JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAXIMILIEN MARIE

Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 361-383.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__361_0>

NOUVELLE THÉORIE
DES
FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES;

PAR M. MAXIMILIEN MARIE,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

PREMIÈRE PARTIE.

CLASSIFICATION DES VALEURS IMAGINAIRES CORRESPONDANTES DE LA FONCTION ET DES VARIABLES DONT ELLE DÉPEND.

Le Mémoire dont nous commençons la publication contiendra les applications de la méthode, que nous développons dans ce premier article, à la recherche des périodes des intégrales simples, doubles ou d'ordre quelconque, à l'étude de la marche d'une fonction implicite d'une ou de plusieurs variables imaginaires, etc.

Nous nous bornons, dans cette première partie, à reproduire sous une forme plus concise, et avec de légères additions ou corrections, le résumé d'un ouvrage que nous avons publié en 1845 sur le même sujet.

Ce résumé était indispensable pour l'intelligence des articles qui suivront, et qui font le principal objet de notre publication actuelle.

CHAPITRE PREMIER.

Des lieux imaginaires dont il sera question dans ce Mémoire.

1. Les solutions imaginaires d'une équation indéterminée sont infiniment plus nombreuses que les solutions réelles de la même équation.

Une équation $f(x, y) = 0$, ne contenant qu'une variable indépendante, ne fournit qu'une seule suite de solutions réelles, embrassant un espace plus ou moins étendu entre $+\infty$ et $-\infty$, soit par rapport à x, soit par rapport à y; mais si, dans la même équation, on remplace x par

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},$$

et y par

$$\alpha' + \beta'\sqrt{-1}:$$

comme on n'aura entre les quatre variables α, β, α', β' que deux relations, provenant de la décomposition du premier membre de l'équation

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = 0$$

en ses deux parties réelle et imaginaire, l'indétermination deviendra double.

De même, dans une équation $f(x, y, z) = 0$, l'indétermination n'est que double tant qu'on n'en considère que les solutions réelles, et devient quadruple lorsqu'il s'agit des solutions imaginaires.

2. On pourrait donc étendre considérablement le champ d'une équation indéterminée, en s'habituant à en étudier les solutions imaginaires aussi bien que les solutions réelles; on les classerait d'abord afin d'y réduire l'indétermination au même ordre que celle des solutions réelles de la même équation, et si l'on pouvait ensuite attacher à des choses réelles et sensibles la représentation sous forme imaginaire, il est clair qu'on serait parvenu à exprimer, sous une même formule, d'abord la loi principale et caractéristique observée par les variables réelles, et, en outre, une infinité d'autres lois analogues à la première.

L'emploi des formes négatives aurait donc permis de condenser dans une même formule l'expression des lois correspondantes aux différentes phases d'un même phénomène, et l'emploi des formes imaginaires permettrait d'y lire encore l'expression des lois d'une infinité de phénomènes analogues au premier.

Une équation à deux variables pourrait représenter une courbe réelle et une infinité de courbes imaginaires; une équation à trois variables représenterait une surface réelle et une infinité d'infinités de surfaces imaginaires.

3. La réalisation de ce plan nécessite la solution de deux questions préalables : comment classera-t-on les solutions imaginaires d'une équation à deux ou à trois variables; et comment ensuite construira-t-on le point correspondant à chaque solution imaginaire? Car en résolvant arbitrairement ces deux questions, on pourrait associer, au lieu géométrique représenté réellement, tous les lieux imaginaires que l'on voudrait et qui n'auraient avec le premier aucune propriété commune présentant quelque intérêt.

Avant tout, il faudra que les lieux imaginaires, associés au lieu réel, restent les mêmes quels que soient les axes auxquels le lieu réel vienne à être rapporté; c'est-à-dire que les coordonnées réelles de chaque point imaginaire devront se former des parties réelles et imaginaires de ses coordonnées imaginaires, suivant une loi telle, que ce point se retrouve toujours à la même place sur le plan ou dans l'espace, soit qu'on le construise, par rapport aux anciens axes, au moyen de ses coordonnées fournies par l'équation proposée, soit qu'on le construise par rapport à un nouveau système quelconque d'axes, au moyen de ses nouvelles coordonnées composées des anciennes, d'après les formules propres à passer de l'un des systèmes d'axes à l'autre pour un point réel.

Cette question étant supposée résolue, il faudra en second lieu que la loi de progression des solutions d'une même suite soit telle, que, les lieux imaginaires associés au lieu réel étant définis et construits, on puisse les étudier aussi bien dans l'équation qui les représentera imaginairement que dans celles qui les représenteraient réellement; il faudra que les mêmes questions posées, soit par rapport au lieu réel, soit par rapport à l'un quelconque des lieux imaginaires représentés par la même équation, puissent être résolues au moyen des mêmes calculs, de façon que pour passer de l'un des lieux aux autres, il n'y ait jamais qu'à substituer, dans les résultats obtenus, des coordonnées imaginaires à des coordonnées réelles, et non pas, ce qui est bien différent, de certaines fonctions des paramètres des lieux imaginaires à des fonctions analogues des paramètres du lieu réel, comme on l'avait fait jusqu'ici dans toutes les tentatives de géométrie comparée; comme on fait, par exemple, lorsque, pour passer de l'ellipse à l'hyperbole, on remplace, dans les résultats, le carré de l'un des axes de la première courbe par le carré affecté du signe *moins* de l'axe non transverse de la seconde.

