

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BAZIN

Démonstration d'un théorème sur les déterminants

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 19 (1854), p. 209-214.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19_209_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

DÉMONSTRATION

D'UN

THÉORÈME SUR LES DÉTERMINANTS;

PAR M. BAZIN,

Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Ce théorème, qui nous sera utile dans le Mémoire ci-après sur la composition des formes quadratiques à quatre variables, est l'extension d'un théorème donné par M. Gauss dans les *Disquisitiones arithmeticae*.

Soient deux systèmes

$$(S) \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, \dots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{(n-1)}, & \beta^{(n-1)}, & \gamma^{(n-1)}, \dots \end{pmatrix}$$

et

$$(S_1) \quad \begin{pmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, \dots \\ \alpha'_1, & \beta'_1, & \gamma'_1, \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{(n-1)}, & \beta_1^{(n-1)}, & \gamma_1^{(n-1)}, \dots \end{pmatrix},$$

chacun de n séries de m nombres entiers, m étant $> n$. Si ces deux systèmes (S) et (S₁) sont tels, que tout déterminant Δ_1 formé avec n colonnes verticales quelconques du système (S₁), par exemple

$$\begin{pmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, \dots, & \lambda_1 \\ \alpha'_1, & \beta'_1, & \gamma'_1, \dots, & \lambda'_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{(n-1)}, & \beta_1^{(n-1)}, & \gamma_1^{(n-1)}, \dots, & \lambda_1^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

ait un rapport constant et entier k avec le déterminant Δ formé au moyen des n colonnes correspondantes du système (S),

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \alpha, & \beta, & \gamma, \dots, & \lambda \\ \alpha', & \beta', & \gamma', \dots, & \lambda' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{(n-1)}, & \beta^{(n-1)}, & \gamma^{(n-1)}, \dots, & \lambda^{(n-1)} \end{array} \right\},$$

en sorte que $\Delta_i = k\Delta$, et si, en outre, le plus grand commun diviseur de tous les déterminants Δ , Δ' , Δ'' , etc., que l'on obtient en combinant n à n les différentes colonnes de (S) est égal à l'unité, on pourra trouver n^2 nombres entiers,

$$\begin{array}{cccc} M, & N, & P, \dots, & S, \\ M', & N', & P', \dots, & S', \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M^{(n-1)}, & N^{(n-1)}, & P^{(n-1)}, \dots, & S^{(n-1)}, \end{array}$$

qui soient tels, que l'on ait

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_i = M\alpha + N\alpha' + P\alpha'' + \dots + S\alpha^{(n-1)}, \\ \alpha'_i = M'\alpha + N'\alpha' + P'\alpha'' + \dots + S'\alpha^{(n-1)}, \\ \dots \\ \alpha_i^{(n-1)} = M^{(n-1)}\alpha + N^{(n-1)}\alpha' + P^{(n-1)}\alpha'' + \dots + S^{(n-1)}\alpha^{(n-1)}, \\ \beta_i = M\beta + N\beta' + P\beta'' + \dots + S\beta^{(n-1)}, \\ \beta'_i = M'\beta + N'\beta' + P'\beta'' + \dots + S'\beta^{(n-1)}, \\ \dots \\ \beta_i^{(n-1)} = M^{(n-1)}\beta + N^{(n-1)}\beta' + P^{(n-1)}\beta'' + \dots + S^{(n-1)}\beta^{(n-1)}, \\ \gamma_i = M\gamma + N\gamma' + P\gamma'' + \dots + S\gamma^{(n-1)}, \\ \dots \\ \text{etc.,} \end{array} \right.$$

et que leur déterminant soit égal au rapport constant k .

