

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LÉOPOLD KRONECKER

Démonstration de l'irréductibilité de l'équation $x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1 = 0$, où n désigne un nombre premier

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 1 (1856), p. 399-400.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__399_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

DÉMONSTRATION

DE

L'IRRÉDUCTIBILITÉ DE L'ÉQUATION $x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1 = 0$,

OU n DÉSIGNE UN NOMBRE PREMIER;

PAR M. LÉOPOLD KRONECKER.

Si l'expression $x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1$ était le produit de deux polynômes à coefficients entiers $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, on obtiendrait, en faisant $x = 1$, l'équation

$$n = \varphi(1) \cdot \psi(1).$$

Il résulte de là que l'un des nombres entiers $\varphi(1)$ et $\psi(1)$ doit être égal à ± 1 et l'autre à $\pm n$. Supposons que l'on ait $\varphi(1) = \pm 1$. Puis désignons par m_k un nombre entier positif tel que la congruence $k \cdot m_k \equiv 1 \pmod{n}$ soit satisfaite, k étant un quelconque des nombres $1, 2, 3, \dots, n-1$. Enfin soit ω une des racines de l'équation

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1 = 0,$$

qui font évanouir le facteur $\varphi(x)$. Cela posé, on aura l'égalité

$$\varphi(\omega^{k \cdot m_k}) = \varphi(\omega) = 0.$$

D'où l'on voit que l'expression $\varphi(x^{m_k})$ s'annule pour $x = \omega^k$, c'est-à-dire qu'elle contient le facteur $x - \omega^k$. Donc le produit

$$(I) \quad \varphi(x^{m_1}) \cdot \varphi(x^{m_2}) \dots \varphi(x^{m_{n-1}})$$

sera divisible par le produit

$$(x - \omega)(x - \omega^2) \dots (x - \omega^{n-1}),$$

c'est-à-dire par

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1.$$

Le produit est une fonction entière de x à coefficients entiers. Par

suite, en désignant cette fonction par $P(x)$, le quotient qu'on obtient en divisant $P(x)$ par $x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1$ sera lui-même une fonction entière de x à coefficients entiers. Or, si l'on fait $x = 1$, il résulte de là que le quotient $\frac{P(1)}{n}$ devrait être égal à un nombre entier; ce qui est impossible, car nous avons supposé que l'on a

$$\varphi(1) = \pm 1,$$

et par suite

$$P(1) = \varphi(1)^{n-1} = 1.$$

On voit aisément qu'on peut appliquer le même raisonnement à l'équation qui ne contient que les racines primitives de l'équation $x^n = 1$, si n est une puissance d'un nombre premier.

