

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM THOMSON

Deux mémoires sur la théorie dynamique de la chaleur

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 17 (1852), p. 209-252.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1852_1_17__209_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Deux Mémoires sur la théorie dynamique de la chaleur;

PAR M. WILLIAM THOMSON,

Professeur à l'Université de Glasgow, etc.

(Traduits de l'anglais.)

I.

Mémoire sur la théorie dynamique de la chaleur, contenant quelques résultats numériques déduits de l'équivalent de l'unité de chaleur de M. Joule, et des observations de M. Regnault sur la vapeur d'eau.

(Lu à la Société royale d'Édimbourg le 19 mars 1851, et extrait des *Transactions* de cette Société, vol. XX, deuxième partie.)

NOTICE HISTORIQUE.

1. Au moyen de l'expérience qui consiste à produire la fusion de deux morceaux de glace en les frottant l'un contre l'autre, sir Humphrey Davy a établi la proposition suivante : « Les phénomènes de répulsion ne dépendent nullement de l'existence d'un » fluide élastique particulier; en d'autres termes, le calorique n'existe pas; » et il en a conclu que la chaleur consiste en un certain mouvement des particules des corps. « Pour distinguer ce mouvement des autres, on l'a appelé mouvement RÉPULSIF, ayant » en vue de désigner par là la cause de la sensation » et des phénomènes d'expansion et de pression expansive « produits par la chaleur [*]. »

2. La théorie dynamique de la chaleur, établie de la sorte par Davy, a été étendue à la chaleur rayonnante par suite de la découverte de certains phénomènes, notamment de ceux relatifs à la polarisation de la chaleur rayonnante; découverte qui donne un

[*] Les phrases comprises entre des guillemets sont extraites du premier travail de Davy, intitulé : *Essai sur la chaleur, la lumière et les combinaisons de la lumière*, lequel a été publié en 1799 dans *Contributions to physical and medical knowledge principally from the west of England, collected by Thomas Beddoes*, et réimprimé dans l'édition qu'a donnée le Dr Davy des Œuvres de son frère (vol. II, Lond., 1836).

haut degré de probabilité à cette hypothèse, que la chaleur qui se propage dans le vide ou dans des substances diathermales, consiste en ondes de vibrations transversales dans un milieu universellement répandu.

5. Les découvertes récentes de MM. Mayer et Joule [*] sur la génération de la chaleur au moyen du frottement des fluides en mouvement, et au moyen de l'excitation magnéto-électrique des courants galvaniques, suffiraient à elles seules et séparément pour démontrer la nature immatérielle de la chaleur, et offriraient ainsi, s'il était nécessaire, une confirmation complète des idées de Davy.

4. Si l'on considère comme établi que la chaleur n'est pas une substance, mais une forme dynamique sous laquelle se manifeste un effet mécanique, on concevra qu'il doit y avoir un certain rapport d'équivalence entre le travail mécanique et la chaleur, comme il en existe entre la cause et l'effet. L'énoncé de ce principe paraît avoir été publié pour la première fois par M. Mayer dans le travail intitulé : *Bemerkungen über die kräfte der unbelebten natur* [**]. Dans ce travail, qui contient d'ailleurs quelques idées exactes sur la faculté de transformer de la chaleur en effet mécanique, et réciproquement, l'auteur essaye d'établir en chiffres l'équivalent mécanique d'une quantité donnée de chaleur, mais en se fondant sur une fausse analogie qu'il établit entre la chute d'un corps grave et la diminution de volume d'une substance continue. Dans un Mémoire *sur les effets calorifiques produits par l'action magnéto-électrique, et sur la valeur mécanique de la chaleur* [***], publié à peu près quatorze mois plus tard, M. Joule, de Manchester, établit très-clairement les conséquences relatives à la faculté de transformer de la chaleur en effet mécanique, et réciproquement, qui découlent de l'hypothèse que la chaleur n'est pas une substance, mais bien un état de mouvement; puis, s'appuyant sur des principes incontestables, il cherche quelle peut être la relation numérique qui existe entre la chaleur et la puissance mécanique. Dans le cours de ses recherches, l'auteur démontre par l'expérience le fait suivant : toutes les fois qu'il y a production de chaleur au moyen d'une action purement mécanique, et sans accompagnement d'aucun autre effet, la même quantité de travail produit toujours la même quantité de chaleur, soit que cette production de chaleur soit le résultat d'un frottement de fluide, soit qu'elle provienne de l'excitation magnéto-inductrice d'un courant galvanique; puis il détermine la quantité de travail, en livres élevées à 1 pied, néces-

[*] En mai 1842, M. Mayer annonça, dans les *Annales* de MM. Wöhler et Liebig, qu'au moyen d'agitations produites dans l'eau, il en avait élevé la température de 12 à 13 degrés centigrades. En août 1843, M. Joule fit connaître à l'Association britannique que « il se développait de la chaleur, » quand on faisait passer de l'eau dans des tubes de petit diamètre; qu'avec un travail mécanique capable d'élever 770 livres anglaises à 1 pied de hauteur, il avait produit dans 1 livre d'eau une élévation de température de 1 degré; et qu'il y a production de chaleur quand on emploie du travail mécanique à faire tourner une machine magnéto-électrique ou électromagnétique. » (Voir son travail *sur les effets calorifiques de l'électricité magnétique et la valeur mécanique de la chaleur*. *Philosophical Magazine*, vol. XXIII, 1843.)

[**] *Annales* de MM. Wöhler et Liebig, 1842.

[***] *Association britannique*, août 1843, et *Philosophical Magazine*, septembre 1843.

saire pour produire une unité de chaleur, quantité qu'il appelle *équivalent mécanique de la chaleur*. Depuis cette première publication, M. Joule a fait de nombreuses expériences pour déterminer avec autant d'exactitude que possible l'équivalent de la chaleur ainsi défini, et il en a rendu compte dans ses différentes communications à l'Association britannique, au *Philosophical Magazine*, à la Société royale de Londres, et à l'Institut de France.

5. Les travaux de MM. Rankine et Clausius ont récemment apporté d'importantes additions à la théorie dynamique de la chaleur. Au moyen de déductions analytiques analogues aux raisonnements de Carnot sur la puissance motrice de la chaleur, mais fondées sur un axiome directement contraire au principe fondamental de ce dernier, ces savants sont arrivés à quelques conséquences remarquables. Leurs recherches ont été publiées, l'année passée, dans les *Transactions* de cette Société et dans les *Annales de Poggendorff*.

Dans les développements qui vont suivre, nous rapporterons de ces recherches celles qui ont le plus de connexité avec le travail que nous soumettons à l'appréciation de la Société royale.

[Addition faite par l'auteur le 29 juin 1852.] Je prends cette occasion de citer le titre suivant : *Ueber die erhaltung der kraft*, von D^r H. Helmholtz (Berlin, 1847), comme celui d'un ouvrage auquel j'aurais renvoyé, en indiquant des applications du principe général de l'effet mécanique, surtout aux questions relatives aux courants électriques, dans ce Mémoire et ailleurs, si j'avais été assez heureux pour connaître plus tôt cet admirable ouvrage, que je n'ai malheureusement pas eu dans les mains avant le mois de janvier 1852.

6. Dans ce Mémoire, nous avons trois objets en vue :

1^o. Montrer quelles modifications doivent subir les conclusions auxquelles sont arrivés Carnot et tous ceux qui ont suivi sa méthode de raisonnement sur la puissance de la chaleur, quand on adopte l'hypothèse de la *Théorie dynamique*, contraire au principe fondamental de Carnot ;

2^o. Faire ressortir le sens qu'on doit attribuer, dans la *Théorie dynamique*, aux résultats numériques déduits des observations de M. Regnault sur la vapeur d'eau, que l'auteur du présent travail a communiqués à la Société, il y a deux ans, en rendant compte de la théorie de Carnot [*] ; et faire voir qu'on peut établir une théorie complète de la puissance dynamique de la chaleur, dans les limites de température des expériences, en partant, d'une part, de ces résultats numériques (naturellement susceptibles de correction, quand on possédera des données plus exactes sur la densité de la vapeur d'eau saturée), et, d'autre part, de l'*équivalent de l'unité thermique* de M. Joule ;

3^o. Signaler quelques relations remarquables, qui établissent une liaison entre les

[*] *Rapport sur la théorie de Carnot* (Account of Carnot's Theory of the Motive power of heat, etc.). *Transactions de la Société royale d'Édimbourg*, vol. XVI, cinquième partie.

propriétés physiques de toutes les substances, et que nous avons obtenues au moyen d'un raisonnement analogue à celui de Carnot, mais fondé en partie sur le principe contraire de la *Théorie dynamique*.

PREMIÈRE PARTIE.

Principes fondamentaux de la théorie de la puissance motrice de la chaleur.

7. Conformément à un principe évident, introduit d'ailleurs pour la première fois par Carnot, dans la théorie de la puissance motrice de la chaleur, tout effet mécanique, produit dans une opération quelconque, ne peut être considéré comme tirant son origine d'une source purement thermique, que si tous les objets matériels mis en œuvre se retrouvent, à la fin de l'opération, exactement dans les mêmes circonstances physiques et mécaniques où ils étaient au commencement. Cette condition est remplie à chaque instant dans quelques machines thermodynamiques, telles que, par exemple, l'*aimant flottant* de Faraday ou le *wheel and axle* de Barlow, construites pour fonctionner avec un mouvement uniforme de rotation, au moyen d'un courant produit d'une manière continue par la chaleur communiquée à deux métaux en contact; il en est de même pour l'appareil rotatoire thermo-électrique de Marsh, qu'on a actuellement construit et mis en action.

