JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ERNEST DE JONQUIÈRES

Mode de construction et de description de la courbe du quatrième ordre déterminée par quatorze points

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 411-420.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__411_0>

MODE

DE CONSTRUCTION ET DE DESCRIPTION

DE LA

COURBE DU QUATRIÈME ORDRE DÉTERMINÉE PAR QUATORZE POINTS;

PAR M. ERNEST DE JONQUIÈRES,

Lieutenant de Vaisseau.

(Extrait d'un Mémoire sur la génération des courbes géométriques, présenté par l'auteur à l'Académie des Sciences.)

I.

Notations. Un *faisceau* de coniques est une série de coniques circonscrites au même quadrilatère. Soit *cdef* ce quadrilatère; les coniques $(cdef1)$, $(cdef2)$, $(cdef3)$, $(cdef4)$, etc., forment un faisceau que je représenterai brièvement par la notation suivante :

$$(cdef)\,[1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots].$$

J'appelle *base* du faisceau le système des quatre points communs à toutes les coniques de ce faisceau; le système des autres points 1, 2, 3, 4,..., dont chacun détermine une conique, est la *partie variable* du faisceau.

Il peut entrer des points inconnus dans la base d'un faisceau. Ainsi

$$(abxy)\,[1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots,]$$

représente un faisceau de coniques qui passent toutes par deux points connus a et b, et par deux autres points inconnus x et y.

Deux faisceaux *anharmoniques* sont deux faisceaux dont les courbes composantes se correspondent anharmoniquement dans le sens que M. Chasles a donné à cette expression. S'il s'agit de deux faisceaux de droites, on peut dire aussi que les deux faisceaux sont *homogra-*

phiques. Mais, sauf ce cas particulier, il ne faut point confondre la correspondance *anharmonique* avec l'*homographie* qui ne peut avoir lieu qu'entre des courbes du même ordre, et qui exige d'autres relations entre ces courbes.

Deux faisceaux anharmoniques donnent lieu, par les intersections mutuelles de leurs courbes correspondantes, à une courbe dont le degré est égal à la somme des degrés des courbes composantes. Ce théorème général est démontré dans le Mémoire d'où cette Note est extraite. Je n'ai eu du reste qu'à suivre la démonstration que M. Chasles applique à deux faisceaux homographiques de coniques, dans le tome XXXVII des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, pages 273 et suivantes

La courbe *résultante* des deux faisceaux passe par tous les points qui composent les bases respectives des deux faisceaux. Et si un point de l'une des deux bases est aussi un point de la seconde base, ce point devient un point double dans la courbe résultante.

Je ne reproduirai pas ici les démonstrations de ces divers corollaires.

II.

Quand il y a des points inconnus dans la base d'un des deux faisceaux, on peut profiter de leur indétermination pour rendre ce faisceau anharmonique à l'autre. Comme ce sont, dans le Mémoire, les rapports anharmoniques de quatre des courbes données qui servent à déterminer ces points inconnus, on conclut facilement de la théorie de l'homographie, que le nombre des conditions fournies par les données du problème doit excéder de trois le double du nombre des points inconnus. On trouvera aussi dans le Mémoire la démonstration générale de ce théorème, d'où il résulte que, si l'on se propose de trouver deux points x et y tels que les deux faisceaux

$$(cdef)\,[1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7]$$

et

$$(abxy)\,[1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7]$$

soient anharmoniques, la question est entièrement déterminée.

C'est précisément par cette question que je vais commencer la présente Note, car elle me sera utile pour la solution du problème difficile qui en fait le sujet principal.

III.

On commencera par déterminer trois points P, P′, P″ tels que les trois faisceaux de cinq droites

$$P[1, 2, 3, 4, 5], \qquad P'[1, 2, 3, 4, 6], \qquad P''[1, 2, 3, 4, 7],$$

soient anharmoniques respectivement aux trois faisceaux de cinq coniques

$$(cdef)[1, 2, 3, 4, 5], \quad (cdef)[1, 2, 3, 4, 6], \quad (cdef)[1, 2, 3, 4, 7],$$

problème facile qui n'exige, comme on sait, que l'emploi de la ligne droite et du cercle.

Il est d'abord évident que les trois points P, P′, P″ se trouvent sur la conique qui s'appuie sur les quatre points donnés 1, 2, 3, 4, et qui est *capable* du rapport anharmonique des quatre coniques

$$(cdef)[1, 2, 3, 4].$$

J'appelle Σ cette conique, qui est déterminée.

