

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

MAXIMILIEN MARIE

**Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires;  
troisième partie. De la marche des valeurs d'une fonction  
implicite définie par une équation algébrique**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2<sup>e</sup> série, tome 5 (1860), p. 393-424.*

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1860\\_2\\_5\\_\\_393\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5__393_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

NOUVELLE THÉORIE  
DES  
FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES;

PAR M. MAXIMILIEN MARIE,  
Ancien élève de l'École Polytechnique.

TROISIÈME PARTIE.

DE LA MARCHÉ DES VALEURS D'UNE FONCTION IMPLICITE  
DÉFINIE PAR UNE ÉQUATION ALGÈBRIQUE.

CHAPITRE VI.

*De la marche des valeurs d'une fonction d'une seule variable.*  
(Suite.)

APPLICATIONS.

85. Soit d'abord l'équation

$$y^2 = 2px + q^2$$

qui représente une parabole réelle et une infinité de paraboles imaginaires égales à la première et opposées à elle par un diamètre commun.

$p$  étant supposé positif, toutes les conjuguées qui touchent la courbe réelle en des points situés au-dessus de l'axe des  $x$  ont leurs caractéristiques positives; celles qui la touchent en des points situés au-dessous de l'axe des  $x$  ont leurs caractéristiques négatives. Entre deux se trouve la conjuguée qui touche la courbe réelle à son sommet et dont la caractéristique est infinie; aucune conjuguée d'ailleurs n'a sa caractéristique nulle.

De quelque manière que  $x$  varie,  $C$  ne peut donc changer de signe

qu'en passant par l'infini, ce qui arrive lorsque le point  $[x, y]$  passe sur la conjuguée  $C = \infty$ , ou quand  $x$  prend des valeurs réelles moindres que  $-\frac{q^2}{2p}$ , ou encore lorsque  $\beta$  passe par zéro,  $\alpha$  étant moindre que  $-\frac{q^2}{2p}$ .

D'ailleurs chaque fois que,  $\alpha$  étant moindre que  $-\frac{q^2}{2p}$ ,  $\beta$  change de signe en passant par zéro,  $C$  change aussi de signe; car la partie imaginaire de  $y$ , qui est alors finie, ne peut pas changer brusquement de signe.

Il sera donc facile de répondre à toutes les questions qu'on pourrait se proposer sur les valeurs de  $y$  définies par l'équation que nous examinons.

D'après M. Cauchy, en supposant fermé le chemin  $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ , la solution finale est ou non identique à la solution initiale, selon que le rayon vecteur mené du point  $\left[x = -\frac{q^2}{2p}, y = 0\right]$  au point  $[\alpha, \beta]$  se trouve avoir décrit, dans le même sens, un angle égal à  $4k\pi$  ou à  $(4k + 2)\pi$ , lorsqu'il est revenu dans sa position initiale.

Il est facile de vérifier la concordance des résultats fournis par les deux méthodes; mais, tandis que la règle à laquelle nous arrivons pour un chemin quelconque, ne diffère pas de la règle relative à un chemin fermé, celle à laquelle est parvenu M. Puiseux, en cherchant à compléter la méthode de M. Cauchy, est d'une énorme complication.

M. Puiseux, après avoir réduit le chemin  $\varphi(\alpha, \beta) = 0$  à une ligne droite ou à tout autre chemin n'enveloppant pas le sommet de la parabole, proposerait, pour obtenir la valeur finale de  $y$ , la marche suivante :

Du point de départ  $[\alpha_0, \beta_0]$  comme centre, avec un rayon moindre que la distance de ce point au sommet de la parabole, décrire une circonférence qui coupât le chemin en un point  $[\alpha_1, \beta_1]$ ; calculer la valeur de  $y$ , correspondante à  $x = \alpha_1 + \beta_1 \sqrt{-1}$ , au moyen de la série de Taylor qui, on le sait, restera convergente pour toutes les valeurs de  $x$  dont les parties réelles et imaginaires seraient les abscisses et ordonnées de points de l'intérieur de cette circonférence; du point de rencontre de la première circonférence avec le chemin, en prenant

un rayon moindre que la distance de ce point au sommet de la parabole, décrire une deuxième circonférence qui rencontrât le chemin en un nouveau point  $[\alpha_2, \beta_2]$ : calculer la valeur de  $y$  correspondante à  $x = \alpha_2 + \beta_2 \sqrt{-1}$  au moyen d'un nouveau développement de  $y$  par la série de Taylor; continuer ainsi jusqu'à ce que l'extrémité du chemin  $\varphi(\alpha, \beta) = 0$  se trouvât enveloppée par une dernière circonférence, et enfin calculer la valeur finale de  $y$  au moyen d'un dernier développement de la fonction, applicable à toutes les valeurs de  $x$  dont les parties réelles et imaginaires seraient les abscisses et ordonnées de points de l'intérieur de cette dernière circonférence.

Dans les cas plus compliqués, où l'équation

$$f(x, y) = 0$$

pourrait présenter 2, 3, 4, etc., points dangereux, il faudrait que chaque circonférence les évitât tous.

86. Soit en second lieu l'équation

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

qui représente une ellipse réelle et toutes les hyperboles imaginaires qui ont avec elle un système de diamètres conjugués commun.

Ces hyperboles ont leur caractéristique négative lorsqu'elles touchent l'ellipse dans le premier et le troisième quadrant, positive lorsqu'elles la touchent dans le deuxième et le quatrième. La conjuguée qui a pour axe transverse l'axe des  $x$ , a sa caractéristique infinie, celle qui a pour axe transverse l'axe des  $y$  a sa caractéristique nulle.

Il résulte de là que la caractéristique change de signe en passant par zéro lorsque le point de contact de l'ellipse avec la branche de conjuguée, sur laquelle se trouve le point  $[x, y]$ , passe du premier au deuxième quadrant, ou du troisième au quatrième, ou inversement, et qu'elle change de signe en passant par l'infini lorsque le même point de contact passe du deuxième au troisième quadrant, ou du quatrième au premier, ou inversement.

D'un autre côté, la conjuguée dont la caractéristique est infinie, a ses abscisses réelles et plus grandes que  $a$ , ou moindres que  $-a$ , et

celle dont la caractéristique est nulle, les  $\alpha$  imaginaires sans parties réelles; par conséquent C ne peut changer de signe qu'aux époques où  $\beta$  passe par zéro,  $\alpha^2$  étant plus grand que  $a^2$ , ou bien où  $\alpha$  passe par zéro, quel que soit alors  $\beta$ ; c'est-à-dire aux instants où le point  $[\alpha, \beta]$  passe sur l'axe des  $x$ , en dehors de l'ellipse, ou sur l'axe des  $y$ , en un point quelconque.

D'ailleurs quand  $\beta$  change de signe en passant par zéro,  $\alpha^2$  étant alors plus grand que  $a^2$ , la caractéristique change de signe, car la partie imaginaire de  $y$  conserve le sien. De même quand  $\alpha$  change de signe en passant par zéro, la caractéristique change encore de signe; car la partie imaginaire de  $x$ , qui était finie, conserve son signe, et celle de  $y$ , qui était infiniment petite, en change. En effet, si le point de la conjuguée  $C = 0$  par où passe le point  $[x, y]$  a pour coordonnées

$$x = \beta \sqrt{-1},$$

et par exemple

$$y = + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 + \beta^2};$$

le coefficient différentiel de  $y$  par rapport à  $x$  est alors

$$- \frac{b \beta \sqrt{-1}}{a \sqrt{a^2 + \beta^2}}.$$

Or si  $x$  augmente de  $d\alpha + d\beta \sqrt{-1}$ , la partie imaginaire de  $y$  augmente de

$$- d\alpha \frac{b \beta \sqrt{-1}}{a \sqrt{a^2 + \beta^2}},$$

quantité qui change de signe avec  $d\alpha$  et qui est indépendante de  $d\beta$ .