D'un autre côté, dans toutes les machines thermodynamiques fondées sur l'action électrique dans lesquelles on emploie des courants galvaniques discontinus ou des barres de fer doux dans un état variable de magnétisation, dans toutes les machines fondées sur les expansions et contractions alternatives de certaines substances, dans toutes ces machines, disons-nous, il y a bien, il est vrai, des changements dans l'état physique des objets matériels employés; mais, pour rester dans les termes rigoureux du principe posé plus haut, il faut que les changements soient strictement périodiques.

Dans de telles machines, la série des mouvements exécutés pendant une période à la fin de laquelle tous les objets matériels sont replacés exactement dans les mêmes conditions qu'au commencement, constitue ce que nous appellerons un *cycle complet* d'opérations.

Dans ce qui va suivre, toutes les fois que nous écrirons, sans autre qualification, les mots *travail exécuté*, *effet mécanique produit*, il demeure bien entendu que nous voudrions désigner par là le travail produit, soit pendant un temps quelconque dans une machine dont les conditions de fonctionnement sont invariables, soit pendant la durée d'un cycle complet ou d'un nombre quelconque de cycles complets, dans une machine périodique.

8. Dans de telles machines, ce que nous nommerons *source de chaleur* sera toujours un corps chaud, à une température constante, qui sera mis en contact avec quelqu'une des parties de la machine; et lorsqu'il sera question de certaine portion de la machine dont on empêchera la température de s'élever (ce qui ne peut s'effectuer qu'en soutirant toute la chaleur qui y est déposée), nous supposerons toujours que cet effet est

obtenu en mettant en contact avec cette partie de la machine, un corps froid à une température constante, et que nous appellerons *réfrigérant*.

9. Toute la théorie de la puissance dynamique de la chaleur est fondée sur les deux propositions suivantes dues respectivement à M. Joule, d'une part, et à Carnot et M. Clausius, d'autre part.

Première proposition (M. Joule). — Lorsque des quantités égales d'effet mécanique sont produites par des causes purement thermiques, quel que soit d'ailleurs le mode d'opérer, des quantités égales de chaleur sont anéanties; et réciproquement, il y a production de quantités égales de chaleur, toutes les fois que des quantités égales d'effet mécanique sont dépensées en effets purement thermiques.

Deuxième proposition (Carnot et M. Clausius). — Si une machine est disposée de telle sorte que, lorsqu'on la fait fonctionner en sens inverse, toutes les actions physiques et dynamiques, existant dans ses divers organes, se présentent exactement dans un état inverse, cette machine produit autant d'effet mécanique qu'il est possible d'en obtenir, avec une quantité donnée de chaleur, d'une machine thermodynamique fonctionnant dans les mêmes conditions de température du *réfrigérant* et de la *source de chaleur* [*].

10. Au moyen de la démonstration suivante, on peut faire voir que la première de ces propositions est renfermée implicitement dans le *Principe général de l'effet mécanique*, et la mettre ainsi à l'abri de toute objection.

11. Quel que soit l'effet direct au moyen duquel se manifeste l'absorption ou l'émission d'une certaine quantité de chaleur par un corps, la mesure de cette quantité peut toujours être fondée sur la détermination du poids d'une certaine substance-type qui serait élevée par cette chaleur ou par toute autre quantité égale, d'une température-type à une autre température; puisque, en effet, deux quantités de chaleur doivent être considérées comme égales quand elles peuvent élever deux poids égaux d'une même substance d'une même température quelconque à une même température plus haute que la première. Cela posé, conformément aux principes de la théorie dynamique de la chaleur, on ne peut élever la température d'une substance qu'en agissant extérieurement sur elle de manière à produire un accroissement dans ses mouvements thermiques intérieurs, et en produisant, en outre, dans les distances réciproques et les arrangements des molécules, les modifications qui accompagnent les changements de température. Le travail nécessaire pour produire la totalité de cet effet mécanique est évidemment proportionnel à la quantité de la substance élevée d'une certaine température-type à une autre température-type; dès lors, lorsqu'un corps, un groupe de corps, ou une machine *cède* ou *absorbe* de la chaleur, en réalité elle *produit* ou *dépense* un certain effet mécanique dont la valeur est précisément proportionnelle à la quantité de chaleur cédée ou absorbée. D'un autre côté, le travail provenant de l'action des forces extérieures sur cette machine, le travail dû aux forces moléculaires de ses organes, et

[*] Pour bien comprendre le sens de cette proposition, voir les nos 15 et 21 du présent Mémoire.

enfin la quantité de laquelle est diminuée la moitié de la force vive des mouvements thermiques de toutes ses parties, ces quantités doivent être en somme égales à l'effet mécanique produit au moyen de cette machine, et par conséquent égales à l'équivalent mécanique de la quantité de chaleur cédée par elle (quantité qui sera positive ou négative selon que la somme des différents termes sera elle-même positive ou négative). Si donc l'on fait en sorte qu'il n'y ait dans le corps ni changements moléculaires, ni variation dans la température, ou bien si, considérant un cycle complet d'opérations, on s'arrange pour ramener exactement au même état qu'au commencement, toutes les conditions physiques ainsi que la température du corps, la deuxième et la troisième des espèces de travail énumérées plus haut disparaîtront; d'où l'on conclut, suivant le cas, que la chaleur émise par le corps sera l'équivalent thermal du travail opéré sur lui par les forces extérieures, ou que la chaleur absorbée par le corps sera l'équivalent thermal du travail exécuté par lui à l'encontre des forces extérieures, proposition qu'il s'agissait de démontrer.

12. La démonstration de la deuxième proposition est fondée sur l'axiome suivant :

Il est impossible, au moyen d'agents matériels inanimés, de tirer aucun effet mécanique d'une substance quelconque, en abaissant sa température au-dessous de la température des corps qui sont le plus froids, parmi tous ceux qui environnent cette substance [*].

13. Pour démontrer la deuxième proposition, appelons A et B deux machines thermodynamiques, dont l'une B satisfait à la condition énoncée dans ladite proposition; et supposons que la machine A puisse produire, au moyen d'une quantité donnée de chaleur, une plus grande somme de travail que B, lorsque les températures de la source et du réfrigérant sont respectivement égales dans les deux machines. Cela posé, en raison de la condition particulière dans laquelle B se trouve placé, on pourra faire fonctionner cette machine en sens inverse, et faire qu'elle restitue à la source telle quantité de chaleur que l'on voudra, au moyen d'une dépense de travail mécanique égale à la quantité de travail qu'on obtiendrait, d'une même quantité de chaleur, pendant la marche directe. Si donc l'on s'arrange, ce que nous supposons possible, pour que B, dans sa marche inverse, restitue à la source de A toute la chaleur qui en a été extraite pendant la durée d'une certaine période de fonctionnement de cette dernière machine, il y aura évidemment moins de travail dépensé par B, qu'il n'en a été produit par A dans cette même période. Il en résulte que, si l'on continue alternativement ou simultanément, la même série d'opérations consistant à faire fonctionner A dans le sens direct et B dans le sens inverse, il y aura production indéfinie de travail mécanique sans aucune dépense de chaleur de la part de la source; par suite, conformément à la première proposition, il y aura plus de chaleur enlevée au réfrigérant, pendant le fonctionnement inverse de B, qu'il y en a été déposé pendant le fonctionnement direct de A.

[*] Si l'on contestait la vérité de cet axiome, il faudrait admettre qu'il est possible de construire une machine auto-motrice produisant un effet mécanique au moyen du refroidissement successif de la terre et de la mer, et cela sans autre limite que l'épuisement total non-seulement de la chaleur terrestre, mais encore de celle de l'univers entier.

Dès lors il devient évident que A pourra employer une partie de son travail à faire fonctionner B en sens inverse, et qu'on aura ainsi réalisé un système auto-moteur. D'un autre côté, comme dans ce système la source ne reçoit ni ne cède aucune quantité de chaleur, tous les corps environnants, à l'exception du réfrigérant, pourront prendre la température de la source elle-même, quelle qu'elle soit, sans rien changer aux conditions que nous avons admises en principe. Nous aurons donc ainsi une machine automotrice capable de soutirer constamment de la chaleur pour la convertir en effet mécanique d'un corps environné d'autres corps dont la température est supérieure à la sienne. Ce résultat étant contraire à notre axiome, nous devons conclure qu'il est impossible que A produise plus d'effet mécanique que B, avec la même quantité de chaleur extraite de la même source. Conséquemment, avec une source de chaleur et un réfrigérant à des températures données, nulle machine n'extraira d'une quantité donnée de chaleur, une plus grande somme d'effet mécanique que n'en produirait tout système satisfaisant aux conditions de réciprocité définies dans le cours du n° 9; proposition qu'il s'agissait de démontrer.

