{2}} \right] \rho_2(m).$$

Je ne pense pas qu'il soit nécessaire d'ajouter des exemples.

3. Nous venons de déterminer pour toutes les valeurs possibles de  $\alpha$  et de  $m$  le nombre total

$$N[2^\alpha m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2]$$

des solutions propres ou impropres de l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2.$$

Mais on peut aussi désirer d'avoir séparément le nombre

$$M [2^{\alpha} m = x^2 + 2 (y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2]$$

des solutions propres, c'est-à-dire des solutions qui subsistent quand on exige que les indéterminées  $x, y, z, t, u, v$  n'aient aucun facteur commun  $> 1$ .

Il faut alors substituer à la fonction

$$\rho_2(m)$$

la fonction

$$R_2(m)$$

que nous définissons, au moyen de la valeur de  $m$  mise sous la forme d'un produit de puissances de nombres premiers distincts, en disant que si

$$m = \prod (a^r),$$

on aura

$$R_2(m) = \prod \left[ a^{2r} + (-1)^{\frac{a-1}{2}} a^{2r-2} \right].$$

On distinguera d'ailleurs cinq cas suivant que l'exposant  $\alpha$  sera égal à 0, ou égal à 1, ou égal à 2, ou égal à 3, ou enfin  $> 3$ .

Pour  $\alpha = 0$ , c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier impair  $m$ , la formule est

$$M [m = x^2 + 2 (y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2] = 2 R_2(m).$$

Pour  $\alpha = 1$ , c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier impairement pair  $2m$ , j'obtiens

$$M [m = x^2 + 2 (y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2] = 8 R_2(m).$$

Ces deux équations ne diffèrent de celles qui fournissent pour  $m$  ou pour  $2m$  le nombre total des représentations propres ou impropres par la forme indiquée qu'en ce que

$$R_2(m)$$

y remplace

$$\rho_2(m).$$

Il n'en est pas de même pour celles qui vont suivre.

Je trouve, en effet, pour le cas de  $\alpha = 2$ , la formule que voici :

$$M[4m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2] = 2 \left[ 15 - 2(-1)^{\frac{m-1}{2}} \right] R_2(m),$$

où le coefficient de  $R_2(m)$  est altéré.

Même remarque pour le cas de  $\alpha = 3$ , où l'on a

$$M[8m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2] = 4 \left[ 30 - (-1)^{\frac{m-1}{2}} \right] R_2(m),$$

et aussi pour le cas de

$$\alpha > 3,$$

la formule devenant alors

$$M[2^\alpha m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2] = 15 \cdot 2^{2\alpha-3} R_2(m).$$

FIN DU TOME NEUVIÈME (2<sup>e</sup> SÉRIE).