En résumé donc, C change de signe chaque fois que le chemin  $\varphi(\alpha, \beta) = 0$  rencontre et traverse l'axe des  $y$  en un point quelconque, ou l'axe des  $x$  en dehors de l'ellipse; et par suite le point de départ  $[x_0, y_0]$  ayant, par exemple, sa caractéristique positive, le point d'arrivée sera

$$x_1 = \alpha_1 + \beta_1 \sqrt{-1}$$

et

$$y_1 = \alpha'_1 \pm \beta_1 C_1 \sqrt{-1},$$

$C_1$  étant positif, suivant que le nombre des rencontres à compter se sera trouvé pair ou impair.

Ces conclusions s'accordent avec celles que fournit la méthode de M. Cauchy; car si le chemin  $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ , fermé, enveloppe l'un seulement des sommets de l'ellipse, situés sur l'axe des  $x$ , il traversera cet axe un nombre impair de fois en dedans de la courbe et un nombre impair de fois en dehors, et si d'ailleurs il traverse l'axe des  $y$ , il le traversera un nombre pair de fois;  $C$  changera donc de signe, par conséquent, le point de départ étant, par exemple,

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha_0 + \beta_0 \sqrt{-1}, \\ y_0 &= \alpha_0 + \beta_0 C_0 \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

le point d'arrivée sera

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_0 + \beta_0 \sqrt{-1}, \\ y_1 &= -\alpha_0 - \beta_0 C_0 \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

l'une des valeurs de  $y$  aura permuté avec l'autre.

Au contraire, si le chemin enveloppe les deux sommets situés sur l'axe des  $x$ , il traversera cet axe un nombre impair de fois à droite en dehors de l'ellipse, un nombre impair de fois à gauche, aussi en dehors de l'ellipse, un nombre pair de fois en dedans, ce qui est indifférent, et l'axe des  $y$  un nombre pair de fois, c'est-à-dire un nombre impair de fois en allant de droite à gauche et un nombre impair de fois en allant de gauche à droite. En résumé, le nombre des rencontres à compter sera pair,  $C$  ne changera donc pas de signe et y reviendra à sa valeur initiale en même temps que  $x$ .

Les deux méthodes fournissent donc des résultats identiques, et si, dans notre théorie, les passages du point  $[\alpha, \beta]$  sur l'axe des  $y$  et sur l'axe des  $x$  en dehors de l'ellipse ont une égale importance, tandis que dans celle de M. Cauchy les derniers seuls jouent un rôle déterminé,

cela tient à ce que la solution de M. Cauchy ne se rapporte qu'à l'hypothèse d'un chemin fermé.

Dans cette hypothèse, en effet, le chemin ne peut rencontrer l'axe des  $y$  qu'un nombre pair de fois; et comme quelque part que la rencontre ait lieu, l'effet produit est toujours un changement de signe de la caractéristique, l'effet intégral de cette suite de rencontres est nul, tandis que le même chemin fermé rencontrant l'axe des  $x$  un nombre également pair de fois, il y a cependant à distinguer entre les cas où le nombre des rencontres extérieures à l'ellipse est pair ou impair.

Dans le cas d'un chemin non fermé, nous tiendrions également compte des rencontres avec l'axe des  $y$  et avec l'axe des  $x$ , et si M. Puiseux ne s'occupe pas des premières, c'est qu'il laisse, dans ce cas, à la série de Taylor le soin de décider de la valeur finale de la fonction.

87. Considérons encore l'équation

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2 :$$

elle représente simultanément une hyperbole réelle et toutes les ellipses imaginaires qui ont avec elle un système de diamètres conjugués commun.

Ces conjuguées ont pour enveloppe réelle l'hyperbole

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2$$

et pour enveloppe imaginaire l'hyperbole

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Celles qui touchent la courbe réelle dans le premier et le troisième quadrant ont leur caractéristique positive, les autres l'ont négative.

La caractéristique ne peut d'ailleurs varier qu'entre  $-\infty$  et  $-\frac{b}{a}$  ou entre  $+\frac{b}{a}$  et  $+\infty$ , elle ne peut donc changer de signe qu'en passant par l'infini, ce qui arrive lorsque  $x$  passe par une valeur réelle comprise entre  $-a$  et  $+a$ .

88. La discussion serait la même pour l'équation

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Elle représente simultanément une hyperbole réelle ayant pour axe transverse l'axe des  $y$  et toutes les ellipses imaginaires qui ont avec elle un système de diamètres conjugués commun.

Ces conjuguées ont pour enveloppe réelle l'hyperbole

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = a^2 b^2$$

et pour enveloppe imaginaire l'hyperbole

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2.$$

Celles qui touchent la courbe réelle dans le premier et le troisième quadrant ont leur caractéristique positive, les autres l'ont négative. La caractéristique ne peut d'ailleurs varier qu'entre  $-\frac{b}{a}$  et  $+\frac{b}{a}$ , par conséquent elle ne peut changer de signe qu'en passant par zéro. Cela arrive lorsque  $y$  est réel et moindre que  $b$ , par conséquent lorsque  $x$  est imaginaire, sans partie réelle et moindre que  $a$  en valeur absolue

89. Il serait inutile de multiplier davantage les exemples qui se rapportent au second degré; nous prendrons maintenant la fonction  $y$  définie par l'équation

$$y^3 - a^2 y + a^2 x = 0,$$

qui a été étudiée par M. Puiseux.

La courbe représentée par l'équation

$$y^3 - a^2 y + a^2 x = 0$$

est MON (*fig. 7*), l'origine est un point d'inflexion, la tangente  $y$  est dirigée suivant la bissectrice de l'angle des axes; les points limites L et L' ont pour coordonnées

$$x = \pm \frac{2a}{3\sqrt{3}}, \quad y = \pm \frac{a}{\sqrt{3}},$$



la courbe n'a pas d'asymptotes, mais la direction asymptotique est  $y = 0$ .

Les conjuguées dont la caractéristique n'est pas comprise entre 0 et 1 touchent la courbe réelle, les autres ont pour enveloppe la courbe  $M'ON'$  représentée par l'équation

$$y^3 + a^2 y - a^2 x = 0,$$

car pour que  $\frac{dy}{dx}$  soit réel, il faut que  $\alpha$  et  $\alpha'$  soient nuls.

La conjuguée  $C = 1$ , ROSTOV, sépare les deux catégories et appartient à l'une et à l'autre; elle a encore cela de remarquable qu'elle est la seule dont les deux parties se touchent. Elle peut servir d'intermédiaire au point  $[xy]$ , soit pour passer d'une catégorie de conjuguées à l'autre, soit pour passer d'une portion à l'autre d'une même conjuguée, sans changer de catégorie, en traversant l'origine.

Cette conjuguée est déterminée par les équations

$$\alpha'^3 - 3\alpha'\beta^2 - a^2\alpha' + a^2\alpha = 0$$

et

$$3\alpha'^2 = \beta^2,$$

d'où l'on tire

$$a^2\alpha = \pm \left( \frac{8\beta^3}{3\sqrt{3}} + \frac{a^2\beta}{\sqrt{3}} \right)$$

ou

$$a^4\alpha^2 - \left( \frac{8\beta^3}{3\sqrt{3}} + \frac{a^2\beta}{\sqrt{3}} \right)^2 = 0;$$

de sorte que les rencontres des chemins

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0$$

et

$$a^4\alpha^2 - \left( \frac{8\beta^3}{3\sqrt{3}} + \frac{a^2\beta}{\sqrt{3}} \right)^2 = 0$$

seront les points de passage, du point  $[xy]$ , des conjuguées d'une

catégorie sur celles de l'autre. Si les deux chemins se touchaient, sans se couper, le point  $[xy]$  retournerait sur les conjuguées d'où il venait d'abord.

L'équation de la conjuguée  $C = 1$ , en coordonnées réelles, est

$$8y^3 + (1 \pm \sqrt{3})^3 a^2 y - (1 \pm \sqrt{3})^3 a^2 x = 0.$$

$BLB_1, B'L'B'_1$  est la conjuguée  $C = \infty$ , la conjuguée  $C = 0$  est évanouissante.