14. Carnot fut le premier qui énonça cette proposition, la donnant comme le critérium de la perfection dans les machines thermodynamiques [*]. La démonstration qu'il en a donnée, procédant par l'absurde, n'est qu'une démonstration de ce théorème, que si on la rejette, on est forcé à admettre la possibilité de construire une machine auto-motrice qui produirait indéfiniment du travail mécanique sans consommation d'aucune matière, sans l'intervention d'une source de chaleur ou de tout autre agent physique; mais cette démonstration est fondée sur l'hypothèse que, dans un *cycle complet d'opérations*, la substance intermédiaire (*medium*) restitue exactement la quantité de chaleur qu'elle a reçue. Carnot lui-même exprime [**] un doute marqué sur l'exactitude de cette hypothèse, considérée comme un principe général, et (comme nous avons essayé de le faire voir ci-dessus) l'on peut regarder comme parfaitement certain que cette hypothèse est fausse là où il y a, après tout, du travail perdu ou gagné dans les opérations. Dès lors on doit admettre que la démonstration originale de Carnot est tout à fait insuffisante, mais on ne peut pas en conclure que la proposition elle-même soit inexacte. Cette proposition, au contraire, nous a paru présenter un tel caractère de probabilité, que nous l'avons adoptée, conjointement avec le principe de M. Joule (dont l'existence fait pécher par la base la démonstration de Carnot), pour en faire le point de départ de certaines recherches sur la puissance motrice de la chaleur employée dans les machines à air et à vapeur d'eau, dans des limites finies de la température; recherches qui nous ont conduit, il y a un an environ, à des résultats dont nous donnons la substance dans la deuxième partie du travail que nous soumettons aujourd'hui à l'appréciation de la Société royale.

Ce ne fut qu'au commencement de cette année que nous trouvâmes la démonstration exposée ci-dessus, au moyen de laquelle nous établissons la vérité de la propo-

[*] Voir le *Rapport sur la théorie de Carnot*, n° 15.

[**] Voir l'ouvrage de Carnot, page 37, ou le *Rapport, etc.*, n° 6.

sition de Carnot, en nous appuyant sur l'axiome du n° 12, qui sera, nous le pensons, généralement admis. Ce que nous venons de dire n'a pas pour but de réclamer la priorité en notre faveur. Le mérite d'avoir, le premier, établi la proposition sur des principes exacts appartient tout entier à M. Clausius, qui en publia la démonstration, au mois de mai de l'année dernière, dans la deuxième partie de son travail [*] sur la puissance motrice de la chaleur. Qu'il nous soit permis d'ajouter que nous avons donné la démonstration ci-dessus, exactement comme elle s'était présentée à notre esprit, avant de savoir que M. Clausius eût énoncé ou démontré ladite proposition. Le raisonnement de M. Clausius est fondé sur l'axiome suivant :

Il est impossible qu'une machine auto-motrice, sans l'aide d'aucun agent extérieur, fasse passer de la chaleur d'un corps dans un autre corps ayant une température plus élevée.

Il est facile de faire voir que cet axiome et le nôtre, n° 12, quoique différents dans la forme, sont, au demeurant, la conséquence l'un de l'autre. D'ailleurs, dans les deux démonstrations, le raisonnement est rigoureusement semblable à celui de Carnot.

13. Pour établir une théorie complète de la chaleur, il faudrait faire l'application des deux propositions précédentes à toutes les méthodes possibles de produire des effets mécaniques au moyen d'actions thermiques [**]. Jusqu'à présent cette application n'a pas été faite à la méthode électrique, du moins en ce qui concerne le critérium de perfection renfermé dans la deuxième proposition, et probablement elle ne pourra être faite d'une manière absolue; mais l'application à cette méthode de la première proposition a été étudiée à fond par M. Joule dans ses recherches sur les effets calorifiques dus à l'action magnéto-électrique (*calorific effects of magneto-electricity*); et c'est sur cette application qu'il a fondé l'un de ses procédés pour déterminer par l'expérience l'équivalent mécanique de la chaleur. Ainsi, d'une part, il résulte, comme conséquence des lois [***] par lui découvertes sur la chaleur engendrée dans les circuits galvaniques, ce fait que, lorsqu'une certaine quantité de travail mécanique est employée à produire

[*] Voir les *Annales de Poggendorff*, citées plus haut.

[**] « On connaît actuellement deux, mais seulement deux, méthodes distinctes d'obtenir du travail mécanique au moyen de la chaleur : l'une d'elles est fondée sur les changements de volume que subissent les corps exposés à l'action de la chaleur; dans l'autre on emploie l'intermédiaire de l'électricité. » (*Rapport sur la théorie de Carnot*, n° 4; *Transactions*, vol. XVI, cinquième partie.)

[***] Ces lois peuvent s'énoncer ainsi : Dans une portion fixe quelconque de circuit, la quantité de chaleur développée dans un temps donné est proportionnelle au carré de la mesure du courant; et quand on considère différentes parties fixes d'un seul circuit, ou de plusieurs circuits traversés par des courants égaux, les quantités de chaleur développées dans des temps égaux sont entre elles comme les résistances de ces parties.

M. Joule a communiqué à la Société royale, le 17 décembre 1840, un travail qui contient la démonstration de ces lois, avec d'autres propositions concernant les relations réciproques des agents chimiques et thermiques. (Voir dans le *Philosophical Magazine*, vol. XVIII, page 308, l'extrait qui renferme l'exposé des lois citées.) Ce travail, qu'on n'a pas voulu imprimer dans les *Transactions*, a été publié plus tard dans le *Philosophical Magazine* en octobre 1841, vol. XIX, page 260.

un courant galvanique, au moyen d'une machine magnéto-électrique, la chaleur engendrée dans une longueur donnée de la portion fixe du circuit est proportionnelle à la totalité du travail dépensé; et, d'autre part, en démontrant par l'expérience qu'il se dégage, dans une portion mobile quelconque du circuit, exactement la même quantité de chaleur que si cette portion du circuit était à l'état de repos et était traversée par un courant de la même force, M. Joule est logiquement amené à tirer les deux conclusions suivantes :

1°. On peut engendrer de la chaleur en faisant fonctionner (*by working*) une machine magnéto-électrique.

2°. Si le courant ainsi créé est mis dans l'impossibilité de produire autre chose que des effets thermaux, la quantité totale de chaleur développée est, dans toutes les circonstances, exactement proportionnelle à la quantité de travail dépensée.

16. En outre, M. Joule cite cette découverte admirable de M. Peltier, que du froid est produit par le passage d'un courant électrique du bismuth dans l'antimoine, pour faire voir comment on peut s'en servir pour démontrer que : Lorsqu'un courant électrique est produit d'une manière continue, au moyen d'une source purement thermique, les quantités de chaleur développées par l'électricité dans les différentes parties homogènes du circuit ne sont que des compensations à une perte de chaleur qui a lieu aux endroits de contact des métaux différents; ou bien, que lorsque l'effet du courant est entièrement thermal, il doit y avoir exactement autant de chaleur émise par les portions du circuit qui ne sont pas affectées par la source, qu'il en a été soutiré à la source.

17. Nous ajouterons enfin [*] : Lorsqu'un courant, dont l'existence est due à une action thermique, fera fonctionner une machine et produira un effet mécanique, il y aura *moins* de chaleur émise par les portions du circuit qui ne sont pas affectées par la source qu'il n'en a été dépensé par la source, et la différence entre ces deux quantités sera précisément équivalente à l'effet mécanique qui aura été produit. Il en doit être ainsi, puisque M. Joule démontre par l'expérience le fait suivant : Un courant provenant d'une source quelconque, et faisant mouvoir une machine, produit dans cette machine *moins* de chaleur qu'il n'en produirait dans un fil fixe offrant la même résistance au

[*] Ce raisonnement nous a été suggéré par le passage suivant d'une Lettre que nous avons reçue de M. Joule le 8 juillet 1847 : « L'expérience de M. Peltier sur la production du froid dans l'endroit » de contact (*solder*) du bismuth et de l'antimoine, nous offre un exemple de la conversion de la » chaleur en force mécanique du courant, » passage qui doit avoir eu pour but de répondre à la remarque faite par nous, qu'on ne pourrait fournir aucun témoignage à l'appui de cette assertion que de la chaleur puisse être anéantie. Nous admettons pleinement la force de cette réponse; mais, pour donner le caractère expérimental au témoignage ainsi invoqué, il faudrait prouver qu'il y a plus de chaleur anéantie dans les endroits à chaud d'un couple ou d'une batterie thermo-électrique qui sert à soutenir un courant dans un fil conducteur, qu'il n'y en a de créée dans les endroits à froid. Que les choses se passent ainsi, je le regarde comme parfaitement certain, par la raison que les déductions de M. Joule, citées dans le n° 16 du texte, sont des conséquences incontestables de la première proposition fondamentale; mais cependant, il faut le remarquer dans ce cas aussi bien que dans tout autre cas de production d'effet mécanique par l'emploi d'une source purement thermique,

courant ; et la différence entre les deux quantités de chaleur ainsi développées , est équivalente à l'effet mécanique produit par la machine.

18. Les propositions suivantes de ce numéro sont tirées en substance, sinon textuellement, du Mémoire de M. Joule [*] *Sur les effets calorifiques dus à l'action magnéto-électrique*, et surtout de la première page de ce Mémoire, dans lequel l'auteur raconte des conclusions générales auxquelles il était conduit dans le cours de ses recherches antérieures. Elles mettent en relief, d'une manière extrêmement frappante, l'égalité des effets thermaux produits par des causes égales agissant par des moyens différents.