L'être géométrique alors ne serait plus, comme dans l'antiquité, une branche ou nappe de courbe ou de surface, jouissant dans toute son étendue, et sans aucune modification quelconque, de propriétés absolument identiques; ni, comme dans la géométrie moderne, un assemblage de plusieurs branches ou nappes dont les points jouiraient de propriétés pareilles, à la différence près de quelques changements de sens ou de direction; mais une courbe ou surface, lieu principal dans la question qui en aurait fourni l'équation, accompagnée d'une infinité d'autres lieux secondaires, jouissant de propriétés analogues, et qui se substitueraient au lieu réel toutes les fois qu'il ne pourrait plus fournir les solutions déterminées qu'on s'était proposé d'obtenir.

Mais il est clair que les deux questions, bien qu'elles puissent être posées séparément, doivent être résolues simultanément, en quelque sorte l'une pour l'autre; il eût été impossible de les séparer à l'origine: toutefois nous pourrons nous borner ici à donner successivement la solution de chacune d'elles, sauf à vérifier ensuite que ces deux solutions concourent bien au but proposé.

Nous nous occuperons d'abord des équations à deux variables, c'est-à-dire des lieux plans.

4. Mettons de côté, pour un moment, la question de construction : la suite de solutions imaginaires de l'équation proposée, qui devra présenter le plus d'intérêt et fournir le lieu le plus analogue au lieu réel, sera évidemment celle qui comprendrait toutes les valeurs réelles de x, auxquelles correspondraient des valeurs imaginaires de y. De toutes les suites de solutions imaginaires de l'équation proposée, ce sera celle qui s'éloignera le moins de la suite des solutions réelles de la même équation.

Mais cette première idée en suggère immédiatement une autre : si la seconde question, qui doit nous occuper bientôt, peut être résolue, si l'on peut trouver, pour construire le point correspondant à un système de valeurs imaginaires de x et de y, une règle qui fournisse toujours le même point pour la même solution transformée en raison d'un changement d'axes: à chaque système d'axes correspondra une suite de solutions imaginaires par rapport à y seulement, présentant tout autant d'intérêt que la première. En conséquence, on réunira dans une même suite toutes les solutions imaginaires de l'équation proposée qui pourraient devenir en même temps réelles par rapport à x, moyennant un changement d'axes convenable.

Ainsi se trouvent définies toutes les suites de solutions imaginaires de l'équation proposée qui fourniront les différents lieux imaginaires que nous considérons comme représentés par cette équation.

Il est facile de découvrir le caractère analytique commun de toutes les solutions qui formeront une même suite; ce caractère étant connu, la transformation préalable de coordonnées deviendra superflue, on pourra, dans l'équation proposée, rechercher toutes ces solutions, en sorte qu'il ne restera plus qu'à construire le point représenté par chacune d'elles.

Soient

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

$$y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

les coordonnées d'un point imaginaire : une transformation d'axes les changera en

$$x' = mx + ny = m\alpha + n\alpha' + (m\beta + n\beta')\sqrt{-1},$$

$$y' = m'x + n'y = m'\alpha + n'\alpha' + (m'\beta + n'\beta')\sqrt{-1};$$

la nouvelle abscisse du point considéré serait donc réelle si $\frac{m}{n}$ se trouvait égal à $-\frac{\beta'}{\beta}$. On voit que, quelles que soient les équations qu'on ait l'intention de traiter, ensemble ou séparément, une même transformation de coordonnées pourra rendre en même temps réelles les abscisses de tous les points représentés par celles de leurs solutions dans lesquelles le rapport des parties imaginaires de y et de x aurait la même valeur.

Chacun des lieux imaginaires que nous nous proposons d'étudier, concurremment avec le lieu réel représenté par une équation quelconque, sera donc fourni par les solutions de cette équation, où le rapport des parties imaginaires de y et de x aurait la même valeur.

Nous désignerons habituellement ce rapport par la lettre C, et nous lui donnerons le nom de *caractéristique* du lieu imaginaire correspondant.

Les caractéristiques d'un même lieu imaginaire rapporté successivement à deux systèmes d'axes différents sont liées par la relation

$$CC' \sin Y'Y + C \sin X'Y - C' \sin Y'X - \sin X'X = 0.$$

Il suffirait évidemment de changer convenablement la direction de l'axe des y pour rendre réelles par rapport à x telles solutions que l'on voudrait, où $\frac{\beta'}{\beta}$ aurait la même valeur; en effet, des solutions actuellement réelles par rapport à x resteraient telles, quelque nouvelle direction qu'on donnât à l'axe des x sans changer celle de l'axe des y, puisque la nouvelle abscisse ne dépendrait que de l'ancienne.

Si l'on ne fait varier que l'axe des y, la relation précédente se simplifie : elle devient

$$CC' \sin Y'Y + C \sin XY - C' \sin Y'X = 0.$$

On peut tirer de cette équation une relation entre la caractéristique du lieu imaginaire qu'on veut considérer et la direction qu'il faudrait donner à l'axe des y, pour rendre ses abscisses réelles.

