JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LEJEUNE-DIRICHLET

Sur un problème relatif à la division

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 371-376.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__371_0>

SUR

UN PROBLÈME RELATIF A LA DIVISION;

PAR M. LEJEUNE-DIRICHLET.

[Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Berlin*, Janvier 1851.]

TRADUCTION DE M. J. HOÜEL.

Dans un précédent Mémoire [*], j'ai fait remarquer en passant que, si l'on divise un nombre entier n par tous ceux qui ne lui sont pas supérieurs, le cas où le reste est au-dessous de la moitié du diviseur se présente plus fréquemment que le cas contraire, où le reste égale ou surpasse cette moitié; et j'ai montré en même temps que le rapport du nombre des diviseurs qui se trouvent dans le premier cas au nombre total n des diviseurs converge, pour une valeur indéfiniment croissante de n, vers la limite $2 - \log 4 = 0,61370\ldots$ Il est, je pense, assez intéressant de généraliser ces recherches, et de déterminer le nombre h de ceux des diviseurs $1, 2, \ldots, p$ (p étant $\leqq n$), auxquels correspond un reste dont le rapport au diviseur soit inférieur à une fraction donnée α moindre que l'unité. En employant les crochets pour désigner le plus grand nombre entier contenu dans la quantité qu'ils renferment, de sorte que la différence $x - [x]$ soit toujours nulle ou positive, mais < 1; il est facile de voir que le diviseur s jouira ou ne jouira pas de la propriété en question, suivant que la différence

[*] *Sur la détermination des valeurs moyennes dans la théorie des nombres;* Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1849. — C'est le Mémoire ci-dessus.

$\left[\frac{n}{s}\right]-\left[\frac{n}{s}-\alpha\right]$ aura pour valeur $+1$ ou zéro. On a donc

$$h=\sum_{1}^{p}\left(\left[\frac{n}{s}\right]-\left[\frac{n}{s}-\alpha\right]\right)=\sum_{1}^{p}\left[\frac{n}{s}\right]-\sum_{1}^{p}\left[\frac{n}{s}-\alpha\right],$$

le signe de sommation étant ici, comme dans tout ce qui va suivre, relatif à s. Sous cette forme, l'expression de h est peu propre au calcul numérique, et ne fait rien savoir sur la manière dont varie h pour des valeurs croissantes de n et de p. Mais on peut lui faire prendre une forme appropriée à ce double but au moyen de la transformation suivante, qui est encore applicable dans une foule d'autres cas.

Soit $y=f(x)$ une fonction qui aille toujours en décroissant, tandis que la variable x croît depuis $x=\mu$ jusqu'à $x=p$. La fonction inverse $x=\mathrm{F}(y)$ présentera évidemment le même caractère, et ira toujours en décroissant pendant que la variable y croîtra depuis $y=f(p)$ jusqu'à $y=f(\mu)$. Supposons que les constantes μ et p soient des nombres entiers; faisons, pour abréger, $[f(\mu)]=\nu$, $[f(p)]=q$, et formons la suite

$$[f(\mu)],\quad [f(\mu+1)],\ldots,\quad [f(s)],\ldots,\quad [f(p)],$$

dont chaque terme est égal au suivant ou lui est supérieur : nous allons maintenant déterminer quels sont les termes de cette suite égaux à un nombre entier t pris arbitrairement entre q et ν. Pour cela, cherchons d'abord l'indice (lequel est complétement déterminé) du terme dont la valeur est $\geqq t$, tandis que le terme suivant est $< t$. On a ainsi

$$[f(s)]\geqq t,\quad [f(s+1)]<t,$$

ou, ce qui revient au même,

$$f(s)\geqq t,\quad f(s+1)<t,$$

d'où résulte, en vertu de l'hypothèse faite sur la fonction $f(x)$,

$$s\leqq \mathrm{F}(t),\quad s+1>\mathrm{F}(t+1),$$

c'est-à-dire

$$s=[\mathrm{F}(t)].$$

En appliquant ce résultat à t et à $t+1$, on voit que la valeur t ne convient qu'aux termes dont les indices s satisfont à la double condition