Cela posé, les dix points 1, 2, 3, 4, 5, P, a, b, x, y sont situés sur une même courbe inconnue du troisième ordre W. Cette courbe coupe une droite quelconque PO issue du point P, en deux autres points ε, φ, par lesquels passe nécessairement aussi la conique inconnue S qui, dans le faisceau des coniques génératrices de la courbe W, correspond anharmoniquement au rayon générateur PO.

Que l'on fasse passer par les huit points 1, 2, 3, 4, 5, P, a, b, une série de courbes du troisième ordre U, U′, U″, . . . , dont la courbe inconnue W fait naturellement partie. Ces courbes intercepteront sur le rayon PO des segments en involution lm, $l'm'$, $l''m''$,. . . . Deux seulement de ces segments feront connaître les points doubles λ, μ de l'involution, et ces deux segments eux-mêmes se construiront avec la ligne droite et le cercle sans qu'on ait besoin de construire les courbes U et U′ (*voir* dans les *Comptes rendus*, tome XLI, le § XI d'une Note de M. Chasles sur les courbes du troisième ordre). Cela posé, le segment $\lambda\mu$ est divisé harmoniquement par le segment $\varepsilon\varphi$ qui fait partie de la série des segments lm, $l'm'$,.... Donc la conique S divise harmoniquement le segment $\lambda\mu$.

Soit O le point où le rayon arbitraire PO rencontre la conique Σ; qu'on joigne P′O et P″O. On a évidemment

$$\text{rapp. anh. } P[1, 2, 3, O] = \text{rapp. anh. } P'[1, 2, 3, O] = \text{rapp. anh. } P''[1, 2, 3, O],$$

parce que tous ces points sont sur une même conique Σ. Donc ces trois rapports anharmoniques sont égaux à celui des quatre coniques $(ab\,xy\,1)$, $(ab\,xy\,2)$, $(ab\,xy\,3)$, et S qui n'est autre que $(ab\,xy\,\varepsilon\varphi)$. Par conséquent, si l'on considère les deux courbes du troisième ordre W′ ou $(1\,2\,3\,4\,6\,P'\,ab\,xy)$ et $(1\,2\,3\,4\,7\,P''\,abxy)$ ou W″, la conique S, regardée comme une conique génératrice de ces courbes, correspond au rayon générateur P′O pour l'une, et au rayon générateur P″O pour l'autre, de même qu'elle correspondait au rayon générateur PO quand il s'agissait de la courbe W.

Il résulte de là, par des raisonnements identiques à ceux qui précèdent, que si l'on détermine les deux points doubles λ', μ' de l'involution marquée sur P′O par une série de courbes du troisième ordre circonscrites à l'octogone $1\,2\,3\,4\,5\,6\,P'\,ab$, la conique S divisera aussi harmoniquement le segment $\lambda'\mu'$.

Et enfin si l'on détermine les deux points doubles λ'', μ'' de l'involution marquée sur P″O par une série de courbes du troisième ordre circonscrites à l'octogone $1\,2\,3\,4\,7\,P''\,ab$, la conique S divisera encore harmoniquement le segment $\lambda''\mu''$.

Ainsi cette conique S est déterminée, puisqu'elle passe par deux points connus a, b, et qu'elle doit couper harmoniquement trois segments actuellement connus $\lambda\mu$, $\lambda'\mu'$, $\lambda''\mu''$ (*voir*, au sujet de ce problème, les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XIV, p. 437).

Si l'on prend sur Σ un autre point O′, et qu'on mène les trois rayons PO′, P′O′, P″O′, on donnera lieu à trois nouvelles séries de segments en involution, et par suite à trois segments de points doubles $\nu\rho$, $\nu'\rho'$, $\nu''\rho''$, qui devront être divisés harmoniquement à la fois par la conique S′ qui, regardée successivement comme conique génératrice des trois courbes du troisième ordre W, W′, W″, correspond anharmoniquement aux rayons générateurs PO′, P′O′, P″O′ respectivement.

Cette conique S′ passe comme S par les quatre points a, b, x, y ; ces deux courbes ont deux points communs a, b ; on pourra donc déterminer les deux autres x, y sans construire les coniques et en se servant simplement de la règle et du compas. Ces deux points sont précisément les points cherchés, et l'on voit qu'ils peuvent être imaginaires, ce qui n'empêchera pas le faisceau de coniques

$$(abxy)[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$$

d'exister et d'être homographique au faisceau donné. Enfin on voit que la question proposée n'a qu'une seule solution.

IV.