C étant la caractéristique du lieu, si ses abscisses sont devenues réelles, C' est infini et la relation précédente se réduit à

$$C \sin Y'Y = \sin Y'X,$$

ou

$$C = \frac{\sin Y'X}{\sin Y'Y}.$$

C'est-à-dire que la caractéristique de chacun des lieux imaginaires est le coefficient angulaire de la direction qu'il faudrait donner à l'axe des y, pour rendre ses abscisses réelles.

5. Arrivons maintenant à la construction du point représenté par chaque solution imaginaire.

Soient

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$
$$y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

les coordonnées d'un point imaginaire quelconque : une transformation de coordonnées les changera en

$$x' = mx + ny = m\alpha + n\alpha' + (m\beta + n\beta')\sqrt{-1},$$
$$y' = m'x + n'y = m'\alpha + n'\alpha' + (m'\beta + n'\beta')\sqrt{-1};$$

or il est évident que si dans les anciennes aussi bien que dans les nouvelles coordonnées on remplace $\sqrt{-1}$ par 1, et qu'on construise, par rapport aux deux systèmes d'axes, d'une part le point

$$x = \alpha + \beta,$$
$$y = \alpha' + \beta',$$

et de l'autre le point

$$x' = m\alpha + n\alpha' + (m\beta + n\beta'),$$
$$y' = m'\alpha + n'\alpha' + (m'\beta + n'\beta'),$$

ces deux points coïncideront.

On peut donc adopter la règle qui vient d'être énoncée ; elle revient à regarder $\sqrt{-1}$ comme un signe caractéristique de la nature de la grandeur représentée, mais qui ne saurait en modifier l'étendue. On peut concevoir cette règle sous un autre point de vue : si l'on imagine menées de l'origine les lignes qui aboutiraient aux points $[\alpha, \alpha']$, $[\beta, \beta']$ dans l'ancien système d'axes et aux points $[m\alpha + n\alpha', m'\alpha + n'\alpha']$, $[m\beta + n\beta', m'\beta + n'\beta']$ dans le nouveau, les deux premières coïncideront avec les deux dernières; on pourrait se rendre de l'origine au point $[xy]$ ou $[x'y']$, en décrivant la ligne brisée dont les côtés seraient égaux et parallèles aux lignes qui joindraient l'origine aux points $[\alpha, \alpha']$, $[\beta, \beta']$ ou $[m\alpha + n\alpha', m'\alpha + n'\alpha']$, $[m\beta + n\beta', m'\beta + n'\beta']$; qu'on opérât sur l'un ou l'autre système d'axes, on aurait décrit la même ligne, brisée au même point.

Pour tous les points appartenant à un même lieu imaginaire, $\frac{\beta'}{\beta}$ est constant : le second côté de la ligne brisée conserverait donc une direction fixe, parallèle à celle qu'il faudrait donner à l'axe des y pour rendre réelles les abscisses de tous les points de ce lieu.

Si l'équation considérée a ses coefficients réels, à la solution

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$
$$y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

il en correspond une autre

$$x = \alpha - \beta\sqrt{-1},$$
$$y = \alpha' - \beta'\sqrt{-1},$$

qui appartient à la même suite, les deux points $[\alpha+\beta\sqrt{-1}, \alpha'+\beta'\sqrt{-1}]$, $[\alpha-\beta\sqrt{-1}, \alpha'-\beta'\sqrt{-1}]$ appartiennent à un même lieu imaginaire; les seconds côtés des deux lignes brisées qui y mènent de l'origine sont égaux et opposés, ce sont les moitiés d'une corde de ce lieu menée parallèlement à la direction qu'il faudrait donner à l'axe des y pour rendre ses abscisses réelles; le point où les deux lignes se brisent est le milieu de cette corde, c'est donc un point du diamètre du lieu considéré correspondant aux cordes parallèles à la direction qu'il faudrait donner à l'axe des y pour rendre ses abscisses réelles.

6. En résumé, les lieux imaginaires que nous nous proposons d'étudier, que nous associons à chaque lieu réel et que nous regardons comme représentés aussi bien que lui par son équation, sont toutes les courbes que l'on obtiendrait en prenant les solutions de l'équation proposée, où le rapport des parties imaginaires de y et de x serait une constante arbitraire C, et construisant pour chaque solution le point qui aurait pour coordonnées les mêmes valeurs de x et de y, dans lesquelles on aurait remplacé $\sqrt{-1}$ par 1. Nous donnerons habituellement le nom de *conjuguées* de la courbe réelle à ces courbes imaginaires.

Si des parallèles menées dans le plan de la courbe réelle ne la coupent pas toutes en autant de points qu'il y a d'unités dans le degré de son équation, il existe nécessairement une conjuguée ayant pour caractéristique le coefficient angulaire commun de ces parallèles; les rencontres avec cette conjuguée et avec la courbe réelle complètent pour chaque parallèle (sauf le cas où elles ont une des directions asymptotiques) le nombre marqué par le degré de l'équation.