L'origine étant le centre commun de toutes les conjuguées, une conjuguée quelconque touche l'une ou l'autre enveloppe en deux points symétriquement placés par rapport à l'origine. Celle qui touche l'enveloppe imaginaire aux points  $P, P'$  a pour caractéristique le coefficient angulaire de  $POP'$ .

Lorsqu'on cherche à annuler  $\alpha$ , on trouve qu'il peut passer par zéro, en même temps que  $\alpha'$ , lorsque  $C$  est moindre que 1, et qu'il ne devient nul isolément que quand  $C$  est négatif et moindre en valeur absolue que  $\frac{1}{2}$ , c'est-à-dire sur les conjuguées qui touchent la courbe réelle à gauche de  $A$  ou à droite de  $A'$ .

Si l'on cherche les points de rencontre d'une conjuguée avec la courbe réelle, on trouve

$$\alpha' = \pm a \sqrt{\frac{1-C}{6C}}$$

ou

$$\beta = \beta' = 0.$$

Ainsi il n'y a que les conjuguées circonscrites à l'enveloppe imaginaire qui coupent la courbe réelle.

La figure représente celle dont la caractéristique est  $\frac{4}{5}$ .

Si l'on cherche le centre et le rayon de courbure d'une conjuguée au point où elle touche soit l'enveloppe réelle, soit l'enveloppe imaginaire, on trouve que les deux courbures de la conjuguée et de l'enveloppe sont égales et opposées.

Le calcul de vérification ne présente aucune difficulté, mais je ne le rapporterai pas ici, parce que, ayant soumis aux mêmes expériences

les conjuguées du lieu

$$y^4 + x^4 = a^4$$

dont je me suis occupé ensuite, et étant arrivé au même résultat, j'ai alors été conduit à rechercher à cet égard la règle générale.

Si  $(r + r' \sqrt{-1})^2$  est la valeur de l'expression

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2},$$

calculée en un point de l'une des deux enveloppes, le rayon de courbure, en ce point, de la conjuguée qui y passe, est

$$\frac{r^2 + r'^2}{r - r'}.$$

Cette expression, comme on voit, se réduit toujours à  $r$ , c'est-à-dire au rayon de courbure de l'enveloppe, quand il s'agit de l'enveloppe réelle; elle donne encore le rayon  $r'$  de l'enveloppe imaginaire quand les coordonnées des points de cette enveloppe ont leurs parties réelles constantes, parce qu'alors  $\frac{d^2y}{dx^2}$  est imaginaire sans partie réelle; mais dans le cas général les rayons de courbure

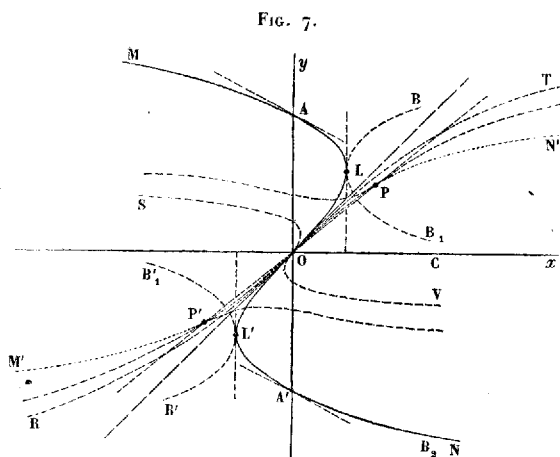
$$r + r' \quad \text{et} \quad \frac{r^2 + r'^2}{r - r'}$$

de l'enveloppe et de la conjuguée ne sont plus égaux.

On verra dans la quatrième partie de ce Mémoire la démonstration des règles que je viens d'énoncer; je crois pouvoir en faire usage dès maintenant pour éviter des longueurs inutiles, et parce que la vérification des faits, dans chaque cas, sera toujours aisée à obtenir.

Cela posé, nous prendrons pour valeur initiale de  $x$  une valeur réelle,  $x_0$ , plus grande que  $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$ , égale à  $OC$  par exemple. A cette

valeur de  $x$  correspondront deux valeurs imaginaires que nous désignerons par  $t_0, u_0$  qui fourniront les points  $B, B_1$  de la conjuguée



$C = \infty$  et une valeur réelle  $v_0$  qui fournira le point  $B_2$  de la courbe réelle.

$x$  variant ensuite d'une manière continue, les trois valeurs de  $y$  varieront elles-mêmes d'une manière continue, et nous désignerons par  $t, u, v$  ces trois fonctions.

Si  $x$  prend une valeur  $\alpha + \beta \sqrt{-1}$  infiniment voisine de  $x_0, \alpha - x_0$  et  $\beta$  étant infiniment petits, les trois valeurs de  $y$  différeront peu de  $t_0, u_0, v_0$ ; mais comme les parties imaginaires de  $t_0$  et de  $u_0$  étaient finies et de signes contraires, elles resteront encore de signes contraires; les deux points  $[x, t], [x, u]$  se transporteront donc sur des conjuguées tangentes à la courbe réelle en des points situés l'un au-dessous de  $L$ , l'autre au-dessus si  $\beta$  est positif, ou inversement dans le cas contraire.

Mais d'ailleurs le point  $[x, t]$  sera encore sur la branche supérieure de la conjuguée qui le contiendra et le point  $[x, u]$  sur la branche inférieure.

Quant au point  $[x, v]$ , il se sera transporté sur une conjuguée tangente à la courbe réelle en un point voisin de  $B_2$ .

Il importerait peu de savoir ce qu'il est devenu, mais, pour ne laisser aucune difficulté sans solution, nous chercherons de quel côté il

se trouvera par rapport au point où la conjuguée qui le contient touche la courbe réelle.

Comme nous supposons  $\alpha - x_0$  et  $\beta$  infiniment petits, nous pourrions réduire  $\nu - \nu_0$  à

$$-\frac{a^2}{3\nu_0^2 - a^2}(\alpha - x_0 + \beta\sqrt{-1});$$

or la partie imaginaire de cette différence, qui sera la partie imaginaire de  $\nu$ , sera

$$-\frac{a^2}{3\nu_0^2 - a^2}\beta\sqrt{-1},$$

et comme  $\nu_0$  est plus grand en valeur absolue que le double de l'ordonnée du point L qui satisfait à l'équation

$$3y^2 - a^2 = 0,$$

$3\nu_0^2 - a^2$  étant positif, la partie imaginaire de  $\nu$  sera de signe contraire à  $\beta$ , négative par conséquent si, comme nous l'avons supposé,  $\beta$  est positif.

Cela étant, si, sans changer la direction de l'axe des  $x$ , nous prenions pour nouvel axe des  $y$  la partie supérieure d'une parallèle, menée par l'origine, à la tangente à la courbe réelle au point où la touche la conjuguée à laquelle appartient le point  $[x, \nu]$  : les formules de transformation seraient

$$\begin{aligned} x &= x' + y' \cos Y'X, \\ y &= y' \sin Y'X; \end{aligned}$$

$x'$  serait réel, mais  $\sin Y'X$  étant positif, la partie imaginaire de  $y'$  ou  $\nu'$  serait de même signe que la partie imaginaire de  $y$  ou  $\nu$ , c'est-à-dire négative : le point  $[x, \nu]$  sera donc sur une branche inférieure.

Nous pouvons maintenant suivre de proche en proche les mouvements des trois points  $[x, t]$ ,  $[x, u]$ ,  $[x, \nu]$ .

Nous supposerons d'abord que  $x$  n'atteigne pas une valeur qui amènerait un des trois points sur la conjuguée  $C = 1$ .

Tant que  $\beta$  restera positif, le point  $[x, t]$  restera sur une conjuguée

tangente à la courbe réelle en un point de OL et sur la branche supérieure de cette conjuguée.

Le point  $[x, u]$  restera sur une conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de LM et sur la branche inférieure de cette conjuguée.

Enfin le point  $[x, v]$  restera sur une conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de I'N et sur la branche inférieure de cette conjuguée.

