

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

**Théorème concernant les nombres premiers contenus dans une
quelconque des trois formes linéaires $168\kappa + 43$, $168\kappa + 67$, $168\kappa + 163$**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 8 (1863), p. 137-140.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__137_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

THÉORÈME

CONCERNANT

LES NOMBRES PREMIERS CONTENUS DANS UNE QUELCONQUE DES
TROIS FORMES LINÉAIRES $168k + 43$, $168k + 67$, $168k + 163$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soit m un nombre premier contenu dans une quelconque des trois formes linéaires

$$168k + 43, \quad 168k + 67, \quad 168k + 163,$$

où l'on remarquera que

$$168 = 8.7.3.$$

Il est clair que m est congru à 3 (mod. 8), résidu quadratique de 7 et résidu quadratique de 3.

Le théorème que je veux communiquer ici consiste en ce que pour chacun des nombres premiers m dont il vient d'être question, l'on peut poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation suivante :

$$m = 21x^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

x , y étant des entiers impairs, et p un nombre premier qui ne divise pas y .

En d'autres termes, si d'un nombre premier donné m , contenu dans une quelconque des trois formes linéaires

$$168k + 43, \quad 168k + 67, \quad 168k + 163,$$

on retranche, tant que faire se peut, les entiers formant la suite

$$21.1^2, \quad 21.3^2, \quad 21.5^2, \quad 21.7^2, \dots,$$

il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la

forme canonique

$$2p^{4l+1}x^2,$$

x étant un entier (naturellement impair) et p un nombre premier, non diviseur de x . On admet, comme d'ordinaire, la valeur $l = 0$.

Nous n'imposons à priori aucune condition au nombre premier p ; mais d'après ce qu'on a dit du nombre m auquel se rapporte l'équation

$$m = 21x^2 + 2p^{4l+1}x^2,$$

il est clair que l'on aura $p \equiv 3 \pmod{4}$, p résidu quadratique de 7, p non résidu quadratique de 3. Donc p ne peut appartenir qu'à une des formes linéaires

$$84g + 11, \quad 84g + 23, \quad 84g + 71;$$

et on va voir, en effet, les nombres premiers 11, 23, 71, etc., figurer comme valeurs de p dans les exemples numériques ci-après.

Les nombres premiers les plus petits que fournissent pour m les trois formes linéaires

$$168k + 43, \quad 168k + 67, \quad 168k + 163$$

sont

$$43, 67, 163, 211, 331, 379, 499, 547, 571, 739, \text{ etc.}$$

Voyons comment notre théorème se vérifie sur chacun d'eux.

Pour $m = 43$, on a l'équation canonique

$$43 = 21.1^2 + 2.11.1^2;$$

pour $m = 67$ et pour $m = 163$, on a semblablement

$$67 = 21.1^2 + 2.23.1^2,$$

puis

$$163 = 21.1^2 + 2.71.1^2.$$

Pour $m = 211$, on a deux restes; d'abord

$$211 - 21.1^2 = 190 = 2.5.19,$$

ce qui ne donne pas une équation canonique, mais ensuite

$$211 - 21.3^2 = 2.11.1^2,$$

d'où l'équation canonique

$$211 = 21.3^2 + 2.11.1^2.$$

Pour chacun des trois nombres premiers

$$331, 379, 499,$$

on a de même deux restes, dont un seul est canonique. Ainsi, pour

$$m = 331,$$

il vient d'abord

$$331 - 21.1^2 = 310 = 2.5.31,$$

mais ensuite

$$331 - 21.3^2 = 2.71.1^2.$$

Pour

$$m = 379,$$

on a, d'une part

$$379 - 21.1^2 = 2.179.1^2,$$

et d'autre part

$$379 - 21.3^2 = 190 = 2.5.19.$$

Enfin, pour

$$m = 499,$$

les restes sont

$$499 - 21.1^2 = 2.239.1^2$$

et

$$499 - 21.3^2 = 310 = 2.5.31.$$

Notre théorème se vérifie également pour les nombres premiers

$$547, 571, 739;$$

pour ceux-là il y a trois restes, tous les trois canoniques.

Pour

$$m = 547,$$

ces restes sont

$$547 - 21.1^2 = 2.263.1^2,$$

puis

$$547 - 21.3^2 = 2.179.1^2,$$

enfin

$$547 - 21.5^2 = 2.111.1^2.$$

Pour

$$m = 571,$$

il vient

$$571 - 21.1^2 = 2.111.5^2,$$

puis

$$571 - 21.3^2 = 2.191.1^2,$$

enfin

$$571 - 21.5^2 = 2.231.1^2.$$

En dernier lieu, soit

$$m = 739;$$

on a

$$739 - 21.1^2 = 2.359.1^2,$$

puis

$$739 - 21.3^2 = 2.111.5^2,$$

enfin

$$739 - 21.5^2 = 2.107.1^2.$$

Je ne pense pas qu'il soit utile de pousser plus loin ces calculs; mais si loin qu'on veuille aller, notre théorème ne peut manquer d'être confirmé.