Démonstration. — Le plus grand commun diviseur des déterminants Δ , Δ' , Δ'' , etc., formés avec les diverses combinaisons des colonnes de (S) étant l'unité, on peut trouver des nombres entiers A , A' , A'' , etc., tels que

$$(2) \quad A\Delta + A'\Delta' + A''\Delta'' + \dots = \sum A\Delta = 1.$$

Considérons spécialement l'un de ces déterminants, par exemple celui des n lettres,

$$(3) \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, \dots, & \lambda, \\ \alpha', & \beta', & \gamma', \dots, & \lambda', \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{(n-1)}, & \beta^{(n-1)}, & \gamma^{(n-1)}, \dots, & \lambda^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

que nous représentons par Δ . Remarquons qu'il peut s'écrire sous la forme

$$\Delta = \alpha \frac{d\Delta}{d\alpha} + \beta \frac{d\Delta}{d\beta} + \gamma \frac{d\Delta}{d\gamma} + \dots + \lambda \frac{d\Delta}{d\lambda};$$

les dérivées $\frac{d\Delta}{d\alpha}, \frac{d\Delta}{d\beta}, \dots, \frac{d\Delta}{d\lambda}$ ne contiennent pas les n lettres $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$.

Si nous remplaçons, dans le système (3), $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots, \lambda_1$, le déterminant du nouveau système ainsi obtenu sera

$$\alpha_1 \frac{d\Delta}{d\alpha} + \beta_1 \frac{d\Delta}{d\beta} + \gamma_1 \frac{d\Delta}{d\gamma} + \dots + \lambda_1 \frac{d\Delta}{d\lambda}.$$

Effectuons le même changement dans les déterminants $\Delta', \Delta'',$ etc., c'est-à-dire remplaçons dans chacun d'eux les nombres de la première ligne horizontale par les nombres correspondants de (S_1) , et multiplions les déterminants ainsi déduits de $\Delta', \Delta'',$ etc., par les coefficients $A', A'',$ etc., de l'équation (2), nous aurons, en désignant par M la somme de tous ces produits,

$$M = \sum A \left(\alpha_1 \frac{d\Delta}{d\alpha} + \beta_1 \frac{d\Delta}{d\beta} + \gamma_1 \frac{d\Delta}{d\gamma} + \dots \right).$$

Posons de même

$$M' = \sum A \left(\alpha'_1 \frac{d\Delta}{d\alpha} + \beta'_1 \frac{d\Delta}{d\beta} + \gamma'_1 \frac{d\Delta}{d\gamma} + \dots \right),$$

$$M'' = \sum A \left(\alpha''_1 \frac{d\Delta}{d\alpha} + \beta''_1 \frac{d\Delta}{d\beta} + \gamma''_1 \frac{d\Delta}{d\gamma} + \dots \right),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$M^{(n-1)} = \sum A \left(\alpha^{(n-1)}_1 \frac{d\Delta}{d\alpha} + \beta^{(n-1)}_1 \frac{d\Delta}{d\beta} + \gamma^{(n-1)}_1 \frac{d\Delta}{d\gamma} + \dots \right).$$

De même que nous avons écrit Δ sous la forme $\alpha \frac{d\Delta}{d\alpha} + \beta \frac{d\Delta}{d\beta} + \dots$, nous aurions pu l'écrire sous la forme analogue $\alpha' \frac{d\Delta}{d\alpha'} + \beta' \frac{d\Delta}{d\beta'} + \dots$, et poser

$$\begin{aligned} N &= \sum A \left(\alpha_1 \frac{d\Delta}{d\alpha'} + \beta_1 \frac{d\Delta}{d\beta'} + \gamma_1 \frac{d\Delta}{d\gamma'} + \dots \right), \\ N' &= \sum A \left(\alpha'_1 \frac{d\Delta}{d\alpha'} + \beta'_1 \frac{d\Delta}{d\beta'} + \gamma'_1 \frac{d\Delta}{d\gamma'} + \dots \right), \\ &\dots \dots \dots \\ N^{(n-1)} &= \sum A \left(\alpha_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\alpha'} + \beta_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\beta'} + \gamma_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\gamma'} + \dots \right). \end{aligned}$$