$$s > [F(t+1)] \quad \text{et} \quad s \leqq [F(t)].$$

Ce résultat doit être modifié à chacune des deux extrémités de la série : pour $t = \nu$, la première condition devient $s \geqq \mu$, et, pour $t = q$, il faut, au lieu de la seconde condition, prendre $s \leqq p$. Il est facile maintenant, en s'appuyant sur ce résultat, de transformer la somme

$$\sum_{\mu+1}^{p} [f(s)]\,\varphi(s),$$

où $\varphi(s)$ désigne une fonction tout à fait arbitraire, en réunissant d'abord tous les termes dans lesquels $[f(s)]$ a une seule et même valeur, et en ajoutant ensuite toutes les sommes partielles ainsi obtenues. Posant $\sum_{1}^{s} \varphi(s) = \psi(s)$, on obtient, pour la somme partielle dans laquelle $[f(s)]$ a une valeur t telle que $q < t < \nu$,

$$t\{\psi[F(t)] - \psi[F(t+1)]\},$$

et respectivement pour les valeurs répondant à $t = \nu$ et à $t = q$,

$$\nu\{\psi[F(\nu)] - \psi(\mu)\} \quad \text{et} \quad q\{\psi(p) - \psi[F(q+1)]\},$$

et par suite

$$\sum_{\mu+1}^{p} [f(s)]\,\varphi(s) = q\,\psi(p) - \nu\psi(\mu) + \sum_{q+1}^{\nu} \psi\,[F(s)].$$

Maintenant mettons à part les μ premiers termes de chacune des deux sommes dont se compose l'expression de h donnée plus haut, et appliquons aux termes restants la formule que nous venons de trouver : on a ainsi

$$\sum_{\mu+1}^{p} \left[\frac{n}{s}\right] = \sum_{q+1}^{\nu} \left[\frac{n}{s}\right] + pq - \mu\nu,$$

où

$$\left[\frac{n}{\mu}\right] = \nu \quad \text{et} \quad \left[\frac{n}{p}\right] = q,$$

et

$$\sum_{\mu+1}^{p}\left[\frac{n}{s} - \alpha\right] = \sum_{q'+1}^{\nu'}\left[\frac{n}{s+\alpha}\right] + pq' - \mu\nu',$$

où

$$\left[\frac{n}{\mu} - \alpha\right] = \nu' \quad \text{et} \quad \left[\frac{n}{p} - \alpha\right] = q'.$$

Posons, pour abréger,

$$\nu - \nu' = \delta, \quad q - q' = \varepsilon,$$

δ et ε ne pouvant avoir pour valeur que zéro ou l'unité; mettons la dernière somme sous la forme

$$\sum_{q'+1}^{\nu'}\left[\frac{n}{s+\alpha}\right] = \sum_{q+1}^{\nu}\left[\frac{n}{s+\alpha}\right] + \varepsilon\left[\frac{n}{q+\alpha}\right] - \delta\left[\frac{n}{\nu+\alpha}\right],$$

et substituons; il vient

$$h = \sum_{1}^{\mu}\left(\left[\frac{n}{s}\right] - \left[\frac{n}{s} - \alpha\right]\right) + \sum_{q+1}^{\nu}\left(\left[\frac{n}{s}\right] - \left[\frac{n}{s+\alpha}\right]\right)$$
$$+ \left(p - \left[\frac{n}{q+\alpha}\right]\right)\varepsilon - \left(\mu - \left[\frac{n}{\nu+\alpha}\right]\right)\delta.$$

Bien que la transformation que nous venons d'effectuer soit applicable à toutes les valeurs de p, elle n'est avantageuse que dans le cas où p est plus grand que $\sqrt{n}$, et, dans cette supposition, elle l'est le plus possible lorsque, comme nous allons le faire tout à l'heure, on choisit pour le nombre μ, laissé jusqu'ici arbitraire, un des nombres entiers voisins de $\sqrt{n}$. Alors, comme il est aisé de le voir, le nombre des divisions nécessaires pour la détermination exacte de h se réduit à peu près à $2\sqrt{n} - \frac{n}{p}$, tandis que la formule primitive exigeait p divisions.

