

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Remarque nouvelle sur la forme $x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 8 (1863), p. 296.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8_296_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

REMARQUE NOUVELLE SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2);$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

J'ai donné (dans le cahier de mai 1860, p. 147) une expression simple du nombre des solutions que comporte l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2),$$

où n est un entier donné, quand on y prend pour x, y, z, t des entiers quelconques, positifs, nuls ou négatifs. Mais quel serait le nombre des solutions de cette même équation si l'on n'admettait pour x, y, z, t que des valeurs impaires et positives? Pour répondre à cette question, j'observe d'abord que l'équation dont il s'agit deviendra alors impossible si n n'est pas un multiple de 8. Maintenant soit n multiple de 8; on pourra écrire

$$n = 8 \cdot 3^3 \cdot 2^m,$$

m étant un entier impair premier à 3, et je dis que le nombre demandé sera égal à

$$2^m \zeta_4(m),$$

où je désigne à mon ordinaire par $\zeta_4(m)$ la somme des diviseurs de m .

Ainsi pour $n = 8$ on n'a qu'une seule solution, laquelle est fournie par l'identité

$$8 = 1^2 + 1^2 + 3(1^2 + 1^2).$$

Pour $n = 16$, on doit avoir deux solutions. La double équation

$$16 = 1^2 + 3^2 + 3(1^2 + 1^2) = 3^2 + 1^2 + 3(1^2 + 1^2)$$

confirme ce fait. Pour $n = 24$ et pour $n = 32$, le nombre de solutions deviendra égal à 4. Pour $n = 40$, il sera égal à 6. Mais je n'ai pas à insister sur ces vérifications numériques.