Si  $\beta$  passe par zéro et change de signe à un moment où  $\alpha$  soit encore plus grand que  $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$ ,  $t$  et  $u$  étant restés imaginaires, les points  $[x, t]$ ,  $[x, u]$  seront restés à des distances finies de la courbe réelle; les signes des caractéristiques des conjuguées auxquelles ils appartiendront auront changé, mais ces points seront encore le premier sur une branche supérieure, le second sur une branche inférieure, et si  $x$  revenait à sa valeur initiale sans que  $\beta$  eût passé de nouveau par zéro, les trois points reviendraient à leurs places primitives.

Au contraire, si  $\beta$  passe par zéro,  $\alpha$  étant compris entre 0 et  $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$ , à ce moment les trois points se trouveront sur la courbe réelle, et si  $\beta$  change de signe, tous trois changeront de branches; par conséquent, si  $x$  revenait à sa valeur initiale sans que  $\beta$  eût passé de nouveau par zéro, dans l'intervalle,  $t$  prendrait la place de  $u$ ,  $u$  celle de  $t$ , et  $v$  seul reviendrait à sa valeur initiale.

Revenons au point de départ  $x = x_0$  et supposons toujours qu'aucun des trois points ne traverse la conjuguée  $C = 1$  pour aller se rendre sur les conjuguées de la seconde série.

Tant que  $x$  ne passera pas par zéro, les deux points  $[x, t]$ ,  $[x, u]$  resteront toujours sur les conjuguées qui touchent la courbe réelle sur OM et le point  $[x, v]$  sur celle qui la touche sur ON; les points  $[x, t]$ ,  $[x, u]$  pourront s'échanger entre eux un nombre indéfini de fois, mais, lorsque  $x$  reviendra à sa valeur initiale, le point  $[x, v]$  reprendra toujours sa position primitive.

Supposons donc que  $x$  passe par zéro, et que ce soit par exemple le point  $[x, t]$  qui passe à l'origine en suivant un chemin tangent à la droite  $y = x$ ; si  $x$  change de signe en passant par zéro, le point

$[x, t]$  arrivera sur les conjuguées qui touchent la courbe réelle sur ON et se trouvera par rapport au point  $[x, \nu]$  dans la même situation où il était précédemment par rapport au point  $[x, u]$ . Si  $\beta$  passe par zéro,  $\alpha$  étant compris entre 0 et  $-\frac{2a}{3\sqrt{3}}$ , les points  $[x, \nu]$  et  $[x, t]$  changeront tous les deux de branches et pourront ensuite venir occuper chacun la place qu'avait précédemment l'autre, de sorte que si  $x$  revenait à sa valeur primitive  $x_0$  en repassant de nouveau par zéro,  $\nu$  prendrait la valeur de  $t$ ,  $t$  celle de  $\nu$ , et  $u$  reprendrait sa valeur initiale.

Nous avons ainsi fait s'échanger entre eux les points  $[x, t]$  et  $[x, u]$  en laissant d'abord la partie réelle de  $x$  positive; nous avons ensuite fait s'échanger les points  $[x, t]$  et  $[x, \nu]$  ou  $[x, u]$  et  $[x, \nu]$  en leur faisant traverser successivement l'origine des coordonnées qui était le seul point qui pût servir de passage entre les demi-conjuguées qui touchent la courbe réelle sur OM et celles qui la touchent sur ON; nous allons maintenant faire passer nos trois points sur les conjuguées circonscrites à l'enveloppe imaginaire.

Chaque fois qu'un des trois points passera sur la conjuguée  $C = 1$ , il pourra changer de série de conjuguées, et il sera facile de s'assurer de ce qu'il en est, car la marche de  $x$  étant définie, la différentielle de cette variable étant par conséquent connue, la différentielle de  $y$  pourra l'être aussi, et il sera toujours aisé de voir si  $d\beta'$  surpasse ou non  $d\beta$ , c'est-à-dire si C a augmenté ou diminué.

Nous avons vu que la conjuguée  $C = 1$  est définie par la relation

$$3a^4\alpha^2 = \beta^2 \left( \frac{8}{3}\beta^2 + a^2 \right)^2;$$

chaque fois donc que le chemin  $\varphi(\alpha, \beta) = 0$  rencontrera le chemin

$$3a^4\alpha^2 = \beta^2 \left( \frac{8}{3}\beta^2 + a^2 \right),$$

un des trois points  $[x, t]$ ,  $[x, u]$ ,  $[x, \nu]$  pourra changer de catégorie de conjuguées: il importera alors de savoir lequel des trois points subira ce déplacement; mais cette question ne présentera jamais de diffi-

culté, parce qu'ayant suivi jusque-là les passages de  $\beta$  par zéro, on saura toujours sur quelles branches se trouvent les trois points.

Ainsi en reprenant par exemple le même point de départ  $x = x_0$ , il est évident d'abord que le point  $[x, v]$  ne pouvant parvenir à la conjuguée  $C = 1$ , sans traverser la conjuguée  $C = \infty$ , auquel cas l'un des points  $[x, t]$ ,  $[x, u]$  y serait venu aussi, ce qui exigerait ou qu'il eût traversé l'origine, ou qu'il fût momentanément passé sur les conjuguées de la seconde catégorie, pour les quitter ensuite, il est évident, disons-nous, que le point  $[x, v]$  ne pourra pas arriver le premier sur la conjuguée  $C = 1$ .

D'un autre côté, quant aux deux points  $[x, t]$  et  $[x, u]$ , il est évident que si  $\beta$  a d'abord reçu des valeurs positives et n'a pas changé de signe avant que

$$3a^4\alpha^2 - \beta^2\left(\frac{8}{3}\beta^2 + a^2\right)^2$$

devînt nul, ce sera le point  $[x, t]$  qui passera sur la conjuguée  $C = 1$ .

Supposons donc que le point  $[x, t]$  ait passé sur les conjuguées de la seconde catégorie : tant qu'il y restera et que  $\alpha$  ne changera pas de signe, il restera du même côté du point de contact de sa conjuguée avec l'enveloppe imaginaire; et si au contraire  $\alpha$  change de signe, le point  $[x, t]$  changera de branche sur sa conjuguée. En suivant donc les passages de  $\alpha$  par zéro, on saura toujours où se trouve le point  $[x, t]$ ; et s'il doit repasser sur les conjuguées de la première catégorie, on saura quelle branche de la conjuguée  $C = 1$  il aura dû traverser.

90. Nous prendrons pour dernier exemple l'équation

$$y^4 + x^4 = a^4$$

qui présente des particularités remarquables.

Si  $x$  est imaginaire et représenté par  $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ ,  $y^4$  est généralement imaginaire et de la forme  $A + B\sqrt{-1}$ ; les deux valeurs de  $y^2$

$$y^2 = \pm (A' + B'\sqrt{-1})$$



sont déterminées par les équations

$$A'^2 - B'^2 = A$$

et

$$2A'B' = B,$$

qui montrent que  $A'$  ni  $B'$  ne sont nuls quand  $B$  ne l'est pas.

Les valeurs de

$$y = \pm (A'' + B''\sqrt{-1})$$

sont ensuite déterminées par les équations

$$A''^2 - B''^2 = A'$$

et

$$2A''B'' = B',$$

qui montrent de même que ni  $A''$  ni  $B''$  ne sont nuls si  $R$  ne l'est pas.

On voit aisément que les quatre valeurs de  $y$  se distinguent les unes des autres par les signes de leurs parties réelles et imaginaires, ces signes fournissent toujours les quatre combinaisons possibles, lorsque  $B$  est différent de zéro.

La valeur de  $B$  est

$$4\alpha^3\beta - 4\alpha\beta^3,$$

elle n'est nulle que dans les hypothèses  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\alpha = \pm\beta$ ; mais dans la première il faut que  $\beta$  soit moindre que  $\alpha$  pour que  $B'$  soit aussi nul, et dans la seconde il faut que  $\alpha$  soit moindre que  $\alpha$ .

$A''$  et  $B''$  ne peuvent en conséquence changer de signes qu'aux époques où  $\alpha$  passe par zéro,  $\beta$  étant moindre que  $\alpha$ , où  $\beta$  passe par zéro,  $\alpha$  étant moindre que  $\alpha$ , enfin où  $\alpha = \pm\beta$ .