Prenons trois batteries galvaniques parfaitement égales et semblables, munies d'électrodes égaux et semblables ; soient A_1 et B_1 les extrémités des électrodes de la première batterie ; soient A_2 et B_2 celles de la deuxième batterie, et A_3 et B_3 les mêmes éléments de la troisième. LIONS A_1 et B_1 avec les extrémités d'un long fil fixe ; lions A_2 et B_2 avec les plaques de platine d'un appareil disposé pour décomposer l'eau ; enfin mettons A_3 et B_3 en relation avec les pôles d'une machine électro-magnétique. Cela fait, si l'on règle la longueur du fil placé entre A_1 et B_1 , et la vitesse de la machine interposée entre A_3 et B_3 , de manière à ce que les courants (que, pour plus de simplicité, nous supposerons continus et parfaitement uniformes) soient égaux dans les trois circuits, il y aura plus de chaleur émise, dans un temps donné, dans le fil placé entre A_1 et B_1 qu'il n'y en a d'une part dans l'appareil électrolytique placé entre A_2 et B_2 , et, d'autre part, dans la machine interposée entre A_3 et B_3 . Mais si l'on dispose les choses pour que l'hydrogène soit brûlé par l'oxygène dans l'appareil électrolytique, et pour que la machine dépense tout son travail à produire des effets uniquement thermaux (comme il arriverait, par exemple, si tout le travail de la machine était employé à agiter continuellement une masse finie de liquide) ; dans ce cas, la quantité de chaleur émise dans ces deux derniers appareils sera précisément la même que dans le fil placé entre A_1 et B_1 . Il est digne de remarque que ces propositions sont rigoureusement vraies ; et que M. Joule, qui les a découvertes comme des conséquences démontrées du principe fondamental de la théorie dynamique de la chaleur, n'a fait par l'expérience que les vérifier surabondamment.

on n'a pas démontré autrement que par des considérations théoriques, l'anéantissement d'une quantité équivalente de chaleur. Ce serait faire un grand pas dans la voie ayant pour but de mettre en relief au moyen de l'expérience (de vérifier, pour ceux qui regardent cette vérification comme nécessaire) l'exactitude de la théorie dynamique de la chaleur, que de montrer, dans un cas quelconque, qu'il y a une perte de chaleur ; et l'on pourrait arriver à ce résultat en opérant, dans une étendue très-considérable de l'échelle thermométrique, sur une bonne machine à air ou à vapeur d'eau, convenablement disposée pour ne pas dépenser en frottements sa force mécanique. Comme on le verra dans la deuxième partie de ce travail, aucun genre d'expérience ne pourra parvenir à manifester une perte notable de chaleur, à moins que l'on n'emploie des corps à des températures différant beaucoup entre elles ; par exemple, la perte de chaleur qu'on pourra constater n'atteindrait pas 0,098 ou environ un dixième de la totalité de la chaleur employée, si la température de tous les corps expérimentés était comprise entre zéro et 30 degrés.

[*] *Philosophical Magazine*, septembre 1843.

19. On peut appliquer, de la manière la plus rigoureuse, nos deux propositions fondamentales à la seconde des méthodes connues pour obtenir un effet mécanique au moyen d'une action thermique. La première de ces deux propositions a été déjà ainsi appliquée par MM. Rankine et Clausius dans leurs Mémoires publiés; et l'application de la seconde proposition, comme l'a fait voir M. Clausius dans son travail, est absolument identique avec la recherche, déjà faite par Carnot, de la relation qui existe entre l'effet mécanique produit et les circonstances thermiques d'où cet effet tire son origine, dans le cas d'une machine expansive fonctionnant dans des limites infiniment voisines de température. Dans ce qui va suivre, nous exposerons la méthode d'investigation la plus simple qui se soit présentée à notre esprit dans l'étude des conséquences auxquelles peut conduire cette application, méthode qui d'ailleurs n'est qu'une simple modification introduite à une expression analytique de l'axiome de Carnot sur la permanence de la chaleur, que nous avons donné dans notre premier travail [*], pour la transformer dans une expression de l'axiome contraire de M. Joule.

20. Supposons une masse de substance quelconque [**] occupant le volume v sous la pression p , la même dans tous les sens, et à la température t ; et supposons qu'elle se dilate en prenant le volume $v + dv$ et la température $t + dt$; la quantité de travail produit sera

$$p dv;$$

et la quantité de chaleur qu'il faudra ajouter pour élever sa température de t à $t + dt$ pourra être représentée par

$$M dv + N dt,$$

quantité dont l'équivalent mécanique est

$$J (M dv + N dt),$$

J étant l'équivalent mécanique de l'unité de chaleur. Dès lors la mesure mécanique de la totalité de l'effet extérieur produit dans ces circonstances est

$$(p - JM) dv - JN dt;$$

conséquemment, lorsque l'expansion se sera opérée dans des limites finies, avec accompagnement de changements continus dans la température, l'effet extérieur produit sera en totalité représenté par l'expression

$$\int [(p - JM) dv - JN dt],$$

dans laquelle on doit supposer que t varie avec v , de manière à représenter à chaque instant la température de la masse, et dans laquelle l'intégration par rapport à v doit être faite dans les limites correspondantes au volume initial et au volume final. Si maintenant, à un moment ultérieur quelconque, le volume et la température de la masse redeviennent ce qu'ils étaient au commencement, quelque arbitraires qu'aient été les

[*] Rapport sur la théorie de Carnot (note annexée au n° 26).

[**] Cette masse peut être composée de différentes substances ou d'une même substance dans des états différents, pourvu que la température soit partout la même.

variations de ces éléments pendant la durée de la période, la somme totale de l'effet extérieur produit devra être nulle, conformément à la première proposition; par suite, l'expression

$$(p - JM) dv - JN dt$$

doit être la différentielle d'une fonction de deux variables indépendantes, c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$(1) \quad \frac{d(p - JM)}{dt} = \frac{d(-JN)}{dv};$$

cette formule exprimant simplement la condition que l'intégrale précédente doit disparaître dans tous les cas où les valeurs finales et initiales de v et de t sont respectivement les mêmes. Si l'on observe que J est une constante absolue, on pourra mettre l'expression précédente sous la forme

$$(2) \quad \frac{dp}{dt} = J \left(\frac{dM}{dt} - \frac{dN}{dv} \right).$$

Cette équation exprime d'une manière complète l'application de la première loi fondamentale aux circonstances thermiques et mécaniques d'une substance quelconque, exposée à une pression uniforme dans tous les sens, et soumise à toutes les variations possibles de température, de volume et de pression.

21. L'application de la deuxième loi fondamentale à une substance quelconque est représentée complètement par l'équation

$$(3) \quad \frac{dp}{dt} = \mu M,$$

dans laquelle μ n'est autre chose que la fonction de Carnot, une quantité, en effet, dont la valeur absolue est la même pour toutes les substances à la même température, mais qui varie avec la température suivant une loi que l'expérience seule peut déterminer. Pour démontrer cette proposition, on doit d'abord faire remarquer que si la seconde proposition du n° 9 est vraie pour tout cas où la température du réfrigérant diffère infiniment peu de celle de la source, elle doit être vraie d'une manière générale. Cela posé, si, 1° on laisse une substance se dilater de v à $v + dv$, sa température conservant une valeur constante t ; si, 2° on la laisse se dilater davantage, sans lui permettre d'absorber ni d'émettre de la chaleur, jusqu'à ce que sa température, s'abaissant d'une quantité infiniment petite, devienne $t - \tau$; si, 3°, en conservant à la substance cette température $t - \tau$, on la comprime d'une quantité (différant de dv seulement d'un infiniment petit du deuxième ordre) telle que sa température redevienne exactement t lorsque, 4°, l'on ramènera définitivement le volume à v , sans permettre à la masse, dans cette quatrième opération, d'absorber ni d'émettre de la chaleur; si, disons-nous, une substance peut subir tous ces changements, elle devra être considérée comme constituant une machine thermodynamique remplissant ce que nous appellerons la *condition de complète réversibilité*, dont il est question dans la proposition de Carnot. Par conséquent, suivant cette même proposition, ladite substance devra produire, avec la

même quantité de chaleur absorbée dans la première opération, le même travail que produirait toute autre substance soumise à la même opération dans les mêmes limites de température. Or $\frac{dp}{dt} \tau dv$ est évidemment le travail total exécuté dans un cycle complet; d'un autre côté (d'après la définition de M du n° 20), $M dv$ est la quantité de chaleur absorbée dans la première opération; par conséquent, la valeur de la quantité

$$\frac{\frac{dp}{dt} \tau dv}{M dv} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{dp}{dt}}{M} \tau$$

doit être la même pour toutes les substances, quand on considère les mêmes valeurs de t et de τ . Enfin, puisque τ entre seulement comme facteur dans cette expression, nous aurons

$$(4) \quad \frac{\frac{dp}{dt}}{M} = \mu,$$

dans laquelle μ ne dépend que de t . Telle est la proposition qu'il s'agissait de démontrer.

22. Le théorème si remarquable de l'égalité de valeur de la quantité $\frac{dp}{dt}$, pour toutes les substances à la même température, fut énoncé pour la première fois par Carnot (quoique dans des termes un peu différents) et démontré par lui au moyen des principes qu'il avait adoptés. Nous venons de voir que la vérité de ce théorème peut être établie d'une manière satisfaisante sans recourir à la partie de ces principes entachée d'inexactitude. Conséquemment, toutes les conclusions de Carnot et toutes celles déduites de sa théorie par d'autres auteurs, en tant qu'elles dépendent seulement de l'équation (4), n'ont besoin d'aucune modification, lorsqu'on adopte la *Théorie dynamique*. Par exemple, il y a lieu de maintenir toutes les conclusions renfermées dans les sections I, II et III de l'Appendice à notre *Rapport sur la théorie de Carnot*, et celles contenues dans le Mémoire qui le suit immédiatement dans les *Transactions* et intitulé : *Considérations théoriques sur l'effet d'abaissement que produit la pression sur le point de congélation de l'eau*, travail dû à notre frère aîné. Il suit aussi de là que l'expression donnée par Carnot, pour représenter l'effet mécanique qu'on peut retirer d'une quantité donnée de chaleur, au moyen d'une machine parfaite fonctionnant dans des limites infiniment voisines de température, exprime réellement le plus grand effet qu'il soit possible d'obtenir dans la circonstance; cependant, ce n'est, en réalité, qu'une infiniment petite fraction de la valeur totale de l'équivalent mécanique de la chaleur fournie par la source; le surplus est irrévocablement perdu pour l'homme, quoiqu'il ne soit pas *annihilé*.