Si l'on peut mener à la courbe réelle des tangentes parallèles à la direction qu'il faudrait donner à l'axe des y pour rendre réelles les abscisses d'une conjuguée, cette conjuguée passe évidemment par les points de contact de ces tangentes, elle est elle-même tangente en ces points à la courbe réelle, et les deux courbes ont leurs concavités tournées en sens contraires. La courbe réelle est donc l'enveloppe de ses conjuguées ou du moins d'une partie de ses conjuguées.

Si toutes les droites imaginables menées, dans le plan de la courbe réelle, parallèlement aux rayons d'un secteur circulaire, coupent toujours cette courbe en autant de points qu'il y a d'unités dans le degré de son équation, la courbe n'a pas de conjuguée dont la caractéristique puisse être comprise entre les coefficients angulaires des rayons extrêmes du secteur en question.

Si l'on ne peut pas mener de tangentes à la courbe réelle parallèlement à une direction donnée, et que cependant les parallèles à cette direction la coupent en un nombre de points moindre que le degré de son équation, il existe une conjuguée ayant pour caractéristique le coefficient angulaire de la direction considérée, mais cette conjuguée ne touche plus la courbe réelle.

Les courbes imaginaires représentées par une même équation, soit qu'elles touchent ou ne touchent pas la courbe réelle, peuvent avoir une seconde enveloppe que nous déterminerons plus tard.

On peut, pour discuter et construire une des conjuguées d'une courbe, soit rendre ses abscisses réelles, en changeant la direction de l'axe des y, et faire ensuite passer x par toutes les valeurs réelles, dans la nouvelle équation ; soit calculer et construire les coordonnées des rencontres imaginaires de la courbe proposée avec des droites réelles ayant pour coefficient angulaire la caractéristique de la conjuguée qu'on veut obtenir. Nous désignerons souvent ces droites sous le nom de *cordes réelles de la conjuguée*.

Les conjuguées de l'ellipse sont toutes les hyperboles qui ont avec elle un système de diamètres conjugués commun ; elles occupent tout le plan, sauf l'intérieur de la courbe.

Les conjuguées d'une hyperbole sont toutes les ellipses qui ont avec elle un système de diamètres conjugués commun, leurs caractéristiques sont comprises entre les coefficients angulaires des rayons asymptotiques menés du centre aux deux branches de la courbe. Ces conjuguées, qui toutes touchent la courbe réelle, ont pour seconde enveloppe l'hyperbole ayant les mêmes axes, mais changés de transverse en non transverse, et réciproquement; elles occupent toute la portion du plan comprise entre les deux enveloppes.

Les conjuguées d'une parabole sont des paraboles égales et opposées par un diamètre commun; elles occupent tout l'espace situé en dehors de la proposée.

7. *Des surfaces imaginaires.* — Nous construirons, comme en géométrie plane, le point correspondant à une solution imaginaire quelconque d'une équation à trois variables, en remplaçant le signe $\sqrt{-1}$ par 1 dans les valeurs trouvées pour ses coordonnées. La position du point ainsi obtenu sera indépendante du choix des axes, c'est-à-dire que le même point sera toujours fourni par la solution primitive et par cette solution transformée en raison du déplacement des axes; car les formules qui servent à passer d'un système à un autre, dans l'espace, sont linéaires, comme celles qui servent à effectuer le même passage dans un plan, et c'était là en définitive la raison de la permanence du point obtenu.

Quant aux conjuguées de la surface réelle représentée par l'équation proposée, nous formerons chacune d'elles de la réunion des points correspondants aux solutions de cette équation dans lesquelles les rapports des parties imaginaires de z et de x, de z et de y seraient des nombres constants C et C'; ces rapports seront les deux caractéristiques de la conjuguée correspondante.

Il est évident que les solutions de l'équation proposée dans lesquelles z seulement serait imaginaire, se changeraient, par suite d'une transformation d'axes, en d'autres dans lesquelles les rapports des parties imaginaires de z et de x, de z et de y seraient constants; et que réciproquement on pourrait rendre réelles par rapport à x et y, en dirigeant convenablement l'axe des z, toutes les solutions dans lesquelles les parties imaginaires des trois variables seraient dans des rapports constants.

Les conjuguées d'une surface seront donc toutes les surfaces qu'on obtiendrait en donnant successivement à l'axe des z toutes les directions, et construisant, pour chacune d'elles, les valeurs imaginaires de z correspondantes à des valeurs réelles de x et de y.

Chaque conjuguée touchera la surface réelle suivant son contour apparent parallèlement à la direction qu'il faudrait donner à l'axe des z pour rendre réelles les abscisses et les ordonnées de cette conjuguée; la surface réelle sera donc l'enveloppe de ses conjuguées.

Les conjuguées d'un ellipsoïde sont des hyperboloïdes continus ayant trois diamètres conjugués communs avec lui.

Les conjuguées de l'hyperboloïde à une nappe sont des ellipsoïdes ou des hyperboloïdes à deux nappes, suivant que la direction qu'il faudrait donner à l'axe des z pour rendre leurs abscisses et ordonnées réelles est ou non comprise dans l'intérieur du cône asymptote; chacune de ces conjuguées a trois diamètres conjugués communs avec la surface réelle.