Dans chacun de ces trois cas, deux valeurs de  $y$  sont réelles et les autres imaginaires sans parties réelles.

Les hypothèses  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\alpha = +\beta$ ,  $\alpha = -\beta$  devant jouer un rôle important dans la discussion qui va nous occuper, nous donnerons d'avance le tableau des valeurs de la différentielle de  $y$  dans les cas correspondants.

*Premier cas.*

$$\alpha = 0, \quad x = \beta\sqrt{-1}, \quad \beta < \alpha.$$

Les valeurs de  $y$  sont

$$\pm \sqrt[4]{a^4 - \beta^4} \quad \text{et} \quad \pm \sqrt[4]{a^4 - \beta^4} \sqrt{-1},$$

et celles de  $dy$

$$\pm \frac{\beta^3 \sqrt{-1}}{\sqrt[4]{(a^4 - \beta^4)^3}} (d\alpha + d\beta \sqrt{-1}) \quad \text{et} \quad \mp \frac{\beta^3}{\sqrt[4]{(a^4 - \beta^4)^3}} (d\alpha + d\beta \sqrt{-1}),$$

d'où l'on voit que celle des deux parties de  $y$  qui vient de s'annuler avec  $\alpha$ , change aussi de signe avec lui.

*Deuxième cas.*

$$\alpha = 0, \quad x = \beta \sqrt{-1}, \quad \beta > a.$$

Les valeurs de  $y$  sont

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\beta^4 - a^4} \begin{vmatrix} 1 + \sqrt{-1} \\ 1 - \sqrt{-1} \\ -1 + \sqrt{-1} \\ -1 - \sqrt{-1} \end{vmatrix}$$

celles de  $\frac{dy}{dx}$  sont

$$\frac{\beta^3}{\sqrt{2} \sqrt[4]{(\beta^4 - a^4)^3}} \begin{vmatrix} +1 - \sqrt{-1} \\ -1 - \sqrt{-1} \\ +1 + \sqrt{-1} \\ -1 + \sqrt{-1} \end{vmatrix}$$

et celles de  $dy$

$$\frac{\beta^3}{\sqrt{2} \sqrt[4]{(\beta^4 - a^4)^3}} \begin{vmatrix} + (d\alpha + d\beta) - (d\alpha - d\beta) \sqrt{-1} \\ - (d\alpha - d\beta) - (d\alpha + d\beta) \sqrt{-1} \\ + (d\alpha - d\beta) + (d\alpha + d\beta) \sqrt{-1} \\ - (d\alpha + d\beta) + (d\alpha - d\beta) \sqrt{-1} \end{vmatrix}$$

En comparant ce tableau à celui des valeurs de  $y$ , on voit que, dans celles où  $\alpha' = \beta'$ ,  $\alpha' - \beta'$  change de signe avec  $\alpha$ , et que dans

celles où  $\alpha' = -\beta'$ , c'est  $\alpha' + \beta'$  qui change de signe avec  $\alpha$ . Dans les deux cas, il y a interversion d'ordre dans les valeurs absolues de  $\alpha'$  et de  $\beta'$ .

*Troisième cas.*

$$\beta = 0, \quad x = a, \quad a < a.$$

Les valeurs de  $y$  sont

$$\pm \sqrt[4]{a^4 - \alpha^4} \quad \text{et} \quad \pm \sqrt[4]{a^4 - \alpha^4} \sqrt{-1},$$

et celles de  $dy$

$$\mp \frac{\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4 - \alpha^4)^3}} (d\alpha + d\beta \sqrt{-1}) \quad \text{et} \quad \mp \frac{\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4 - \alpha^4)^3}} (-d\beta + d\alpha \sqrt{-1}),$$

d'où l'on voit que celle des deux parties de  $y$  qui vient de s'annuler avec  $\beta$  change aussi de signe avec lui.

*Quatrième cas.*

$$\beta = 0, \quad x = a, \quad a > a.$$

Les valeurs de  $y$  sont

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\alpha^4 - a^4} \begin{vmatrix} 1 + \sqrt{-1} \\ 1 - \sqrt{-1} \\ -1 + \sqrt{-1} \\ -1 - \sqrt{-1} \end{vmatrix}$$

celles de  $\frac{dy}{dx}$  sont

$$\frac{\alpha^3}{\sqrt{2} \sqrt[4]{(\alpha^4 - a^4)^3}} \begin{vmatrix} 1 + \sqrt{-1} \\ 1 - \sqrt{-1} \\ -1 + \sqrt{-1} \\ -1 - \sqrt{-1} \end{vmatrix}$$

et celles de  $dy$

$$\frac{\alpha^3}{\sqrt{2} \sqrt[4]{(\alpha^4 - a^4)^3}} \begin{vmatrix} (d\alpha - d\beta) + (d\alpha + d\beta) \sqrt{-1} \\ (d\alpha + d\beta) - (d\alpha - d\beta) \sqrt{-1} \\ -(d\alpha + d\beta) + (d\alpha - d\beta) \sqrt{-1} \\ -(d\alpha - d\beta) - (d\alpha + d\beta) \sqrt{-1} \end{vmatrix}$$

En comparant ce tableau à celui des valeurs de  $y$ , on voit que dans celles où  $\alpha' = \beta'$ ,  $\alpha' - \beta'$  change de signe avec  $\beta$ , et que dans celles où  $\alpha' = -\beta'$ , c'est  $\alpha' + \beta'$  qui change de signe avec  $\beta$ . Dans les deux cas il y a interversion d'ordre dans les valeurs absolues de  $\alpha'$  et de  $\beta'$ .

*Cinquième cas.*

$$\alpha = +\beta, \quad x = \alpha(1 + \sqrt{-1}).$$

Les valeurs de  $y$  sont

$$\pm \sqrt[4]{a^4 + 4\alpha^4} \quad \text{et} \quad \pm \sqrt{-1} \sqrt[4]{a^4 + 4\alpha^4},$$

celles de  $\frac{dy}{dx}$  sont

$$\pm \frac{2\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4 + 4\alpha^4)^3}} (1 - \sqrt{-1}), \quad \text{et} \quad \pm \frac{2\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4 + 4\alpha^4)^3}} (1 + \sqrt{-1}),$$

et celles de  $dy$

$$\pm \frac{2\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4 + 4\alpha^4)^3}} [d\alpha + d\beta - (d\alpha - d\beta)\sqrt{-1}]$$

et

$$\pm \frac{2\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4 + 4\alpha^4)^3}} [d\alpha - d\beta + (d\alpha + d\beta)\sqrt{-1}].$$

D'où l'on voit que celle des parties de  $y$  qui s'annule avec  $\alpha - \beta$  change de signe avec cette différence.

*Sixième cas.*

$$\alpha = -\beta, \quad x = \alpha(1 - \sqrt{-1}).$$

Les valeurs de  $y$  sont, comme dans le cas précédent,

$$\pm \sqrt[4]{a^4 + 4\alpha^4} \quad \text{et} \quad \pm \sqrt{-1} \sqrt[4]{a^4 + 4\alpha^4};$$

mais les dérivées et les différentielles de  $y$  changent.

les valeurs de  $\frac{dy}{dx}$  sont

$$\pm \frac{2\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4+4\alpha^4)^3}} (1 + \sqrt{-1}) \quad \text{et} \quad \pm \frac{2\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4+4\alpha^4)^3}} (-1 + \sqrt{-1}),$$

et celles de  $dy$

$$\pm \frac{2\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4+4\alpha^4)^3}} [d\alpha - d\beta + (d\alpha + d\beta)\sqrt{-1}]$$

et

$$\pm \frac{2\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4+4\alpha^4)^3}} [-(d\alpha + d\beta) + (d\alpha - d\beta)\sqrt{-1}].$$

D'où l'on voit que celle des parties de  $y$  qui s'annule avec  $\alpha + \beta$  change de signe avec cette somme.