Faisons de la même manière,

$$\begin{aligned} P &= \sum A \left(\alpha_1 \frac{d\Delta}{d\alpha''} + \beta_1 \frac{d\Delta}{d\beta''} + \gamma_1 \frac{d\Delta}{d\gamma''} + \dots \right), \\ P' &= \sum A \left(\alpha'_1 \frac{d\Delta}{d\alpha''} + \beta'_1 \frac{d\Delta}{d\beta''} + \gamma'_1 \frac{d\Delta}{d\gamma''} + \dots \right), \\ &\dots \dots \dots \\ P^{(n-1)} &= \sum A \left(\alpha_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\alpha''} + \beta_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\beta''} + \gamma_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\gamma''} + \dots \right); \\ S &= \sum A \left(\alpha_1 \frac{d\Delta}{d\alpha^{(n-1)}} + \beta_1 \frac{d\Delta}{d\beta^{(n-1)}} + \gamma_1 \frac{d\Delta}{d\gamma^{(n-1)}} + \dots \right), \\ S' &= \sum A \left(\alpha'_1 \frac{d\Delta}{d\alpha^{(n-1)}} + \beta'_1 \frac{d\Delta}{d\beta^{(n-1)}} + \gamma'_1 \frac{d\Delta}{d\gamma^{(n-1)}} + \dots \right), \\ &\dots \dots \dots \\ S^{(n-1)} &= \sum A \left(\alpha_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\alpha^{(n-1)}} + \beta_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\beta^{(n-1)}} + \gamma_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\gamma^{(n-1)}} + \dots \right). \end{aligned}$$

Les n^2 nombres $M, N, P, \dots, M', N', P', \dots$, jouissent de la propriété énoncée. En effet, on a, en désignant par θ une lettre quelconque de (S),

$$\begin{aligned} &M\theta + N\theta' + P\theta'' + \dots + S\theta^{(n-1)} \\ &= \theta \sum A \left(\alpha_1 \frac{d\Delta}{d\alpha} + \beta_1 \frac{d\Delta}{d\beta} + \gamma_1 \frac{d\Delta}{d\gamma} + \dots \right) \\ &+ \theta' \sum A \left(\alpha_1 \frac{d\Delta}{d\alpha'} + \beta_1 \frac{d\Delta}{d\beta'} + \gamma_1 \frac{d\Delta}{d\gamma'} + \dots \right), \\ &+ \theta'' \sum A \left(\alpha_1 \frac{d\Delta}{d\alpha''} + \beta_1 \frac{d\Delta}{d\beta''} + \gamma_1 \frac{d\Delta}{d\gamma''} + \dots \right) \\ &\dots \dots \dots \\ &+ \theta^{(n-1)} \sum A \left(\alpha_1 \frac{d\Delta}{d\alpha^{(n-1)}} + \beta_1 \frac{d\Delta}{d\beta^{(n-1)}} + \gamma_1 \frac{d\Delta}{d\gamma^{(n-1)}} + \dots \right). \end{aligned}$$

Faisant passer les coefficients θ , θ' , θ'' , etc., dans les parenthèses, il vient

$$= \sum A \left\{ \begin{array}{l} M\theta + N\theta' + P\theta'' + \dots + S\theta^{(n-1)} \\ \alpha_1 \left(\theta \frac{d\Delta}{d\alpha} + \theta' \frac{d\Delta}{d\alpha'} + \theta'' \frac{d\Delta}{d\alpha''} + \dots \right) \\ + \beta_1 \left(\theta \frac{d\Delta}{d\beta} + \theta' \frac{d\Delta}{d\beta'} + \theta'' \frac{d\Delta}{d\beta''} + \dots \right) + \dots \end{array} \right\}.$$

