

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

**Nouveau théorème concernant le quadruple d'un nombre premier
de l'une ou de l'autre des deux formes $20\kappa + 3$, $20\kappa + 7$**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 9 (1864), p. 135-136.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__135_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

NOUVEAU THÉORÈME

CONCERNANT

LE QUADRUPLÉ D'UN NOMBRE PREMIER DE L'UNE OU DE L'AUTRE
DES DEUX FORMES $20k + 3$, $20k + 7$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Voici au sujet du quadruple d'un nombre premier m , de l'une ou de l'autre des deux formes

$$20k + 3, \quad 20k + 7,$$

un théorème nouveau que l'on pourra joindre à ceux que nous avons donnés dans le cahier de mars 1863.

THÉORÈME. — « Pour tout nombre premier m de l'une ou de l'autre
» des deux formes $20k + 3$, $20k + 7$, on peut poser au moins une
» fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$4m = 5x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

» x , y étant des entiers impairs (positifs) et p un nombre premier qui
» ne divise pas y . »

On admet pour l la valeur zéro. Quant au nombre premier p , nous ne lui imposons à priori aucune condition; mais, d'après l'équation même que je viens d'écrire, il doit être à la fois $\equiv 7 \pmod{8}$ et non résidu quadratique de 5. Il ne pourra donc appartenir qu'à l'une des deux formes $40\mu + 7$, $40\mu + 23$.

Les plus petits nombres premiers fournis par les deux expressions

$$20k + 3, \quad 20k + 7$$

sont

$$3, \quad 7, \quad 23, \quad 43, \quad 47.$$

Voyons comment notre théorème se vérifie pour eux.

Soit d'abord $m = 3$, d'où $4m = 12$. On a l'équation canonique

$$12 = 5.1^2 + 7.1^2.$$

Pour $m = 7$, c'est-à-dire pour $4m = 28$, on en a une également :

$$28 = 5.1^2 + 23.1^2.$$

Même résultat pour $m = 23$, d'où $4m = 92$. L'équation canonique qu'on obtient alors est

$$92 = 5.3^2 + 47.1^2.$$

Pour $m = 43$, d'où $4m = 172$, on a trois équations canoniques :

$$172 = 5.1^2 + 167.1^2,$$

$$172 = 5.3^2 + 127.1^2,$$

$$172 = 5.5^2 + 47.1^2.$$

Mais pour $m = 47$, d'où $4m = 188$, on n'en a plus qu'une :

$$188 = 5.5^2 + 7.3^2.$$

Le nombre des équations canoniques étant toujours impair, notre théorème est vérifié.