Le problème que je viens de résoudre donne la clef de plusieurs questions intéressantes. Je ne citerai ici que les deux suivantes :

1°. *Construire la courbe du quatrième ordre déterminée par un point double et onze autres points.*

On voit effectivement que si a est le point double, et si b, c, d, e, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sont les onze autres points, il suffit de trouver deux points x et y qui rendent anharmoniques les deux faisceaux

$$(abcd)[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7],$$
$$(aexy)[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].$$

La courbe résultante sera du quatrième ordre, et elle aura un point double en a, parce que le point est commun aux bases des deux faisceaux de coniques génératrices.

La détermination des points x, y rentre dans la question qui a déjà été résolue.

2°. *Construire l'une des courbes du quatrième ordre qui passent en nombre infini par treize points donnés.*

Il suffit encore d'*anharmoniser* les deux faisceaux de coniques

$$(abcd)\ [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7],$$
$$(efxy)\ [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7],$$

en déterminant convenablement les points x et y ; ce qu'on sait faire.

En écrivant

$$(abcd)\quad [e, 2, 3, 4, 5, 6, 7],$$
$$(1fx'y')\,[e, 2, 3, 4, 5, 6, 7],$$

on obtiendrait une autre courbe du quatrième ordre passant aussi par les treize points donnés, et distincte de la première, comme il est bien facile de le démontrer.

V.

Au lieu de construire une de ces courbes du quatrième ordre, on peut demander simplement de déterminer les deux points où elle rencontre une droite L qui passe déjà par deux points connus de cette courbe. Ce problème facile n'exige que l'emploi de la ligne droite et du cercle. En effet, les coniques du premier faisceau générateur déterminent sur la droite L une série de segments en involution, et les coniques du second faisceau générateur en déterminent une seconde. Les segments se correspondent anharmoniquement comme les coniques elles-mêmes. Donc il existe sur L quatre points qui appartiennent en même temps à deux segments correspondants, c'est-à-dire qui sont sur la courbe du quatrième ordre (Chasles, *Comptes rendus*, t. XLI, p. 679). Mais ici deux de ces points sont connus, ce qui abaisse au second degré la construction des deux autres points.

VI.

J'aborde maintenant la question suivante :

Décrire la courbe du quatrième ordre déterminée par quatorze points.

Cette question est susceptible de plusieurs solutions; mais je dois me borner ici à en faire connaître une. On en trouvera deux autres dans le Mémoire.

Soient a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 les quatorze points donnés, et W la courbe du quatrième ordre qu'ils déterminent.

Le problème revient évidemment à celui-ci :

Trouver trois points x, y, z tels, qu'ils rendent anharmoniques les *deux faisceaux*

$$(abcd)\,[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9],$$
$$(exyz)\,[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9].$$

Je regarde le système des deux droites ab et cd comme étant une conique du premier faisceau, et je vais déterminer la conique S qui lui correspond dans le second. Je déterminerai ensuite la conique S′ qui correspond au système des deux droites ac, bd, considéré comme étant une conique du premier faisceau.

Les deux coniques S, S′ passent par les quatre points e, x, y, z, et le point e est connu. Leurs trois autres points d'intersection résoudront la question.

Pour construire S, je suppose qu'on circonscrive aux treize points a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 une série de courbes du quatrième ordre z, z', z''', etc., dont W fait nécessairement partie. Ces courbes couperont les deux droites ab et cd, chacune en deux points, autres que les points a et b ou c et d, et tous ces couples de points sont en involution sur l'une et sur l'autre droite. Soient $\varepsilon\varphi$ et $\gamma\delta$ les deux segments inconnus interceptés sur les deux droites par la courbe W. Ces segments font partie des deux involutions respectivement, et par conséquent ils divisent harmoniquement, l'un le segment $\lambda\mu$ des points doubles de la première involution, l'autre le segment $\nu\rho$ des points doubles de la seconde.

Il faut donc trouver ces points doubles, ce qui exige deux segments d'essai sur chacune des deux droites. J'ai dit plus haut (V) comment on déterminera ces segments, sans avoir besoin de construire les courbes auxiliaires Z, Z′, qui n'apparaissent que dans la démonstration.

Actuellement, si l'on fait passer par treize des points donnés différemment choisis, tels que a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, une autre série de courbes du quatrième ordre Y, Y′, Y″, etc., série dont fait encore partie la courbe cherchée W, on déterminera sur les droites ab et cd deux nouvelles séries de segments en involution, dont les points doubles respectifs λ', μ' et ν', ρ' seront, comme ci-dessus, divisés harmoniquement par le segment $\varepsilon\varphi$ sur ab, et par le segment $\gamma\delta$ sur cd

Donc ces segments $\varepsilon\varphi$ et $\delta\gamma$ sont déterminés, puisque chacun d'eux doit diviser harmoniquement deux segments donnés sur une droite; on les construira comme il est dit au n° 210 de la *Géométrie supérieure*.