L'hyperboloïde à deux nappes a pour conjuguées des hyperboloïdes à une nappe ayant avec la surface réelle un système de diamètres conjugués communs. Les caractéristiques de ces conjuguées ne peuvent prendre toutes les valeurs, parce que lorsque l'axe des z est dirigé dans l'intérieur du cône asymptote, les valeurs de z correspondantes à des valeurs réelles de x et de y sont elles-mêmes toujours réelles.

Les conjuguées du paraboloïde elliptique sont des paraboloïdes hyperboliques de mêmes paramètres, et réciproquement.

CHAPITRE II.

Discussion des conjuguées d'une courbe ou d'une surface au moyen de l'équation qui les représente en même temps que le lieu réel.

8. *De la ligne droite.* — On étudie une courbe en la mettant en rapport avec des lignes plus simples; mais si la ligne qu'on veut étudier est représentée imaginairement, il faut que celle qu'on veut lui comparer le soit aussi.

Nous devions donc chercher, de la ligne droite, une équation qui la représentât en coordonnées imaginaires. Mais une même ligne donnée peut être représentée imaginairement par une infinité d'équations différentes, même sous la condition que le rapport des parties imaginaires des coordonnées d'un quelconque de ses points reste constant.

L'équation que nous cherchions, pour suffire à tous les besoins, devait contenir quatre constantes, puisqu'on devait pouvoir faire passer la droite qu'elle devait représenter par deux points choisis à volonté, dont les coordonnées contiendraient quatre quantités différentes.

Cette équation, outre la droite qu'on avait pour principal but de représenter, fournirait en tous cas une infinité d'autres lieux, et il était important que tous ces lieux fussent des lignes droites.

L'équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x + p + q\sqrt{-1}$$

satisfait à toutes ces conditions : elle représente toutes les hyperboles, réduites à leurs asymptotes, conjuguées de l'ellipse nulle

$$y = mx + p + \sqrt{-(nx+q)^2}.$$

Toutes ces droites forment un faisceau divergent du point

$$x = -\frac{q}{n}, \quad y = -\frac{mq}{n} + p,$$

qui n'est autre que le point où se réduit l'ellipse, et se confondent avec les diamètres prolongés de cette courbe.

Cela posé, l'équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x + p + q\sqrt{-1}$$

représentant une infinité de droites, comme une équation quelconque $f(x, y) = 0$ représente une infinité de courbes, on voit qu'on pourra, entre l'une des courbes et l'une des droites, pourvu qu'elles aient même caractéristique, établir telle relation qu'on voudra ; on coupera la courbe par la droite, on rendra la droite tangente ou asymptote à la courbe, etc.

On ferait pour le cercle ce qu'on vient de faire pour la droite, si on voulait l'employer comme terme de comparaison à l'étude des courbes imaginaires; mais, pour le moment, nous ne nous occuperons que de la droite.

9. *Intersections d'une droite et des conjuguées d'une courbe.* — La méthode par laquelle nous avons pu obliger l'équation d'une courbe à représenter en même temps qu'elle et au même moment, c'est-à-dire dans le même calcul, toutes les conjuguées de cette courbe, est fondée tout entière sur cette remarque : lorsque la même question est posée soit par rapport à la courbe réelle, soit par rapport à l'ensemble de ses conjuguées, le nombre des inconnues dans le second cas est double de ce qu'il serait dans le premier, il faut donc aussi que le nombre des données soit double; dans le premier cas les données réelles doivent être introduites dans les calculs sous forme réelle, dans le second elles devront l'être sous une forme imaginaire qui permette dans leur représentation une indétermination suffisante qu'on laissera subsister jusqu'à ce que, le calcul achevé, on veuille en rendre le résultat relatif à la courbe réelle ou à l'une de ses conjuguées désignée.

Ainsi la même droite $y = ax + b$ peut se trouver représentée par une infinité d'équations de la forme

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x + p + q\sqrt{-1},$$

et sous des caractéristiques différentes. Si donc on voulait avoir les points de rencontre de cette droite avec une courbe $f(x, y) = 0$ ou avec l'une de ses conjuguées, il faudrait l'introduire sous la forme indéterminée

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x + p + q\sqrt{-1},$$

en réservant les deux conditions qui établiraient son identité géométrique, savoir :

$$m + n + \frac{2n^2}{m-n-C} = a, \quad p + q + \frac{2qn}{m-n-C} = b,$$

qui se réduisent à

$$m + n = a, \quad p + q = b,$$

lorsque C est infini; on ferait le calcul d'élimination et de résolution sur les équations

$$f(x, y) = 0, \quad y = (m + n\sqrt{-1})\,n + p + q\sqrt{-1},$$

et l'on n'introduirait qu'à la fin, d'abord les deux conditions précédentes, ensuite celle que les coordonnées des points de rencontre appartinssent, comme on le voulait, à telle ou telle conjuguée.

10. *Diamètres.* — Soient x_1 et y_1 les demi-sommes des coordonnées de deux points quelconques pris sur une même conjuguée ou sur des conjuguées différentes d'une courbe $f(x, y) = 0$, le point $[x_1, y_1]$ sera toujours au milieu de la droite qui joindrait ces deux points. Si les deux points choisis appartiennent à une même conjuguée ayant pour caractéristique C, le point $[x_1, y_1]$ appartiendra aussi au système C; dans le cas contraire, les caractéristiques des trois points seront différentes.