Nous pourrions considérer la discussion comme terminée là, puisque  $\alpha'$  et  $\beta'$  ne peuvent s'annuler et changer de signes que dans les hypothèses  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\alpha = \pm \beta$ , et qu'on sait ce qui leur arrive dans chacun de ces cas; mais nous allons chercher à suivre la marche du point  $[xy]$  sur la courbe réelle et sur ses conjuguées.

La courbe représentée par l'équation  $y^4 + x^4 = a^4$  est comprise entre les droites  $x = \mp a$ ,  $y = \mp a$ ; elle renferme dans son intérieur le cercle  $y^2 + x^2 = a^2$ .

Tant que  $x$  ne prend que des valeurs réelles comprises entre  $-a$  et  $+a$ , les valeurs de  $y$  sont

$$\pm \sqrt[4]{a^4 - x^4} \quad \text{et} \quad \pm \sqrt{-1} \sqrt[4]{a^4 - x^4},$$

la portion de la conjuguée à abscisses réelles, qui s'étend entre les droites  $x = \mp a$  ne se distingue donc pas de la courbe réelle.

Lorsque  $x$  prend des valeurs réelles non comprises entre  $-a$  et  $+a$ , les quatre valeurs de  $y$  sont

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{x^4 - a^4} \begin{vmatrix} 1 + \sqrt{-1} \\ 1 - \sqrt{-1} \\ -1 + \sqrt{-1} \\ -1 - \sqrt{-1} \end{vmatrix}$$

La conjuguée à abscisses réelles, en dehors des parallèles  $x = \mp a$ , se compose donc de l'axe des  $x$  doublé et de la courbe qui en coordonnées réelles aurait pour équation

$$y^4 - 4x^4 = -4a^4.$$

La conjuguée dont les ordonnées sont réelles est égale à la conjuguée à abscisses réelles, seulement elle s'appuie sur l'axe des  $y$  au lieu de s'appuyer sur l'axe des  $x$ .

Si des valeurs réelles,  $x = m$ ,  $y = n$ , des coordonnées, satisfont à l'équation

$$y^4 + x^4 = a^4,$$

les mêmes valeurs affectées du signe  $\sqrt{-1}$ ,  $x = m\sqrt{-1}$ ,  $y = n\sqrt{-1}$  y satisfont aussi.

La caractéristique de la solution  $x = m\sqrt{-1}$ ,  $y = n\sqrt{-1}$  est  $\frac{n}{m}$ , ainsi la conjuguée C passe par le point où la courbe réelle est coupée par la droite  $y = Cx$ , et elle la touche imaginairement en ce point, car la tangente à la courbe réelle au point  $x = m$ ,  $y = n$  est représentée par l'équation

$$y - n = -\frac{m^3}{n^3}(x - m),$$

et la tangente à la conjuguée C =  $\frac{n}{m}$  au point  $x = m\sqrt{-1}$ ,  $y = n\sqrt{-1}$  l'est par l'équation

$$y - n\sqrt{-1} = -\frac{m^3}{n^3}(x - m\sqrt{-1}),$$

qui ne fournit que la droite

$$y - n = -\frac{m^3}{n^3}(x - m).$$

La même conjuguée touche aussi la courbe réelle au point où la tangente à cette dernière est parallèle à  $y = Cx$ , mais les coordonnées de ce point sont réelles aussi bien sur la conjuguée que sur la courbe réelle.

La courbe réelle se trouve donc être à la fois l'enveloppe réelle et l'enveloppe imaginaire de toutes ses conjuguées.

Les asymptotes sont

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 + \sqrt{-1} \\ 1 - \sqrt{-1} \\ -1 + \sqrt{-1} \\ -1 - \sqrt{-1} \end{vmatrix}$$

et si l'on se rappelle que la droite représentée dans le système C par l'équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})x$$

est en coordonnées réelles

$$y = \left( m + n + \frac{2n^2}{m - n - C} \right) x,$$

on en conclura que les asymptotes de la conjuguée C sont fournies par les équations

$$\begin{aligned} y &= \left( \sqrt{2} - \frac{1}{C} \right) x, & y &= \frac{1}{\sqrt{2} - C} x, \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{2} + C} x, & y &= -\left( \sqrt{2} + \frac{1}{C} \right) x. \end{aligned}$$

Chaque conjuguée se compose en réalité de quatre arcs indéfinis dont deux touchent la courbe réelle en des points réels, tandis que les deux autres la touchent en des points imaginaires.

Nous pourrions cependant, pour simplifier le langage, considérer chaque conjuguée comme formée de la réunion de deux conjuguées de même caractéristique, mais de catégories différentes : la conjuguée de la première catégorie étant composée des deux arcs qui touchent la courbe réelle en des points réels, et l'autre des deux autres arcs.

Les quatre branches indéfinies qui composent les deux arcs d'une même catégorie ont toujours pour asymptotes deux droites imagi-

naires conjuguées, soit

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \sqrt{-1}) x \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \sqrt{-1}) x,$$

soit

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1 + \sqrt{-1}) x \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1 - \sqrt{-1}) x;$$

mais chacun de ces couples alterne d'une catégorie à l'autre lorsque C passe par zéro ou par l'infini; de telle sorte que les deux asymptotes

$$y = \left( \sqrt{2} - \frac{1}{C} \right) x \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2} - C} x$$

appartiennent à la première catégorie quand C est négatif et à la deuxième quand C est positif, et inversement pour les deux autres. Cela se voit aisément si l'on fait la figure.

En effet, quand par exemple C devient infini, d'une part les asymptotes de catégories différentes

$$y = \frac{1}{\sqrt{2} - C} x \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2} + C} x$$

se confondent en même temps que les arcs de catégories différentes auxquels elles appartiennent; car la partie Ax de l'axe des x, représentée par

$$y = \frac{1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{x^4 - a^4}, \quad [x \text{ réel}, > a],$$

peut être considérée à la fois comme une position limite d'une branche d'une conjuguée de la première catégorie dont la caractéristique négative serait devenue infinie et d'une branche d'une conjuguée de la deuxième catégorie dont la caractéristique positive serait devenue aussi infinie; de même que la même partie Ax de l'axe des x, représentée par

$$y = \frac{-1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{x^4 - a^4}, \quad [x \text{ réel}, > a],$$



peut être considérée à la fois comme une position limite d'une branche d'une conjuguée de la première catégorie dont la caractéristique positive serait devenue infinie, et d'une branche d'une conjuguée de la deuxième catégorie dont la caractéristique négative serait devenue aussi infinie.

De même, deux branches opposées de la conjuguée  $[C = \infty]$ , qui ont pour asymptote commune

$$y = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{C}\right) x$$

ou

$$y = -\left(\sqrt{2} + \frac{1}{C}\right) x,$$

peuvent être considérées chacune comme les positions limites de branches de conjuguées des deux catégories dont les caractéristiques de signes contraires seraient devenues infinies.

Ainsi la branche de la conjuguée  $C = \infty$  qui est située dans le premier angle des axes est à la fois la limite des positions d'une branche d'une conjuguée de la première catégorie dont la caractéristique négative serait devenue infinie, et d'une branche d'une conjuguée de la deuxième catégorie dont la caractéristique positive serait devenue infinie; et il en est de même de la branche de la même conjuguée qui est située dans le troisième angle des axes.

Ce que nous venons de dire de l'axe des  $x$  et de la conjuguée  $C = \infty$  pourrait au reste se répéter de l'axe des  $y$  et de la conjuguée  $C = 0$ .

Ces faits s'expliquent parce que les deux catégories de conjuguées ne se distinguent l'une de l'autre qu'en ce que celles de la première catégorie touchent la courbe réelle en des points réels, tandis que celles de la seconde la touchent en des points imaginaires; or les deux conjuguées  $C = \infty$ ,  $C = 0$  touchent la courbe réelle en des points réels qui se dédoubleront chacun en un point réel et un point imaginaire pour peu que change  $C$ , d'où il résulte que ces deux conjuguées peuvent être considérées comme appartenant à la fois aux deux catégories. Il en est de même des parties de l'axe des  $x$  et de l'axe des  $y$  qui sont représentées dans l'équation proposée.