23. D'un autre côté, l'expression représentant l'effet mécanique qu'on peut obtenir au moyen d'une quantité donnée de chaleur entrant dans une machine et four-

nie par une source à une température donnée, différera beaucoup de l'expression de Carnot, quand on considérera le cas où la température du réfrigérant diffère d'une quantité finie de celle de la source; car une quantité finie d'effet mécanique pouvant être obtenue au moyen d'une quantité finie de chaleur entrant dans la machine, une fraction finie de cette dernière quantité devra être transformée en effet mécanique. Les recherches relatives à cette expression, et à la détermination de ses valeurs numériques, fondée sur les chiffres déduits des expériences de M. Regnault sur la vapeur, tels qu'on les trouve dans les Tables I et II de notre premier travail, formeront la deuxième partie du Mémoire que nous soumettons aujourd'hui à l'appréciation de la Société.

DEUXIÈME PARTIE.

Sur la puissance motrice de la chaleur dans des limites finies de la température.

24. Il s'agit de déterminer la quantité de travail que produira, avec une quantité donnée de chaleur H , une machine parfaite alimentée par une source de chaleur à une température quelconque S , et versant la chaleur non utilisée (*waste*) dans un réfrigérant à une température quelconque T , plus basse que la première.

25. Nous pouvons supposer que la machine est composée d'un nombre infini de machines parfaites, chacune d'elles travaillant dans des limites infiniment petites de température, et disposées en une série telle, que la première machine a pour source de chaleur la source donnée, que la dernière a pour réfrigérant le réfrigérant donné, et enfin que chaque machine intermédiaire a pour source de chaleur le réfrigérant de la machine qui la précède immédiatement dans la série. Chacune de ces machines, dans un temps quelconque, verse dans son réfrigérant une quantité de chaleur moindre que celle qu'elle a reçue de sa source, et la différence entre ces deux quantités de chaleur est l'équivalent du travail mécanique produit par elle. Cela posé, appelons respectivement t et $t + dt$ les températures du réfrigérant et de la source de l'une des machines intermédiaires; désignons par q la quantité de chaleur que la machine verse dans son réfrigérant, dans un temps quelconque, et $q + dq$ la quantité qu'elle reçoit de sa source dans le même temps; dès lors la quantité de travail produite par cette machine, pendant ce temps, sera $J dq$, conformément à la première proposition; elle sera aussi exprimée par $q \cdot \mu dt$, conformément à l'expression de la seconde proposition établie dans le n° 21; par conséquent, on aura

$$J dq = q \cdot \mu dt.$$

Par suite, si nous supposons que la durée du temps considéré soit celle pendant laquelle la quantité H de chaleur est fournie par la première source, nous obtiendrons par l'intégration l'expression

$$\log \frac{H}{q} = \frac{1}{J} \int_t^S \mu dt;$$

mais la valeur de q , quand $t = T$, n'est autre chose que la quantité de chaleur restante à la fin des opérations et versée dans le réfrigérant ayant la température T ; si donc nous désignons cette quantité par R , nous aurons

$$(5) \quad \log \frac{H}{R} = \frac{1}{J} \int_T^S \mu dt;$$

d'où l'on tire

$$(6) \quad R = H \varepsilon^{-\frac{1}{J} \int_T^S \mu dt}.$$

Or la totalité du travail produit sera l'équivalent mécanique de la quantité de chaleur perdue; si donc on appelle W cette quantité de travail, on aura

$$(7) \quad W = J(H - R),$$

ou, par suite de l'équation (6),

$$(8) \quad W = JH \left(1 - \varepsilon^{-\frac{1}{J} \int_T^S \mu dt} \right).$$

26. Pour comparer cette expression avec celle de $H \int_T^S \mu dt$, qui est donnée par la théorie de Carnot [*], comme représentant le rendement de la machine, nous pouvons développer en série la fonction exponentielle de l'équation précédente; on obtient de la sorte

$$(9) \quad W = \left(1 - \frac{\theta}{1.2} + \frac{\theta^2}{1.2.3} - \dots \right) H \int_T^S \mu dt,$$

expression dans laquelle

$$\theta = \frac{1}{J} \int_T^S \mu dt.$$

Cette formule fait voir que la valeur du travail réellement produit, toujours inférieure à la quantité indiquée par la théorie de Carnot, en approche de plus en plus à mesure que l'on diminue l'étendue des limites de la température, et que, finalement, elle lui devient égale, quand cette étendue est infiniment petite, comme si la théorie de Carnot n'avait pas besoin de modification, ce qui est d'accord avec une conclusion établie dans le n° 22.

27. L'équation (8) fait voir que le rendement réel d'une quantité donnée de chaleur dépensée par la source augmente avec chaque augmentation de l'étendue des limites de la température; elle montre aussi qu'au lieu d'augmenter indéfiniment et proportionnellement à la quantité $\int_T^S \mu dt$, comme l'indique la théorie de Carnot, ce rende-

[*] Rapport sur la théorie de Carnot, équation (7), n° 51.

ment n'atteint jamais la valeur JH , mais qu'il approche de cette limite à mesure que la quantité $\int_T^S \mu dt$ croît indéfiniment. Ces considérations font perdre, il est vrai, une partie de son importance à la remarque faite par Carnot [*], au sujet de l'avantage pratique que procurerait l'emploi des machines à air ou de tout autre procédé qui permettrait de beaucoup augmenter l'étendue des limites de température, mais en même temps elles nous donnent des idées plus satisfaisantes sur les conditions pratiques du problème. Nous voyons, en effet, que, si nous ne pouvons obtenir en totalité l'effet mécanique équivalent, cependant, quand la source de chaleur sera à une température suffisamment élevée au-dessus des objets environnants, on pourra convertir en effet mécanique une fraction de plus en plus grande de la totalité de la chaleur admise, uniquement en augmentant dans la machine l'étendue des limites de température.

28. Les recherches précédentes (n° 25) font voir que les valeurs de la fonction μ de Carnot, pour toutes les températures comprises dans les limites qu'on aura en vue, et la valeur absolue de l'équivalent J constituent des données suffisantes pour calculer la quantité d'effet mécanique que produira une machine parfaite, quelle qu'elle soit, machine à vapeur d'eau, machine à air, ou même machine thermo-électrique; puisque, en effet, conformément à l'axiome établi dans le n° 12 et à la démonstration de la seconde proposition, aucun agent matériel inanimé ne peut produire, avec une quantité donnée de chaleur et dans les limites actuelles de température, une plus grande somme d'effet mécanique qu'une machine satisfaisant aux conditions énoncées dans la seconde proposition.

29. L'équivalent mécanique de l'unité thermique de l'échelle Fahrenheit, c'est-à-dire de la quantité de chaleur nécessaire pour élever la température de 1 livre d'eau de 32 à 33 degrés Fahrenheit, a été déterminé, par M. Joule, de Manchester, en livres élevées à 1 pied (*in foot-pounds*); et le chiffre qu'il donne comme devant inspirer le plus de confiance est 772,69. M. Rankine prend 772 comme résultant des déterminations de M. Joule, et il estime que ce résultat est à $\frac{1}{300}$ près le chiffre exact. Si nous adoptons $772 \frac{2}{9}$, et si nous le multiplions par $\frac{9}{5}$, nous obtiendrons 1390 pour exprimer l'équivalent mécanique de l'unité thermique de l'échelle centigrade. Telle est la quantité que nous prenons pour la valeur de J dans les applications numériques qu'on trouvera plus bas.

30. En ce qui concerne la détermination des valeurs de μ à différentes températures, on doit remarquer que l'équation (4) fait voir que cette détermination pourrait se faire au moyen d'expériences sur une substance quelconque d'une texture indestructible, et qu'elle indique exactement quelles sont les données expérimentales nécessaires dans

[*] Rapport sur la théorie de Carnot, Appendice, section IV.

chaque cas. Par exemple, en supposant d'abord que l'intermédiaire choisi est l'air, puisque cet intermédiaire est composé en partie d'eau liquide et en partie de vapeur saturée, nous déduisons, comme on le verra dans la troisième partie de ce Mémoire, les deux expressions (6) que nous avons données, dans le n° 30 de notre premier travail (*Rapport sur la théorie de Carnot*), pour la valeur de μ à une température quelconque. Jusqu'à présent, il n'a été fait sur l'air aucune expérience qui puisse fournir les données nécessaires pour calculer les valeurs de μ , dans des limites étendues de la température; mais, pour des températures comprises entre 50 et 60 degrés Fahrenheit, les données se prêtant le plus directement à cette détermination qu'on ait encore obtenues, sont fournies par les expériences [*] entreprises par M. Joule pour évaluer la quantité de chaleur qui est développée, quand on emploie une quantité donnée de travail à comprimer de l'air à une température constante. En effet, soient Q la quantité de chaleur développée par la compression d'un fluide soumis à la loi d'expansion et de compressibilité des gaz, W le travail mécanique dépensé, t la température constante du fluide; par suite de l'équation (11) du n° 49 de notre premier travail, nous avons

$$(10) \quad \mu = \frac{W.E}{Q(1 + Et)},$$

formule qui n'est, en réalité, qu'une conséquence d'une autre valeur de μ , exprimée en fonction des données relatives à l'air. Certaines considérations sur la détermination de μ par des expériences de cette nature, ou par des expériences d'un autre ordre, sur l'air atmosphérique, imaginées par M. Joule, formeront le sujet d'une communication que nous espérons pouvoir faire à la Société dans une autre occasion.