Supposons maintenant que l'équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x + p + q\sqrt{-1}$$

soit satisfaite par les coordonnées des points choisis, elle le serait aussi par $x = x_1$, $y = y_1$.

Cela posé, si nous remplacions dans l'équation

$$f(x, y) = 0$$

et dans l'équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x + p + q\sqrt{-1},$$

x par $x + x_1$ et y par $y + y_1$, les coordonnées nouvelles des deux points choisis deviendraient égales et de signes contraires et devraient satisfaire aux équations

$$f(x + x_1,\ y + y_1) = 0,$$
$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x;$$

l'équation

$$f[x + x_1,\ (m + n\sqrt{-1})\,x + y_1] = 0$$

devrait donc avoir en x deux racines égales et de signes contraires : x_1, y_1 et $m+n\sqrt{-1}$ satisferaient donc à une certaine condition

$$F(x_1, y_1, m+n\sqrt{-1}) = 0$$

identique à l'équation générale des diamètres de la courbe réelle et qui fournirait les milieux de toutes les cordes qu'on pourrait imaginer entre les points représentés par l'équation

$$f(x, y) = 0.$$

Mais il ne faudrait pas croire que m et n étant déterminées, les solutions d'un même système C de l'équation

$$F(x_1\ y_1, m+n\sqrt{-1}) = 0$$

fourniraient les différents points du diamètre qui couperait en parties égales les cordes menées dans la conjuguée C de la courbe proposée parallèlement à la droite

$$y = \left(m + n + \frac{2n^2}{m-n-C}\right) x = ax.$$

En général, pour obtenir la suite de ces points, il faudrait faire varier m et n en les assujettissant à la condition

$$m + n + \frac{2n^2}{m-n-C} = a,$$

et, pour chaque système de valeurs de m et de n, ne prendre que certaines des solutions du système C de l'équation

$$F(x_1, y_1, m+n\sqrt{-1}) = 0.$$

11. *Centres.* — Si une courbe a un centre, il appartient aussi à toutes ses conjuguées, cela est évident; si elle n'en a pas, ses conjuguées n'en ont pas non plus, car si l'une d'elles en était douée, la courbe réelle, qui serait comprise parmi les conjuguées de celle-ci, en aurait donc aussi un.

12. *Tangentes.* — Celle des conjuguées d'une courbe $f(x, y) = 0$ qui passe au point $[x', y']$, dont les coordonnées satisfont à la condition $f(x', y') = 0$, a pour tangente en ce point celle des droites représentées par l'équation

$$y - y' = -\frac{f'x'}{f'y'}(x - x')$$

qui passe au même point.

En effet, sur chacune de ces lignes le point infiniment voisin du point $[x', y']$ se déterminerait par les mêmes conditions. Si

$$x' = \alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

que

$$y' = \alpha'_1 + \beta' C\sqrt{-1},$$

et que

$$x'' = \alpha' + \beta'\sqrt{-1} + d\alpha' + d\beta' . \sqrt{-1},$$
$$y'' = \alpha'_1 + \beta' C\sqrt{-1} + d\alpha'_1 + d\beta' . C\sqrt{-1},$$

désignent les coordonnées d'un point pris à une distance infiniment petite du point $[x', y']$ sur l'une ou l'autre des deux lignes considérées, les trois variables $d\alpha'$, $d\beta'$, $d\alpha'_1$ seront dans l'un et l'autre cas assujetties aux deux mêmes conditions

$$\frac{d\alpha'_1 + d\beta' . C\sqrt{-1}}{d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1}} = -\frac{f'x'}{f'y'}.$$

Cela posé, si l'on veut d'un point extérieur ou parallèlement à une droite mener une tangente à une courbe $f(x, y) = 0$, ou à l'une quelconque de ses conjuguées, on pourra, en introduisant les données sous forme imaginaire, mettre en équation le problème dans toute sa généralité de la manière suivante :

1°. S'il s'agit de mener la tangente par un point extérieur donné, on introduira les coordonnées de ce point sous une forme indéterminée $[x'', y'']$, les quantités x'' et y'' n'étant encore assujetties qu'à ces deux conditions, que si l'on y remplaçait $\sqrt{-1}$ par 1, elles devinssent égales aux coordonnées réelles du point donné ; x', y' désignant les coordonnées du point de contact, la tangente cherchée serait représentée, sous le même coefficient caractéristique que le point $[x'y']$, par l'équation

$$y - y' = -\frac{f'x'}{f'y'}(x - x');$$

on exprimera donc que $x = x''$, $y = y''$ vérifient cette équation, ce qui donnera, pour déterminer x' et y', l'équation

$$y'' - y' = -\frac{f'x'}{f'y'}(x'' - x'),$$

que l'on adjoindra à l'équation

$$f(x', y') = 0.$$

Ces deux équations étant résolues, on achèvera de déterminer x'' et y'' en exprimant que les deux points $[x''y'']$, $[x'y']$ appartiennent au même système que la conjuguée à laquelle on voulait mener la tangente.