Il résulte de ce qu'on vient de voir que l'axe des  $x$  et l'axe des  $y$

ainsi que les conjuguées  $C = \infty$ ,  $C = 0$ , appartenant aux deux catégories de conjuguées, fourniront au point  $[xy]$  un passage pour aller des conjuguées de l'une sur celles de l'autre.

C'est d'ailleurs le seul chemin qu'il pourra prendre, pour effectuer ce passage, tant qu'on lui interdira les points  $y = 0$ ,  $x = \pm a$ . Mais autrement, s'il se trouvait sur une conjuguée de la première catégorie, on pourrait l'amener au point où cette conjuguée touche la courbe réelle, le faire passer sur la courbe réelle en l'un des points  $y = 0$ ,  $x = \pm a$ , où son ordonnée, devenant nulle, pourrait prendre ensuite des valeurs imaginaires sans parties réelles, l'amener, en lui faisant parcourir la conjuguée  $C = \infty$ , en l'un des points  $x = 0$ ,  $y = \pm a\sqrt{-1}$ , où son abscisse, devenant nulle, pourrait prendre ensuite des valeurs imaginaires sans parties réelles, le faire passer par les points de contact successifs des conjuguées de la seconde catégorie avec la courbe réelle, et l'amener ainsi au point de contact avec cette même courbe de l'arc sur lequel on voudrait le transporter et enfin lui faire suivre une des branches de cet arc.

Avant d'aller plus loin, nous chercherons à fixer les conditions dans lesquelles le point  $[x, y]$ , placé ou sur l'axe des  $x$ , représenté par l'une des équations

$$y = \frac{1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{x^4 - a^4},$$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{x^4 - a^4},$$

dans lesquelles  $x$  recevrait seulement des valeurs réelles plus grandes que  $a$ , ou sur l'une des conjuguées  $C = \infty$ ,  $C = 0$ , passe sur les conjuguées de l'une ou de l'autre catégorie.

1°. La partie de l'axe des  $x$  que représente l'équation

$$y = \frac{1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{x^4 - a^4}$$

figure à la fois, dans leurs positions limites, une branche d'une conju-

guée de la première catégorie, dont la caractéristique négative serait devenue infinie, et une branche d'une conjuguée de seconde catégorie ayant sa caractéristique positive.

Par conséquent le point  $[x, y]$ , en passant sur l'axe des  $x$ , représenté par l'équation

$$y = \frac{1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{x^4 - a^4},$$

se transportera sur une conjuguée de la première ou de la seconde catégorie, suivant que sa caractéristique deviendra négative ou positive.

2°. La même partie de l'axe des  $x$ , que représente aussi l'équation

$$y = \frac{-1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{x^4 - a^4}$$

figure à la fois, dans leurs positions limites, une branche de première catégorie ayant sa caractéristique positive infinie, et une branche de seconde catégorie ayant sa caractéristique négative infinie.

Par conséquent le point  $[x, y]$  en passant sur l'axe des  $x$ , représenté par l'équation

$$y = \frac{-1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{x^4 - a^4},$$

se transportera sur une conjuguée de la première ou de la seconde catégorie, suivant que sa caractéristique deviendra positive ou négative.

3°. Les branches de la conjuguée  $C = \infty$ , qui occupent le premier et le troisième angle des axes, figurent, dans leurs positions limites, une branche de première catégorie dont la caractéristique négative serait devenue infinie, et une branche de seconde catégorie dont la caractéristique serait infinie, positive.

Au contraire, les branches qui occupent le second et le quatrième angle, figurent, dans leurs positions limites, des branches de première

et de seconde catégorie, dont les caractéristiques positive et négative seraient devenues infinies.

Par conséquent le point  $[x, y]$ , en passant sur la conjuguée  $C = \infty$ , se transportera, si sa caractéristique devient négative, sur une conjuguée de la première catégorie, lorsqu'il se trouvera dans le premier ou le troisième angle des axes, et sur une conjuguée de la seconde catégorie, s'il est dans le deuxième ou dans le quatrième angle. Ce serait le contraire si sa caractéristique devenait positive.

Les passages du point  $[x, y]$  sur l'axe des  $y$ , ou sur la conjuguée  $C = 0$ , donneraient lieu à des conclusions analogues.

Il est maintenant facile de suivre la marche du point  $[x, y]$ , correspondante à un chemin quelconque parcouru par  $x$ .

Prenons pour point de départ une valeur réelle de  $x$ ,  $m$ , plus grande que  $a$  : les quatre valeurs correspondantes de  $y$  seront

$$s = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \sqrt{-1}) \sqrt[4]{m^4 - a^4},$$

$$t = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 + \sqrt{-1}) \sqrt[4]{m^4 - a^4},$$

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 - \sqrt{-1}) \sqrt[4]{m^4 - a^4},$$

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \sqrt{-1}) \sqrt[4]{m^4 - a^4}.$$

Supposons le point  $[x, y]$  parti de

$$x = m, \quad y = s = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \sqrt{-1}) \sqrt[4]{m^4 - a^4}.$$

Il se trouvera alors en un point M de la branche de la conjuguée  $C = \infty$  qui occupe le premier angle des axes, et si  $\beta$ , qui est actuellement nul, prend une valeur positive infiniment petite, comme  $\beta'$ , qui est fini et positif, ne pourra devenir brusquement négatif, C prendra des valeurs positives, le point  $[x, y]$  passera donc sur une conjuguée voisine de la

conjuguée  $C = \infty$ , appartenant à la deuxième catégorie, ayant sa caractéristique positive et tangente à la courbe réelle en un point P, voisin du sommet  $x = 0, y = a\sqrt{-1}$ , mais situé à droite de ce sommet.

Si  $x$  revenait à sa valeur initiale sans qu'aucune des circonstances  $\beta = 0$  avec  $\alpha < a, \alpha = 0, \alpha = \pm \beta$  se fût présentée dans l'intervalle,  $y$  reviendrait aussi à sa valeur initiale : supposons donc que ces différentes circonstances se présentent, séparément d'abord.

Si, après avoir crû positivement,  $\beta$  redevient nul,  $\alpha$  étant alors moindre que  $a$ , le point  $[x, y]$  à ce moment se trouvera sur la conjuguée  $C = \infty$ , et si  $\beta$  et par suite  $C$  changent de signes, il passera sur une branche tangente à la courbe réelle en un point situé à gauche du sommet  $x = 0, y = a\sqrt{-1}$ ; de sorte que si  $x$  revenait à sa première valeur sans qu'aucune des circonstances  $\beta = 0$  avec  $\alpha < a, \alpha = 0, \alpha = \pm \beta$  se fût présentée de nouveau dans l'intervalle,  $y$  prendrait la valeur  $t$ , ou  $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + \sqrt{-1})\sqrt[4]{m^4 - a^4}$ , et le point  $[x, y]$  viendrait se placer sur l'axe des  $x$  représenté par l'équation

$$y = \frac{-1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{x^4 - a^4}.$$

Pendant ce temps le point  $[x, y]$  qui serait parti de la position initiale  $[x, u]$ , se sera transporté sur une conjuguée de la deuxième catégorie ayant sa caractéristique négative, aura passé sur la conjuguée  $C = \infty$  en même temps que le point qui venait de  $[x, s]$ , aura changé de branche en même temps que lui; et finalement sera arrivé en  $[x, v]$ .

Le point parti de  $[x, t]$  se sera d'abord transporté sur une conjuguée de la première catégorie, ayant sa caractéristique positive, sur la courbe réelle au moment où  $\beta$  aura passé par zéro,  $\alpha$  étant moindre que  $a$ ; et enfin sera venu en  $[x, u]$ .

De même le point parti de  $[x, v]$  se sera d'abord transporté sur une conjuguée de la première catégorie ayant sa caractéristique négative, sur la courbe réelle au moment où  $\beta$  aura passé par zéro,  $\alpha$  étant moindre que  $a$ , il aura changé de branche sur une conjuguée toujours de la

première catégorie, ayant toujours sa caractéristique négative, quand  $\beta$  aura changé de signe; et enfin sera venu en  $[x, s]$ .