31. La seconde des expressions (6) du n° 30 de notre premier travail, ou la formule équivalente (32), qu'on trouvera plus bas dans le présent Mémoire, montre qu'on peut obtenir la valeur de μ à une température quelconque, au moyen des valeurs, à cette température, des éléments suivants :

- 1°. La loi suivant laquelle varie, avec la température, la pression de la vapeur saturée;
- 2°. La chaleur latente d'un poids donné de vapeur d'eau saturée;
- 3°. Le volume d'un poids donné de vapeur d'eau saturée;
- 4°. Le volume d'un poids donné d'eau.

Le dernier de ces éléments, en raison de la manière dont il entre dans les formules, peut être regardé comme constant, sans produire un effet appréciable sur l'exactitude probable du résultat.

[*] Voir le travail intitulé : *Sur les changements de température produits par la raréfaction et la condensation de l'air*. (*Philosophical Magazine*, vol. XXVI, mai 1845.)

32. Les expériences de M. Regnault fournissent le premier de ces éléments, avec une grande exactitude pour toutes les températures comprises entre -32 et 230 degrés centigrades.

33. Pour ce qui regarde le second de ces éléments, on doit remarquer que tous les expérimentateurs, depuis Watt, qui le premier a étudié le sujet, jusqu'à M. Regnault, dont les déterminations sont, de toutes celles qui ont été faites, et les plus exactes et les plus étendues, tous paraissent avoir admis, explicitement ou tacitement, l'axiome de Carnot, dont la *Théorie dynamique de la chaleur* démontre l'inexactitude; de telle sorte qu'ils ont appelé *chaleur totale de la vapeur*, « la quantité de chaleur nécessaire pour convertir une unité de poids d'eau à 0 degré en vapeur existant dans l'état » particulier qu'ils considéraient. C'est ainsi que M. Regnault, en posant préalablement cette définition de la *chaleur totale de la vapeur saturée*, donne les valeurs expérimentales de la quantité ainsi définie, pour toutes les températures comprises entre 0 et 230 degrés, et qu'il en déduit la *chaleur latente de la vapeur saturée*, en retranchant de cette chaleur totale la quantité nécessaire pour élever le liquide à la température de la vapeur considérée. Or, suivant les principes de la *Théorie dynamique*, la quantité de chaleur nécessaire pour transformer l'unité de poids d'eau à 0 degré en vapeur saturée, dépend de la manière (variable à l'infini) dont on effectue la transformation en question; et la différence entre les quantités de chaleur nécessaires dans les différents cas, est égale à la différence qui existe entre les équivalents thermaux des effets mécaniques produits pendant l'expansion. Ainsi, par exemple, la quantité totale de chaleur nécessaire pour vaporiser d'abord une certaine quantité d'eau à 0 degré, et pour élever ensuite cette vapeur à 100 degrés, tout en la maintenant à l'état de saturation [*], ne doit pas atteindre en valeur absolue les $\frac{3}{4}$ de la quantité de chaleur nécessaire pour élever d'abord la température du liquide à 100 degrés et pour le transformer ensuite en vapeur à cette température; malgré cette différence, cependant, l'une et l'autre de ces quantités sont comprises dans la définition, citée plus haut et généralement admise, de la chaleur totale de la vapeur saturée. Pour trouver la signification réelle de ce que M. Regnault a déterminé, dans ses expériences, comme étant la chaleur totale de la vapeur saturée, il est nécessaire de remarquer que ses évaluations portent sur les quantités de chaleur émises par un certain poids d'eau passant dans un appareil calori-

[*] Voir plus bas le n° 38, troisième partie, dans lequel il est question de la chaleur spécifique négative de la vapeur saturée. Si la valeur moyenne de cette quantité, entre 0 et 100 , est de $-1,5$ (chiffre dont elle ne doit pas beaucoup s'éloigner), il devra y avoir dégagement d'une quantité de chaleur égale à 150 unités, si l'on élève, au moyen de la compression, de 0 à 100 degrés la température d'une livre de vapeur saturée. La chaleur latente de la vapeur à 0 degré étant de $606,5$, la quantité de chaleur nécessaire pour convertir une livre d'eau à 0 degré en vapeur saturée à 100 degrés, par le premier des procédés décrits dans le texte, sera finalement de $456,5$, c'est-à-dire à peu près les $\frac{5}{7}$ de la quantité 637 trouvée par M. Regnault pour représenter ce qu'il appelle la *chaleur totale* de la vapeur saturée à 100 degrés.

métrique, dans lequel elle entre à l'état de vapeur saturée, et d'où elle sort à l'état liquide, les résultats obtenus étant d'ailleurs ramenés à ce qu'ils auraient été si la température finale de l'eau eût été exactement égale à 0 degré. Or, comme il ne se produit, dans ces circonstances, aucun effet mécanique extérieur (si ce n'est celui du son, lequel doit être probablement tout à fait inappréciable), le seul effet extérieur consiste en émission de chaleur; conséquemment, conformément au principe fondamental de la *Théorie dynamique*, les résultats doivent être indépendants des actions intermédiaires. Il en résulte que, quelle que soit la manière dont la vapeur traverse le calorimètre, quelque basse que soit la pression à laquelle peut avoir lieu la condensation [*], la chaleur transmise à l'extérieur doit être exactement la même que si la condensation avait lieu à la pression totale de la vapeur saturée, telle qu'elle est à son entrée dans le calorimètre; d'où nous concluons que la *chaleur totale*, telle que M. Regnault l'évalue dans ses expériences, représente la quantité de chaleur nécessaire pour élever d'abord le liquide à la température que l'on a en vue, et pour la transformer ensuite en vapeur à cette température; dès lors le principe suivant lequel ce physicien détermine la chaleur latente est exact; par conséquent, dans les limites de température 0 et 230 degrés, nous pouvons accepter ses chiffres comme des données complètement satisfaisantes pour la détermination des valeurs de μ .

54. Il ne reste plus que le troisième des éléments ci-dessus, à savoir, le volume d'un poids donné de vapeur saturée, à l'égard duquel il nous manque des résultats exacts, pour des limites étendues de la température; aucune recherche n'ayant été faite à ce sujet depuis la publication de notre premier travail, nous ne voyons pas de raison pour supposer que les valeurs de μ , que nous y avons consignées, ne sont pas les plus probables qu'il soit possible d'obtenir dans l'état actuel de la science; dès lors, et s'il reste

[*] Si la vapeur est obligée de traverser un tube long et étroit, ou un petit orifice, placé dans l'appareil calorimétrique, il y aura diminution de la pression avant que la condensation ait lieu, et, par suite, il se trouvera, dans deux parties différentes du calorimètre, de la vapeur saturée à des températures différentes (comme il arriverait, par exemple, si la vapeur, sortant d'une chaudière à haute pression, était distillée à l'air libre); cependant, en raison de la chaleur développée par le frottement intérieur du fluide, laquelle est précisément l'équivalent de l'effet mécanique dû à l'expansion et perdu par suite du mouvement du fluide, la quantité de chaleur mesurée par le calorimètre sera exactement la même que si la condensation avait lieu à une pression non différente de celle de la vapeur entrante. Ces circonstances du phénomène ont échappé à M. Clausius (*Annales de Poggendorff*, 1850, n° 4, page 510), lorsqu'il exprime des doutes sur la possibilité d'obtenir des valeurs exactes de la chaleur latente de la vapeur saturée, en retranchant la chaleur sensible de la *chaleur totale* de M. Regnault, alléguant pour raison que, dans les expériences de ce physicien, la condensation doit avoir eu lieu à la même pression que la vaporisation ou du moins à une pression très-voisine. La question n'est pas celle-ci: « La condensation a-t-elle eu lieu à une pression plus basse que celle de la vapeur entrante? » mais bien celle-ci: « Dans les expériences de M. Regnault, la vapeur a-t-elle fait fonctionner une machine pendant son passage dans le calorimètre, ou bien s'est-il produit, quand la vapeur se précipitait dans l'instrument, assez de bruit pour à transformer une portion notable de la chaleur totale en effet mécanique? » Répondre négativement à cette question, c'est nous autoriser suffisamment à adopter avec certitude l'opinion qui regarde comme exact le principe qui sert de base à la détermination de la chaleur latente.

d'ailleurs bien entendu, comme nous l'avons dit dans le n° 53 dudit travail, que des expériences exactes sur les densités des vapeurs saturées à différentes températures pourront signaler des erreurs considérables dans les valeurs de ces densités calculées conformément aux lois des gaz, et pourront, par suite, amener des changements considérables dans nos résultats, nous continuerons à nous servir, comme base de nos applications numériques, de la Table I du travail cité plus haut, dans laquelle on trouve les valeurs de μ pour toutes les températures $\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, \dots, 230\frac{1}{2}$ degrés, c'est-à-dire la valeur moyenne de cette quantité pour les 230 premiers degrés centigrades (à partir du point de congélation) du thermomètre à air. On peut ajouter que si, ultérieurement, des recherches expérimentales, suffisamment dignes de confiance au point de vue de l'exactitude, et entreprises sur l'air ou sur toute autre substance, conduisaient à des valeurs de μ différentes de celles dont il est question plus haut, on devrait considérer ce fait comme prouvant qu'il existe une différence entre les véritables densités des vapeurs saturées et celles que nous avons supposées[*].