2°. S'il s'agit de mener la tangente parallèlement à une droite donnée $y = ax$, on introduira le coefficient angulaire de cette droite sous une forme indéterminée $m + n\sqrt{-1}$; x' y' désignant les coordonnées du point de contact, la tangente cherchée serait représentée, sous le même coefficient caractéristique que le point $[x'y']$, par l'équation

$$y - y' = -\frac{f'x'}{f'y'}(x - x');$$

on exprimera donc que $-\frac{f'x'}{f'y'} = m + n\sqrt{-1}$, et cette équation, combinée avec $f(x', y') = 0$, permettra de déterminer x' et y'; alors si c'était à la conjuguée ayant pour caractéristique C qu'on voulût mener une tangente, on déterminera m et n par les conditions que

$$m + n + \frac{2n^2}{m - n - C} = a,$$

et que le point $[x'y']$ appartienne à la conjuguée C.

3°. Si l'on voulait avoir, de toutes les tangentes à la courbe proposée et à ses conjuguées, une équation générale ne contenant d'autre constante arbitraire que le coefficient angulaire de chaque tangente, il suffirait de résoudre la question par rapport à la courbe réelle; si

$$y = mx + \varphi(m)$$

est l'équation générale des tangentes à la courbe $f(x, y) = 0$,

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + \varphi(m + n\sqrt{-1})$$

sera évidemment l'équation générale des tangentes aux conjuguées de cette courbe.

On pourra, si on le veut, adjoindre à cette équation une condition qui fixe le point de contact sur une conjuguée déterminée.

13. *Asymptotes.* — Si, en suivant la règle pour déterminer les asymptotes d'une courbe $f(x, y) = 0$, on a trouvé pour l'une d'elles une équation à coefficients imaginaires

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}.$$

Cette équation représentera une infinité de droites, et chacune d'elles sera évidemment asymptote à la conjuguée de même caractéristique de la courbe proposée.

Si l'une des équations obtenues avait son coefficient angulaire réel, elle représenterait une seule droite asymptote commune à toutes les conjuguées, parce que toutes les solutions imaginaires d'une équation

$$y = ax + p + q\sqrt{-1}$$

ne peuvent fournir que les points de la seule droite

$$y = ax + p + q.$$

Si l'une des équations obtenues était entièrement réelle, elle représenterait une droite asymptote en même temps à la courbe réelle et à celle de ses conjuguées qui aurait pour caractéristique le coefficient angulaire de cette droite, mais ne donnerait rien pour les autres conjuguées qui manqueraient de l'asymptote correspondante, parce que toutes les solutions imaginaires d'une équation $y = ax + b$, lorsque a et b sont réels, appartiennent au système $C = a$.

14. *Du plan.* — Les solutions imaginaires, de mêmes caractéristiques C et C', d'une équation linéaire à trois variables

$$(M + N\sqrt{-1})\,x + (P + Q\sqrt{-1})\,y + (R + S\sqrt{-1})\,z + 1 = 0,$$

doivent encore fournir les points d'une surface plane, car l'élimination de α, α', α'', β entre les équations

$$(M + N\sqrt{-1})\left(\alpha + \frac{\beta}{C}\sqrt{-1}\right) + (P + Q\sqrt{-1})\left(\alpha' + \frac{\beta}{C'}\sqrt{-1}\right) + (R + S\sqrt{-1})(\alpha'' + \beta\sqrt{-1}) + 1 = 0,$$

$$x = \alpha + \frac{\beta}{C},$$

$$y = \alpha' + \frac{\beta}{C'},$$

$$z = \alpha'' + \beta,$$

donnera nécessairement une équation linéaire entre x, y et z.

Tous les plans représentés par l'équation

$$(M + N\sqrt{-1})\,x + (P + Q\sqrt{-1})\,y + (R + S\sqrt{-1})\,z + 1 = 0,$$

passent par la droite réelle

$$Mx + Py + Rz + 1 = 0,$$

$$Nx + Qy + Sz = 0.$$

15. *Des lignes.* — Deux équations à coefficients réels ou imaginaires, prises au hasard, ne fourniraient généralement qu'un nombre limité de solutions communes appartenant à un même système [C, C']; il faut, pour que le contraire arrive, que les quatre équations dans lesquelles se décomposeraient les proposées, lorsqu'on y supposerait les variables imaginaires, se réduisent à trois; si ce fait se présente, quelles que soient les caractéristiques C et C', le système des deux équations peut être regardé comme représentant une infinité d'infinités de lignes; si cela n'a lieu qu'autant que C et C' satisfassent à une certaine condition, le système des deux équations ne représente plus qu'une infinité de lignes, plus une infinité de points isolés; enfin, si les quatre équations restent toujours distinctes, quels que soient C et C', le système des deux proposées ne représente qu'une infinité d'infinités de points isolés.