La conique S dont on connaît actuellement cinq points, savoir e, ε, φ, γ, δ est donc déterminée.

On déterminera par des procédés identiques la conique S′ qui correspond au système des deux droites ac, bd.

Les coniques S et S′ étant connues, le problème proposé est résolu, et l'on voit qu'ainsi posé il n'a qu'une seule solution; je veux dire qu'il n'existe qu'un seul système de trois points x, y, z qui y satisfasse.

VII.

On conclura sans difficulté de la solution qui précède celle de cette autre question :

Connaissant quatre des points d'intersection d'une conique et d'une courbe du quatrième ordre, trouver les quatre autres.

On commencera par déterminer la base du second faisceau de coniques génératrices, $(abcd)$ étant celle du premier (a, b, c, d sont les quatre points communs aux deux courbes), et pour cela on prendra arbitrairement un des quatre points de cette base inconnue. Ensuite on cherchera quelle est la conique S′ du second faisceau qui correspond à la conique S, qui est donnée et qui fait naturellement partie du premier faisceau. Les quatre points d'intersection des coniques S et S′ sont les quatre points demandés.

VIII.

On déduit des mêmes considérations la solution du problème suivant :

Connaissant sept des points d'intersection d'une courbe du troisième ordre avec une courbe du quatrième ordre, déterminer la conique sur laquelle se trouvent les cinq autres.

Soient a, b, c, d, e, f, g les sept points d'intersection connus; α, β, γ, δ, ε les cinq autres qu'il s'agit de trouver. Je prends quatre des points donnés, a, b, c, d par exemple, comme base des coniques génératrices de la courbe du troisième ordre U et de la courbe du quatrième ordre W; je détermine 1° le sommet P du faisceau des droites génératrices de la courbe U (Chasles, *Construction de la courbe du troisième ordre*); et 2° la base $(ixyz)$ du deuxième faisceau des coniques génératrices de la courbe du quatrième ordre, d'après la méthode que j'ai exposée précédemment. i est un point quelconque de la courbe du quatrième ordre qui n'est pas tracée, non plus que la courbe U, mais dont on connaît quatorze points.

Les cinq points α, β, γ, δ, ε étant sur la courbe du quatrième ordre, les deux faisceaux de coniques

$$\begin{gathered}(abcd)\,[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon],\\(ixyz)\,[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon],\end{gathered}$$

sont anharmoniques. Mais ils sont aussi sur la courbe du troisième ordre U. Donc les deux faisceaux

$$\begin{gathered}(abcd)\,[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon],\\P\,[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon],\end{gathered}$$

sont anharmoniques; et il en résulte qu'il en est de même des deux faisceaux

$$\begin{gathered}(ixyz)\,[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon],\\P\,[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon].\end{gathered}$$

Donc les cinq points cherchés se trouvent aussi sur une seconde courbe du troisième ordre U′, qui résultent des intersections mutuelles des courbes et des droites correspondantes de ces deux derniers faisceaux. On a toutes les données nécessaires pour construire cette courbe, ou du moins pour en trouver neuf points. Car on connaît trois rayons Pe, Pf, Pg, ainsi que les trois coniques correspondantes $(ixyze)$, $(ixyzf)$, $(ixyzg)$. On en trouvera donc sans peine cinq autres points.

Cela posé, les deux courbes U et U′ ont quatre points communs, savoir e, f, g, P. Leurs cinq autres points d'intersection sont sur une conique qu'on sait déterminer (Chasles, *Comptes rendus*, tome XLI, 1855); ce sont précisément les points cherchés. Ainsi le problème est résolu.

La question précédente peut offrir de l'intérêt en analyse, car elle résout géométriquement une question d'algèbre, savoir : *Étant données deux équations à deux variables, l'une du troisième et l'autre du quatrième degré, dont on connaît sept systèmes de racines communes, on demande de former une équation du second degré entre les mêmes variables à laquelle satisfassent les cinq autres systèmes de racines communes aux deux équations proposées.*

IX.

Toutes les propositions, questions et constructions qui précèdent sont de celles qui se transformeront d'elles-mêmes par le principe de *dualité*. On pourra donc en conclure les solutions des deux questions suivantes :

1°. *Décrire la courbe de quatrième* classe, *déterminée par une tangente double et onze autres tangentes données.*

2°. *Décrire la courbe de quatrième* classe, *déterminée par quatorze tangentes.*

Je n'entrerai pas dans les détails faciles de cette transformation