En résumé, pendant que  $x$  sera revenu à sa valeur initiale, chacun des points

$$[x, s], [x, t], [x, u], [x, v],$$

sera venu occuper la place du suivant, et le dernier celle du premier.

Si  $x$  repassait encore par une série pareille de valeurs, les mêmes faits se reproduiraient dans le même ordre; de sorte qu'en faisant suivre à  $x$  quatre fois le même parcours, on ramènerait chaque point à sa position initiale.

Supposons maintenant que  $\alpha$  puisse passer par zéro et changer de signe: en même temps il deviendra plusieurs fois égal à  $\pm \beta$ , de sorte que nous aurons examiné tous les cas qui peuvent se présenter.

Reprenons pour  $x$  la même valeur initiale  $x = m > a$ , et supposons encore que  $\beta$  prenne d'abord le signe  $+$ , que nous lui conserverons d'ailleurs dans tout ce qui suivra, puisque nous avons examiné les cas où il passe par zéro et change de signe; il est évident que nous aurions à répéter les mêmes choses dans un autre ordre, si nous supposions au contraire que  $\beta$  fût d'abord et restât négatif.

Les quatre valeurs initiales de  $y$  seront toujours

$$s = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \sqrt{-1}) \sqrt[4]{m^4 - a^4},$$

$$t = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 + \sqrt{-1}) \sqrt[4]{m^4 - a^4},$$

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 - \sqrt{-1}) \sqrt[4]{m^4 - a^4},$$

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \sqrt{-1}) \sqrt[4]{m^4 - a^4}.$$

Avant que  $\alpha$  devienne nul, il faudra qu'il devienne égal à  $\beta$ ; à ce moment les quatre valeurs de  $y$  seront

$$\pm \sqrt[4]{a^4 + 4\beta^4} \quad \text{et} \quad \pm \sqrt{-1} \sqrt[4]{a^4 + 4\beta^4} :$$

Comme  $\alpha'$  ni  $\beta'$  n'auront pas encore jusque-là passé par zéro, celle de ces variables qui aura conservé une valeur finie, aura en même temps gardé son signe primitif; cette remarque permettra de décider en partie des valeurs qu'auront prises respectivement les quatre fonctions de  $x$  que représente  $\gamma$ .

Ainsi  $s$  ne pourra être devenu que

$$+ \sqrt[4]{a^4 + 4\beta^4} \quad \text{ou} \quad + \sqrt{-1} \sqrt[4]{a^4 + 4\beta^4},$$

$t$  sera

$$- \sqrt[4]{a^4 + 4\beta^4} \quad \text{ou} \quad + \sqrt{-1} \sqrt[4]{a^4 + 4\beta^4},$$

$u$  sera

$$- \sqrt[4]{a^4 + 4\beta^4} \quad \text{ou} \quad - \sqrt{-1} \sqrt[4]{a^4 + 4\beta^4},$$

enfin  $v$  sera

$$+ \sqrt[4]{a^4 + 4\beta^4} \quad \text{ou} \quad - \sqrt{-1} \sqrt[4]{a^4 + 4\beta^4}.$$

Pour achever de résoudre la question, nous remarquerons que dans chacune des quatre valeurs de  $\gamma$ ,  $\alpha'$  et  $\beta'$ , égaux en valeur absolue au point de départ, n'auront pas repassé par l'égalité puisque  $\alpha$  ni  $\beta$  ne seront redevenus nuls; de telle sorte que l'ordre établi au commencement n'aura pas pu s'intervertir ensuite.

Or  $\beta$  qui était d'abord nul, prenant d'abord un accroissement positif, le tableau des valeurs de  $dy$  montre que : 1° dans la fonction de  $x$  qui part de la valeur  $s$ , et où  $\alpha' = \beta'$ ,  $d\beta'$  est plus grand que  $d\alpha'$ , de sorte que  $\beta'$  devient plus grand que  $\alpha'$ ; 2° que dans celle qui part de la valeur  $t$ , et où  $\alpha' = -\beta'$ ,  $\alpha'$  ayant d'ailleurs le signe  $-$  et par suite  $\beta'$  le signe  $+$ ,  $d\alpha'$  et  $d\beta'$  se composent de deux parties égales et de signes contraires qui, en venant s'ajouter à  $\alpha'$  et  $\beta'$ , ne troubleraient pas l'égalité  $\alpha' = -\beta'$ , et de deux parties aussi égales, mais négatives toutes deux, parce que  $d\beta$  est positif, et qui venant s'ajouter à  $\alpha'$  et  $\beta'$ , font prendre la supériorité à  $\alpha'$ , de sorte que  $-\alpha'$  devient plus grand que  $\beta'$ ; 3° que dans la valeur de  $\gamma$  qui part de la valeur  $u$ , où  $\alpha'$  et  $\beta'$  sont égaux,  $d\alpha'$  est plus grand que  $d\beta'$ , de sorte que  $\alpha'$  devient plus grand que  $\beta'$ ; 4° enfin que dans la valeur de  $\gamma$  qui part de la valeur  $v$  où  $\alpha' = -\beta'$ ,

$\alpha'$  ayant d'ailleurs le signe +, c'est encore  $\alpha'$  qui prend l'avance sur  $-\beta'$ .

Il en résulte qu'au moment où  $\alpha$  devient égal à  $\beta$ ,

$$\begin{aligned} s \text{ devient} & \quad + \sqrt{-1} \sqrt[4]{a^4 + 4\beta^4}, \\ t \text{ devient} & \quad - \sqrt[4]{a^4 + 4\beta^4}, \\ u \text{ devient} & \quad - \sqrt{-1} \sqrt[4]{a^4 + 4\beta^4}, \\ \text{et } v \text{ devient} & \quad + \sqrt[4]{a^4 + 4\beta^4}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $\alpha$  devienne nul,  $\beta$  étant alors moindre que  $a$ , les quatre valeurs de  $\gamma$  seront

$$\pm \sqrt[4]{a^4 - \beta^4} \quad \text{et} \quad \pm \sqrt{-1} \sqrt[4]{a^4 - \beta^4},$$

et il s'agit d'attribuer ces valeurs aux quatre fonctions de  $x$  qui sont parties des valeurs initiales  $s, t, u, v$ .

Or dans aucune de ces quatre fonctions  $\alpha'$  n'a pu devenir égal à  $\beta'$  en valeur absolue, sans quoi  $\alpha$  ou  $\beta$  auraient passé par zéro, ni changer de signe, pour la même raison, cela exige évidemment qu'elles reprennent chacune pour  $\alpha = 0$  la même valeur que pour  $\alpha = \beta$ .

Enfin supposons que  $\alpha$  devienne nul,  $\beta$  étant alors plus grand que  $a$ , les quatre valeurs de  $\gamma$  seront

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (\pm 1 \pm \sqrt{-1}) \sqrt[4]{\beta^4 - a^4}.$$

Pour les répartir, nous remarquerons encore que depuis le moment où  $\alpha$  est devenu égal à  $\beta$ ,  $\alpha'$  ni  $\beta'$  n'ont pas pu repasser ni par zéro, ni par l'égalité de valeurs absolues, et comme nous savons d'ailleurs que quand l'ordre de grandeur de  $\alpha$  et  $\beta$  change, la partie de  $\gamma$  qui s'annule alors, change ensuite de signe, nous en concluons :

que  $s$  est devenu

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{\beta^4 - a^4} (-1 + \sqrt{-1}),$$



que  $t$  est devenu

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{\beta^4 - a^4} (-1 - \sqrt{-1}),$$

que  $u$  est devenu

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{\beta^4 - a^4} (1 - \sqrt{-1}),$$

enfin que  $v$  est devenu

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{\beta^4 - a^4} (1 + \sqrt{-1}).$$

On voit que les discussions de ce genre peuvent exiger quelquefois des développements fastidieux ; mais les difficultés qu'elles présentent tiennent surtout à la complication de l'équation mise à l'étude. Or on ne pouvait évidemment pas demander que la discussion des lieux imaginaires, représentés par une équation, devint plus simple que celle du lieu réel ; il suffit qu'elle ne soit pas plus compliquée.