55. La Table II de notre premier travail, dans laquelle sont consignées les valeurs de $\int_0^t \mu dt$ pour $t = 1, t = 2, \dots, t = 230$, permet de calculer aisément la somme d'effet mécanique qu'il est possible de retirer d'une quantité donnée de chaleur, au moyen d'une machine parfaite fonctionnant dans une étendue quelconque de l'échelle thermométrique, pourvu que les températures considérées soient comprises entre 0 et 230 degrés; en effet, la quantité qui doit être divisée par J [**] dans l'expression de l'expression (8), s'obtiendra en retranchant le chiffre de cette Table qui correspond à la valeur de T , du chiffre correspondant à la valeur de S .

56. Les Tables suivantes donnent les résultats numériques obtenus par ce procédé, ainsi qu'un petit nombre de chiffres (voir la Table supplémentaire) calculés pour des

[*] Nous ne pouvons croire que telle ou telle hypothèse, semblable à celle adoptée par M. Clausius comme base de ses recherches, et laquelle conduit, comme il le montre, à des valeurs pour la densité de la vapeur aqueuse saturée à différentes températures, qui accusent des déviations considérables aux lois suivant lesquelles varie la densité des gaz avec la température et la pression, nous ne pouvons croire qu'une telle hypothèse soit plus probable que celle qui consiste à supposer, comme on le fait habituellement, que la densité des vapeurs varie conformément à ces lois. Dans l'état actuel de la science, on aurait tort d'affirmer que l'une des hypothèses est plus probable ou diffère moins de la vérité que l'autre.

[**] On doit remarquer que l'unité de force employée dans la détermination des valeurs de μ est le poids d'une livre de matière à Paris, et que l'unité de force qui entre dans l'expression de J est le poids d'une livre de matière à Manchester; et que, par suite, en vue d'une exactitude rigoureuse, les chiffres devraient être modifiés de manière à se rapporter à une commune unité de force. Mais la gravité, à Paris, différant de $\frac{1}{2000}$ au plus de celle de Manchester, la correction qu'on apporterait serait moindre que les erreurs probables provenant d'autres causes; par suite, elle doit être regardée comme négligeable.

températures supérieures à 230 degrés, en prenant pour base la loi suivant laquelle varie la fonction $\int_0^t \mu dt$ dans les limites des expériences.

37. Explication des Tables.

La colonne I contient les limites de température.

La colonne II contient quelques cas des autres limites de température (dédites de la Table II de notre premier travail) pour lesquelles les valeurs de $\int_T^S \mu dt$ sont les mêmes que pour les limites correspondantes de la colonne I.

Les chiffres de la colonne III représentent le rendement en force mécanique que donnerait l'unité de chaleur, si la théorie de Carnot n'avait pas besoin de modification (c'est-à-dire le rendement de l'unité de chaleur, et des quantités supplémentaires de chaleur fournies pour compenser celles qui sont converties en effet mécanique aux diverses températures comprises entre les limites).

Les chiffres de la colonne IV représentent le rendement réel de l'unité de chaleur; la comparaison de ces chiffres avec ceux de la colonne III montre de combien ce rendement réel est inférieur au rendement théorique de Carnot.

Les chiffres de la colonne VI ont été calculés par la formule

$$R = \varepsilon - \frac{1}{1390} \int_T^S \mu dt,$$

dans laquelle

$$\varepsilon = 2,71828\dots,$$

et dans laquelle on a successivement substitué à $\int_T^S \mu dt$ les quantités de la colonne III.

Les chiffres de la colonne IV ont été calculés par la formule

$$W = 1390(1 - R)$$

et au moyen des valeurs de $(1 - R)$ de la colonne V.

LIMITES des températures.				III. RENDEMENT de l'unité de chaleur d'après la théorie de Carnot.	IV. RENDEMENT d'une unité de chaleur fournie par la source.	V. QUANTITÉ de chaleur convertie en effet mécanique.	VI. QUANTITÉ de chaleur perdue.
I.		II.					
S	T	S	T	$\int_T^S \mu dt$ livres élevées à 1 pied.	W livres élevées à 1 pied.	1 - R	R

38. Table de la puissance motrice de la chaleur.

0	0	31,08	30	1,960	4,918	0,00356	0,96644
10	0	40,86	30	48,987	48,1	0,0146	0,9654
20	0	51,7	30	95,656	93,4	0,067	0,933
30	0	62,6	30	143,060	136,0	0,098	0,902
40	0	73,6	30	188,220	176,0	0,127	0,873
50	0	84,5	30	232,180	214,0	0,154	0,846
60	0	95,4	30	274,970	249,0	0,179	0,821
70	0	106,3	30	316,640	283,0	0,204	0,796
80	0	117,2	30	357,270	315,0	0,227	0,773
90	0	128,0	30	396,030	345,0	0,248	0,752
100	0	138,8	30	433,690	374,0	0,269	0,731
110	0	149,1	30	473,620	401,0	0,289	0,711
120	0	160,3	30	510,770	427,0	0,308	0,692
130	0	171,0	30	547,210	452,0	0,325	0,675
140	0	181,7	30	582,980	476,0	0,343	0,657
150	0	192,3	30	618,140	499,0	0,359	0,641
160	0	203,0	30	652,740	521,0	0,375	0,625
170	0	213,6	30	686,800	542,0	0,390	0,610
180	0	224,2	30	720,390	562,0	0,404	0,596
190	0	190,0	0	753,500	582,0	0,418	0,582
200	0	200,0	0	786,170	600,0	0,432	0,568
210	0	210	0	818,450	619,0	0,445	0,555
220	0	220	0	850,340	636,0	0,457	0,542
230	0	230	0	881,870	653,0	0,470	0,530

39. Table supplémentaire de la puissance motrice de la chaleur.

101,1	0	140	30	439,9	377,0	0,271	0,729
105,8	0	230	100	446,2	382,0	0,275	0,725
300	0	300	0	1099,0	757,0	0,545	0,455
400	0	400	0	1395,0	879,0	0,632	0,368
500	0	500	0	1690,0	979,0	0,704	0,296
600	0	600	0	1980,0	1059,0	0,762	0,238
∞	0	∞	0	∞	1390,0	1,000	0,000

40. Si l'on prend pour exemple les limites 30 et 140 degrés, qu'on rencontre dans quelques-unes des meilleures machines à vapeur qui aient été construites [*], on trouvera dans la colonne IV de la Table supplémentaire le chiffre 377 livres élevées à 1 pied pour représenter le rendement de l'unité de chaleur, au lieu de 440 inscrit dans la colonne III, comme étant le rendement indiqué par la théorie de Carnot. Nous en concluons que le travail produit en 1845 par la machine de Fowey-Consols, au lieu d'être de $57 \frac{1}{2}$ pour 100, a été en réalité de 67 pour 100, c'est-à-dire le $\frac{2}{3}$ du travail produit par une machine parfaite fonctionnant dans les mêmes limites de température; or ce dernier travail est les 0,271 (un peu plus du quart) de l'équivalent total de la chaleur employée; d'où l'on conclut que la machine à vapeur en question a converti en effet mécanique la fraction $\frac{1}{5,49}$ de la chaleur dépensée, c'est-à-dire 18 pour 100.

41. Les derniers chiffres de la Table supplémentaire font voir quel avantage considérable on pourrait obtenir en perfectionnant la machine à air, ou en employant toute autre machine thermodynamique dans laquelle on augmenterait l'étendue des limites de la température fort au delà de ce qu'on peut réaliser dans les machines à vapeur d'eau. Ainsi, une machine à air, dont la partie chaude serait à 600 degrés et la partie froide à 0 degré centigrade, et qui fonctionnerait dans des conditions parfaites d'économie, pourrait convertir en effet mécanique 76 pour 100 de la chaleur totale employée; ou, si elle travaillait avec la même économie que la machine de Fowey-Consols, c'est-à-dire en produisant 67 pour 100 du rendement correspondant à des limites de température, cette machine à air transformerait en effet mécanique 51 p. 100 de toute la chaleur dépensée.

42. Dans une Lettre du 9 décembre 1848, M. Joule nous a suggéré l'idée que la véritable valeur de μ pourrait bien varier « en sens inverse de la température à partir de zéro » [**], et nous a communiqué les valeurs de cette quantité, à différentes tempé-

[*] Voir l'Appendice au Rapport sur la théorie de Carnot, section V.

