JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3\left(z^2 + t^2 + u^2 + v^2\right)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 119-122.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__119_0>

SUR LA FORME
$2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. On demande une expression simple du nombre des représentations d'un entier donné n (ou $2^\alpha 3^\beta m$, m impair et premier à 3) par la forme à six variables

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2),$$

c'est-à-dire du nombre

$$\mathrm{N}\left[2^\alpha 3^\beta m = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right]$$

des solutions de l'équation

$$2^\alpha 3^\beta m = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2),$$

où x, y, z, t, u, v sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Pour répondre à cette question, on démontre d'abord (ce qui est très-facile) que l'équation proposée est impossible quand l'entier donné est de la forme

$$3g + 1.$$

En d'autres termes, on a toujours

$$\mathrm{N}[3g + 1 = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 0.$$

Le cas d'un entier multiple de 3 est aisé aussi à traiter; car on prouve sans peine que la valeur de

$$\mathrm{N}[3n = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

est égale à celle de

$$\mathrm{N}\,(n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2),$$

laquelle a été donnée dans l'article précédent.

Reste le cas plus difficile d'un entier donné $3g + 2$, c'est-à-dire $\equiv -1 \pmod{3}$. Cependant, je parviens alors à montrer que la valeur de

$$\mathrm{N}\,[3g + 2 = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

est précisément égale au cinquième de celle de

$$\mathrm{N}\,(3g + 2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2),$$

qui a été donnée aussi dans l'article précédent. Les cas divers qui peuvent se présenter sont ainsi tous résolus.

2. Passons aux formules explicites, en distinguant le cas d'un entier impair et celui d'un entier pair.

On trouve d'abord, en supposant $\beta > 0$, la valeur de

$$\mathrm{N}\left[3^\beta m = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right]$$

égale à

$$\left[9^\beta - \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

le signe sommatoire portant, comme dans l'article précédent dont nous conservons toutes les notations, sur les facteurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$.

Il est remarquable que ce résultat reste exact quand on fait $\beta = 0$. En d'autres termes, la valeur de

$$\mathrm{N}\,[m = 2x + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

est égale à

$$\left[1 - \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

savoir : égale à zéro quand $m = 6k + 1$, mais égale à

$$2\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2$$

quand $m = 6k - 1$.

3. Pour $\alpha > 0$, et quel que soit β, la valeur de

$$\mathrm{N}\left[2^\alpha 3^\beta m = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right]$$

est

$$\frac{3}{5}\left[9^\beta - (-1)^\alpha\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{2\alpha+1} + (-1)^\alpha . 3\right]\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2.$$

Ainsi, en particulier, sous la condition de $\alpha > 0$,

$$\mathrm{N}\left[2^\alpha m = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right]$$

s'exprime par

$$\frac{3}{5}\left[1 - (-1)^\alpha\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{2\alpha+1} + (-1)^\alpha . 3\right]\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2,$$

quantité égale à zéro quand

$$(-1)^\alpha\left(\frac{m}{3}\right) = 1,$$

c'est-à-dire quand

$$2^\alpha m = 3g + 1,$$

mais égale à

$$\frac{6}{5}\left[2^{2\alpha+1} + (-1)^\alpha . 3\right]\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2,$$

quand

$$2^\alpha m = 3g + 2,$$

vu qu'alors

$$1 - (-1)^\alpha\left(\frac{m}{3}\right) = 2.$$

4. Nous nous contenterons de deux exemples tirés des entiers 2 et 5.

Nos formules indiquent pour eux respectivement six et quarante-huit représentations par la forme

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2).$$

Or l'équation

$$2 = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$$

a effectivement six solutions qu'on obtient en prenant

$$z = 0, \quad t = 0, \quad u = 0, \quad v = 0,$$

avec

$$x = \pm 1, \quad y = 0,$$

ou bien avec

$$x = 0, \quad y = \pm 1,$$

ou encore avec

$$x = 1, \quad y = -1,$$

ou enfin avec

$$x = -1, \quad y = 1.$$

A son tour l'équation

$$5 = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$$

offre quarante-huit solutions. Les valeurs de x, y à employer sont les mêmes que ci-dessus; mais il ne faut cette fois égaler à zéro que trois des indéterminées z, t, u, v, la quatrième devant être égalée à ± 1.