16. *De la ligne droite.* — Le système de deux équations linéaires, telles que

$$x = (m + n\sqrt{-1})z + p + q\sqrt{-1},$$
$$y = (m' + n'\sqrt{-1})z + p' + q'\sqrt{-1},$$

dans lesquelles $\frac{n}{n'} = \frac{q}{q'}$, représente un faisceau de droites contenues dans le plan

$$n'x - ny = (n'm - nm')z + n'p - np';$$

les deux caractéristiques d'une de ces droites sont liées par la relation

$$n'C - nC' = n'm - nm'.$$

17. *Plan tangent.* — Le plan tangent à une surface imaginaire en un point x', y', z' est, comme si ce point appartenait à la surface réelle, représenté par l'équation

$$(x - x')\frac{dx'}{dz'} + (y - y')\frac{dy'}{dz'} + z - z' = 0.$$

18. *Tangentes.* — La tangente à une courbe à double courbure imaginaire et son plan osculateur sont représentés par les mêmes équations qui les fourniraient réels.

19. *Remarque.* — Nous ne prétendons nullement imposer comme seuls rationnels, seuls pratiques, les principes qui nous ont guidé dans ce qui précède. En matière d'interprétation des solutions imaginaires des équations, c'est par l'utilité des résultats obtenus qu'on devra toujours juger des méthodes proposées : nous n'avons aucune opinion exclusive à cet égard.

Nous ne voyons pas trop comment on pourrait substituer à la nôtre une manière différente de construire le point correspondant à une solution imaginaire de l'équation mise à l'étude; mais quelque intérêt qui s'attache aux lieux que nous avons étudiés, par ce fait seul qu'ils se substituent toujours au lieu réel dans tous les cas où celui-ci n'a plus de point qui jouisse de la propriété demandée, il est évident qu'on pourra avoir à en étudier d'autres renfermés dans les mêmes équations, mais définis par de nouvelles conditions autres que celle de la constance dans les rapports des parties imaginaires de la variable dépendante et des variables indépendantes.

Au reste, la plupart des propriétés que nous avons reconnues dans les lieux que nous avons étudiés, conviendraient aussi à tous ceux qu'on pourrait définir d'une autre manière.

Ainsi, quelque relation complémentaire qu'on établisse entre les parties réelles et imaginaires des variables x et y, dans les deux équations

$$f(x, y) = 0$$

et

$$y - y' = -\frac{f'x'}{f'y'}(x - x'),$$

pour y réduire l'indétermination au premier ordre, toujours celui des lieux représentés par la seconde équation, qui passera au point $[x'y']$, sera tangent en ce point à celui des lieux de même espèce, et passant par le même point que représenterait la première.

De même, si en recherchant les asymptotes de la courbe

$$f(x, y) = 0$$

on a trouvé pour l'une d'elles une équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1},$$

quelque relation complémentaire qu'on établisse à volonté entre les parties imaginaires de x et de y, dans les deux équations, le lieu représenté dans un système par la seconde sera toujours asymptote au lieu représenté par la première dans le même système.

20. *Enveloppe imaginaire des conjuguées.* — Ce que nous venons de dire des lieux que pourrait fournir l'équation

$$y - y' = -\frac{f'x'}{f'y'}(x - x'),$$

si l'on en associait les solutions suivant une règle choisie à volonté, va nous conduire à un résultat important : toutes les courbes imaginaires, partant du point $[x'y']$, qui seraient définies par l'équation $f(x, y) = 0$ et par diverses conditions complémentaires qu'on aurait successivement établies entre les parties réelles et imaginaires de x et de y, doivent être tangentes respectivement à celles qui partiraient également du point $[x'\, y']$ et qui seraient représentées par l'équation

$$y - y' = -\frac{f'x'}{f'y'}(x - x'),$$

à laquelle on aurait adjoint les mêmes relations complémentaires; mais lorsque le coefficient angulaire $-\frac{f'x'}{f'y'}$ est réel, toutes ces courbes deviennent tangentes entre elles au point $[x'\, y']$, et par conséquent à la conjuguée qui y passe.

En effet, une équation

$$y = ax + p + q\sqrt{-1},$$

dans laquelle a est réel, ne peut fournir que des points appartenant à la droite $y = ax + p + q$; car si $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$ en forment une solution

$$\alpha' = a\alpha + p \quad \text{et} \quad \beta' = a\beta + q,$$

par conséquent

$$\alpha' + \beta' = a(\alpha + \beta) + p + q.$$

Les solutions de l'équation $f(x, y) = 0$, qui satisfont à la condition que $-\frac{f'x}{f'y}$ soit réel, sont donc telles, que toutes les lignes imaginaires qui passent aux points qu'elles fournissent, si elles résultent de l'équation $f(x, y) = 0$, y ont la même tangente.

Cette propriété appartient évidemment à tous les points situés sur la courbe qui limite la portion du plan couverte par les points représentés par les solutions imaginaires de l'équation $f(x, y) = 0$.

La condition $-\frac{f'x}{f'y} =$ réel est donc l'équation de cette courbe.

Les conjuguées d'une surface peuvent aussi avoir une enveloppe imaginaire; ainsi les ellipsoïdes imaginaires conjugués d'un hyperboloïde continu ont pour seconde enveloppe l'hyperboloïde à deux nappes de mêmes axes, changés de réels en imaginaires, et réciproquement. Cette seconde enveloppe se trouve, comme en géométrie plane, par la condition que les deux dérivées partielles de z, par rapport à x et à y, soient réelles; mais en général elle ne touche plus chaque conjuguée qu'en un point, tandis que la surface réelle les touche suivant des courbes tout entières.