

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES  
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

V.-A. LEBESGUE

Sur l'intégrale  $\int_0^1 \frac{1-\varphi^\alpha}{1-\varphi} d\varphi = \sum_1^\infty \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha} \right)$  où  $\alpha < 1$

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2<sup>e</sup> série*, tome 1 (1856), p. 377-378.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1856\\_2\\_1\\_\\_377\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__377_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR L'INTÉGRALE

$$\int_0^1 \frac{1-\varphi^\alpha}{1-\varphi} d\varphi = \sum_1^\infty \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha} \right) \quad \text{où } \alpha < 1;$$

PAR M. V. A. LEBESGUE.

PROBLÈME. *Si le nombre  $n$  est divisé successivement par les nombres 1, 2, 3, ...,  $n$ , pour un certain nombre  $h$  de diviseurs, le rapport du reste de la division au diviseur tombera au-dessous de  $\alpha < 1$ . Pour les autres diviseurs, ce rapport sera  $=$  ou  $>$   $\alpha$ . On demande la limite du rapport  $\frac{h}{n}$ , quand  $n$  devient de plus en plus grand.*

Dans l'article précédent, M. Lejeune-Dirichlet a trouvé pour cette limite

$$\lim \frac{h}{n} = \sum_{s=1}^{s=\infty} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha} \right).$$

Si on la met sous la forme

$$\lim \frac{h}{n} = 1 + \sum_2^\infty \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s-(1-\alpha)} \right],$$

en posant

$$1 - \alpha = \beta,$$

et à cause de

$$\frac{1}{s-\beta} = \frac{1}{s} \left( 1 + \frac{\beta}{s} + \frac{\beta^2}{s^2} + \frac{\beta^3}{s^3} + \dots \right),$$

on aura

$$(I) \quad \lim \frac{h}{n} = 1 - \beta \sum_2^\infty \frac{1}{s^2} - \beta^2 \sum_2^\infty \frac{1}{s^3} - \dots$$

Comme Euler a donné les sommes  $\sum_1^\infty \frac{1}{s^m}$  avec seize décimales, on trou-

vera facilement l'expression numérique de  $\lim \frac{h}{n}$ .

Quand on pose

$$\alpha = \frac{a}{p}, \quad \sum \frac{1}{s} = \sum \frac{p}{ps}, \quad \sum \frac{1}{s+\alpha} = \sum \frac{p}{ps+a},$$

on trouve

$$\sum_1^{\infty} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha} \right) = \frac{p}{a} + p \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{3p} \dots \right) \\ - p \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{p+a} + \frac{1}{2p+a} + \dots \right),$$

ou

$$\sum_1^{\infty} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha} \right) = \frac{p}{a} + p \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{a-1}}{1-x^p} dx;$$

mais

$$\frac{p}{a} = p \int_0^1 x^{a-1} dx;$$

donc enfin

$$\sum_1^{\infty} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha} \right) = p \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{a+p-1}}{1-x^p} dx = \int_0^1 \frac{1-\varphi^\alpha}{1-\varphi} d\varphi,$$

en posant  $x^p = \varphi$ .

Si l'on fait

$$I_\alpha = \int_0^1 \frac{1-\varphi^\alpha}{1-\varphi} d\varphi, \quad \alpha = \frac{a}{p},$$

on trouvera par les formules connues

$$(2) \quad I_\alpha = \frac{1}{\alpha} - \log 2p - \frac{\pi}{2} \cot \alpha\pi + 2 \sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} \cos \alpha \cdot 2s\pi \cdot \log \sin s \cdot \frac{\pi}{p}.$$

Cette formule suppose  $p$  impair; pour  $p$  pair, les limites de la somme  $\sum$  deviendraient 1 et  $\frac{p}{2} - 1$ .

De cette formule on tirerait encore

$$(3) \quad I_{1-\alpha} - I_\alpha = \frac{2\alpha-1}{\alpha(1-\alpha)} + \pi \cot \alpha\pi.$$

Mais la formule (1) paraît plus propre au calcul numérique, surtout quand  $p$  n'est pas un petit nombre.