Actuellement, en supposant que p soit d'un ordre plus élevé que $\sqrt{n}$, c'est-à-dire que $\frac{p}{\sqrt{n}}$ croisse en même temps que n au delà de toute limite, nous allons chercher à déterminer la valeur limite du rapport $\frac{h}{p}$ du nombre des diviseurs jouissant de la propriété en question au nombre total p des diviseurs. On peut, dans cette recherche, omettre dans l'expression de h tous les termes d'un ordre inférieur à celui de p. En négligeant le premier terme dont l'ordre ne peut surpasser celui de $\sqrt{n}$, ainsi que le quatrième qui ne peut contenir qu'un nombre fini d'unités, il vient

$$h = \sum_{q+1}^{\nu}\left(\left[\frac{n}{s}\right] - \left[\frac{n}{s+\alpha}\right]\right) + \left(p - \left[\frac{n}{q+\alpha}\right]\right)\varepsilon,$$

ou bien encore en supprimant les crochets, ce qui produit une variation d'un ordre ne pouvant évidemment surpasser celui de $\sqrt{n}$,

$$h = n\sum_{q+1}^{\nu}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha}\right) + \left(p - \frac{n}{q+\alpha}\right)\varepsilon.$$

Si nous remplaçons la limite supérieure ν par ∞, la somme subit l'accroissement $\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+1-\alpha} + \frac{1}{\nu+2} - \ldots < \frac{1}{\nu+1}$, lequel, multiplié par n, ne dépasse pas non plus l'ordre de $\sqrt{n}$. On a ainsi

$$\lim\frac{h}{p} = \frac{n}{p}\sum_{q+1}^{\infty}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha}\right) + \left(p - \frac{n}{q+\alpha}\right)\cdot\frac{\varepsilon}{p}.$$

Il faut maintenant distinguer deux cas : celui où le quotient $\frac{n}{p}$, qui est par hypothèse $\overline{\gtrless} 1$, croît au delà de toute limite, et celui où ce quotient reste fini. Dans le premier cas, le second terme converge vers zéro, tandis que la somme contenue dans le premier est à $\frac{\alpha}{q}$ dans un rapport ayant l'unité pour limite, de sorte que la limite de $\frac{h}{p}$ coïncide avec celle de $\frac{n}{pq}\,\alpha$, c'est-à-dire avec α.

Dans le second cas, où $\frac{n}{p}$ et par suite $q = \left[\frac{n}{p}\right]$ restent finis, il est utile de mettre sous une autre forme la valeur limite de $\frac{h}{p}$ donnée immédiatement par la dernière équation, en introduisant au lieu d'une somme unique la différence de deux autres sommes prises depuis $s = 1$ respectivement jusqu'à $s = \infty$ et $s = q$, puis en exprimant la première par une intégrale. Notre équation devient ainsi

$$\lim \frac{h}{p} = \frac{n}{p}\int_0^1 \frac{1-\varphi^\alpha}{1-\varphi}\,d\varphi - \frac{n}{p}\sum_1^q \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha}\right) + \left(1 - \frac{n}{p}\cdot\frac{1}{q+\alpha}\right)\varepsilon,$$

et cette intégrale, qui, pour toute valeur rationnelle de α, est exprimable en fonctions logarithmiques et circulaires, est une transcendante connue, et qui a été l'objet de nombreuses recherches. Si l'on fait en particulier $p = n$, il vient

$$q = 1, \quad q' = 0, \quad \varepsilon = 1,$$

et l'expression limite devient

$$\lim \frac{h}{p} = \int_0^1 \frac{1-\varphi^\alpha}{1-\varphi}\,d\varphi.$$

A l'aide des Tables de cette transcendante données par Gauss dans le Mémoire intitulé *Disq. gener. circa seriem, etc.*, on peut facilement déterminer la valeur de α à laquelle correspond une valeur donnée de l'intégrale, et l'on trouve par exemple, si l'on veut que le rapport du reste au diviseur soit au-dessous de α pour *la moitié* des diviseurs $1, 2, \ldots, n$, qu'il faut prendre $\alpha = 0{,}384686\ldots$