Mais, d'après l'énoncé,

$$\begin{aligned} \theta \frac{d\Delta}{d\alpha} + \theta' \frac{d\Delta}{d\alpha'} + \theta'' \frac{d\Delta}{d\alpha''} + \dots &= \frac{1}{k} \left(\theta_1 \frac{d\Delta_1}{d\alpha_1} + \theta'_1 \frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1} + \theta''_1 \frac{d\Delta_1}{d\alpha''_1} + \dots \right), \\ \theta \frac{d\Delta}{d\beta} + \theta' \frac{d\Delta}{d\beta'} + \theta'' \frac{d\Delta}{d\beta''} + \dots &= \frac{1}{k} \left(\theta_1 \frac{d\Delta_1}{d\beta_1} + \theta'_1 \frac{d\Delta_1}{d\beta'_1} + \theta''_1 \frac{d\Delta_1}{d\beta''_1} + \dots \right), \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\theta_1 \frac{d\Delta_1}{d\alpha_1} + \theta'_1 \frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1} + \dots, \quad \theta_1 \frac{d\Delta_1}{d\beta_1} + \theta'_1 \frac{d\Delta_1}{d\beta'_1} + \dots,$$

désignant ce que deviennent les déterminants,

$$\theta \frac{d\Delta}{d\alpha} + \theta' \frac{d\Delta}{d\alpha'} + \dots, \quad \theta \frac{d\Delta}{d\beta} + \theta' \frac{d\Delta}{d\beta'} + \dots,$$

lorsque l'on y remplace chaque lettre par la lettre correspondante de (S_1) . On a donc

$$= \frac{1}{k} \sum \left\{ \begin{array}{l} M\theta + N\theta' + P\theta'' + \dots + S\theta^{(n-1)} \\ \alpha_1 \left(\theta_1 \frac{d\Delta_1}{d\alpha_1} + \theta'_1 \frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1} + \theta''_1 \frac{d\Delta_1}{d\alpha''_1} + \dots \right) \\ + \beta_1 \left(\theta_1 \frac{d\Delta_1}{d\beta_1} + \theta'_1 \frac{d\Delta_1}{d\beta'_1} + \theta''_1 \frac{d\Delta_1}{d\beta''_1} + \dots \right) + \dots \end{array} \right\},$$

ou bien

$$\begin{aligned} &M\theta + N\theta' + P\theta'' + \dots + S\theta^{(n-1)} \\ &= \frac{\theta_1}{k} \sum \left(\alpha_1 \frac{d\Delta_1}{d\alpha_1} + \beta_1 \frac{d\Delta_1}{d\beta_1} + \gamma_1 \frac{d\Delta_1}{d\gamma_1} + \dots \right) \\ &+ \frac{\theta'_1}{k} \sum \left(\alpha_1 \frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1} + \beta_1 \frac{d\Delta_1}{d\beta'_1} + \gamma_1 \frac{d\Delta_1}{d\gamma'_1} + \dots \right) \\ &+ \frac{\theta''_1}{k} \sum \left(\alpha_1 \frac{d\Delta_1}{d\alpha''_1} + \beta_1 \frac{d\Delta_1}{d\beta''_1} + \gamma_1 \frac{d\Delta_1}{d\gamma''_1} + \dots \right) + \dots \end{aligned}$$

D'après les propriétés connues des déterminants, le coefficient de $\frac{\theta_1}{k}$

est égal à $\sum A \Delta_i$, ceux de $\frac{\theta'_1}{k}$, $\frac{\theta''_1}{k}$, etc., sont nuls; donc

$$M\theta + N\theta' + P\theta'' + \dots + S\theta^{(n-1)} = \frac{\theta_1}{k} \sum A \Delta_i.$$

Mais

$$\frac{\theta_1}{k} \sum A \Delta_i = \theta_1 \sum A \frac{\Delta_i}{k} = \theta_1 \sum A \Delta = \theta_1;$$

on a donc, enfin,

$$M\theta + N\theta' + P\theta'' + \dots + S\theta^{(n-1)} = \theta_1.$$

Les autres équations (1) se démontreraient de la même manière. En se reportant à ces équations, on voit facilement, d'après leur forme, qu'un déterminant quelconque formé avec n colonnes de (S_i) est égal au déterminant composé avec les colonnes correspondantes de (S) , multiplié par le déterminant des nombres M, N, P , etc.; ce dernier est donc égal au rapport constant k des deux séries de déterminants : ce qui démontre la seconde partie de l'énoncé.