[**] Si nous faisons

$$\mu = K \frac{E}{1 + Et},$$

dans laquelle K peut être une constante quelconque, nous aurons

$$W = J \left(\frac{S - T}{\frac{1}{E} + S} \right)^{\frac{K}{J}},$$

formule que nous donnions dans la lecture du présent travail. Depuis, nous avons remarqué que l'hypothèse de M. Joule indique essentiellement que le coefficient K doit être, comme dans notre texte, l'équivalent mécanique de l'unité de chaleur. Dans une Lettre du 27 mars 1851, M. Ran-

tures, calculées par la formule

$$(11) \quad \mu = J \frac{E}{1 + Et},$$

pour que nous les comparions avec les valeurs que nous avons obtenues en employant des données relatives à la vapeur d'eau. Cette formule est également adoptée par M. Clausius qui s'en sert, comme base fondamentale, dans ses recherches analytiques sur le sujet qui nous occupe. Si μ pouvait être représenté exactement par cette formule, on aurait

$$\int_T^S \mu dt = J \log \frac{1 + ES}{1 + ET};$$

et, par suite, les équations (1) et (2) deviendraient

$$(12) \quad W = J \frac{S - T}{\frac{1}{E} + S},$$

$$(13) \quad R = \frac{\frac{1}{E} + T}{\frac{1}{E} + S}.$$

43. Les raisons sur lesquelles se fonde M. Joule pour penser que l'équation (11) peut être l'expression exacte de la fonction de Carnot, quoique les résultats fournis par elle diffèrent considérablement des chiffres contenus dans la Table I de notre premier travail, ces raisons formeront le sujet d'une communication que nous aurons l'occasion de faire à la Société avant la clôture de la présente session.

TROISIÈME PARTIE.

Application de la théorie dynamique à l'établissement de certaines relations entre les propriétés physiques de toutes les substances.

44. Les deux équations fondamentales de la théorie dynamique de la chaleur, établies plus haut, expriment les relations qui existent entre les quantités de chaleur nécessaires pour produire des changements de volume et de température dans une substance matérielle quelconque soumise à une pression uniforme dans tous les sens, et elles conduisent à plusieurs conclusions remarquables. Telles sont celles qui, étant in-

kine nous informe, qu'au moyen des principes exposés dans le Mémoire qu'il a communiqué l'année dernière à la Société royale, il est parvenu à établir une formule qui donne le rapport de la quantité maximum de chaleur convertie en effet mécanique, à la totalité de la chaleur dépensée, dans une machine expansive quelconque; et nous trouvons qu'elle concorde exactement avec l'expression (12) que nous donnons dans le texte comme conséquence de l'hypothèse suggérée par M. Joule, au sujet de la valeur de μ à une température quelconque (4 avril 1851).

dépendantes du principe de M. Joule, équation (2) du n° 20, et de l'hypothèse, vraie ou fausse, de Carnot, sur la permanence de la chaleur, sont communes à sa théorie et à la théorie dynamique, et parmi ces dernières, quelques-unes des plus importantes [*] ont été données par Carnot lui-même et par les auteurs qui ont adopté après lui, sans modification, les mêmes principes et le même mode de raisonnement. L'équation

$$\frac{dM}{dt} - \frac{dN}{dv} = 0,$$

qui est l'expression analytique de l'hypothèse de Carnot (et qui, par suite, pouvait indiquer un procédé expérimental pour en vérifier l'exactitude), a pu conduire à d'autres déductions remarquables; mais il n'est pas parvenu à notre connaissance que personne ait obtenu et publié, en se fondant sur cette hypothèse, des conclusions qui ne sont pas comprises dans la loi générale de Carnot relative à la puissance motrice de la chaleur dans des limites finies de la température.

43. Les publications récentes de MM. Rankine et Clausius contiennent, au sujet des propriétés physiques des différentes substances, quelques-unes des conséquences qui découlent du principe fondamental de la théorie dynamique [**]; parmi elles on peut citer, d'une part, une découverte remarquable, faite simultanément par les deux auteurs, sur la chaleur spécifique de la vapeur d'eau (sujet que nous traitons ci-dessous dans le n° 38), et, d'autre part, une propriété particulière de l'eau à son point de congélation, déduite par M. Clausius de ses recherches sur l'eau et la glace soumises à une pression extérieure, et de laquelle il résulte que la chaleur latente de l'eau, dont la valeur est de 79 sous la pression atmosphérique, diminue d'une quantité égale à 0,081, pour chaque dixième de degré dont on abaisse le point de congélation de l'eau en la soumettant à une pression extérieure. Les recherches de ces deux auteurs supposent l'existence fondamentale de diverses hypothèses qui sont susceptibles d'être plus ou moins démenties ou confirmées par l'expérience; de telle sorte qu'il est assez difficile d'inférer de leurs écrits quelle portion de leurs conclusions, particulièrement en ce qui concerne l'air et les gaz en général, dépend uniquement des principes fondamentaux de la théorie dynamique.

46. Dans ce qui va suivre, nous établissons les propriétés des substances matérielles, au point de vue de la chaleur spécifique, en faisant l'application de nos deux propositions fondamentales, exprimées analytiquement par les deux équations

$$\frac{dM}{dt} - \frac{dN}{dv} = \frac{1}{J} \frac{dp}{dt} \quad [\text{équation (2) du n° 20}],$$

$$M = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dt} \quad [\text{équation (3) du n° 21}],$$

[*] Voir ci-dessus, n° 22.

[**] Voir ci-dessus la première proposition fondamentale.

et cette application est faite séparément au cas d'un fluide dont la densité varie rigoureusement suivant les lois des gaz, et au cas d'un milieu composé de plusieurs parties, à la même température, mais se présentant dans des états différents, comme, par exemple, de l'eau avec de la vapeur saturée, ou de l'eau avec de la glace.

47. On doit d'abord remarquer que, suivant la définition de M et N contenue dans le n° 20, N doit être ce qu'on appelle habituellement la *chaleur spécifique à volume constant* d'une substance, pourvu toutefois que la quantité considérée de cette substance soit le poids-type adopté dans l'expression des chaleurs spécifiques; pour cette raison, nous adopterons dorénavant l'unité de poids en question. Dès lors, l'équation fondamentale de la théorie dynamique, c'est-à-dire l'équation (2) du n° 20 exprime une relation entre cette chaleur spécifique et les quantités M et p . Si nous éliminons M de cette expression, au moyen de l'équation (3) du n° 21 que l'on déduit de l'expression analytique du deuxième principe fondamental de la théorie de la puissance motrice de la chaleur, nous aurons

$$(14) \quad \frac{dN}{dv} = \frac{d\left(\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dt}\right)}{dt} - \frac{1}{J} \frac{dp}{dt},$$

équation qui représente la relation qui existe, d'une part, entre la variation que produit, dans la chaleur spécifique à volume constant d'une substance quelconque, un changement de volume opéré à une température constante, et, d'autre part, entre la variation que subit la pression par suite d'un changement de température, le volume restant constant; cette expression renferme la fonction μ de la température, identique pour toutes les substances.

48. Soit maintenant K la chaleur spécifique à pression constante. Si les quantités dv et dt ont entre elles une relation telle, que la pression du milieu, quand son volume et sa température sont respectivement $v + dv$ et $t + dt$, soit absolument la même que que quand ce volume et cette température sont v et t , c'est-à-dire si l'on a

$$0 = \frac{dp}{dv} dv + \frac{dp}{dt} dt,$$

on aura

$$K dt = M dv + N dt,$$

d'où l'on conclut

$$(15) \quad M = \frac{-\frac{dp}{dv}}{\frac{dp}{dt}} (K - N),$$

expression qui montre la signification de la quantité que nous avons appelée M , en fonction des deux chaleurs spécifiques. Si l'on substitue la valeur de M qui découle de

l'équation (3) du n° 21, on aura

$$(16) \quad K - N = \frac{\left(\frac{dp}{dt}\right)^2}{\mu \times \left(-\frac{dp}{dv}\right)},$$

c'est-à-dire la valeur de la différence entre les deux chaleurs spécifiques, déduite, sans l'aide d'aucune hypothèse, du deuxième principe fondamental de la théorie dynamique de la chaleur.

49. On peut mettre ces résultats sous une forme plus commode pour l'application qu'on peut en faire aux substances solides et liquides; il suffit pour cela d'introduire la notation suivante

$$(17) \quad \kappa = v \times \left(-\frac{dp}{dv}\right), \quad e = \frac{1}{\kappa} \frac{dp}{dt},$$

$\frac{1}{\kappa}$ représentant la valeur de la compressibilité et le coefficient de dilatation par la chaleur.

Les équations (14), (16) et (3) deviennent alors

$$(18) \quad \frac{dN}{dv} = \frac{d\left(\frac{\kappa e}{\mu}\right)}{dt} - \frac{\kappa e}{J},$$

$$(19) \quad K - N = v \frac{\kappa e^2}{\mu},$$

$$(20) \quad M = \frac{1}{\mu} \cdot \kappa e;$$

la troisième de ces équations étant là pour montrer d'une manière explicite la quantité de chaleur développée par la compression de la substance maintenue à une température constante. Enfin, si θ représente l'élévation de température qui est produite par la compression du volume de $v + dv$ à v , avant qu'aucune quantité de chaleur soit dégagée extérieurement, nous aurons

$$(21) \quad \theta = \frac{1}{N} \frac{\kappa e}{\mu} dv = \frac{\kappa e}{\mu K - v \kappa e^2} dv.$$

50. La première de ces valeurs de θ montre que, lorsque la substance se contracte pendant que sa température s'élève (ce qui arrive, par exemple, à l'eau entre le point de sa congélation et le point correspondant au maximum de densité), une compression subite produirait dans la substance un abaissement de température. La deuxième expression donne exactement, en fonction de la compressibilité et de la dilatabilité, quel changement apporterait à la température un changement de volume infiniment petit; elle conduit d'ailleurs à la valeur approchée

$$\theta = \frac{\kappa e}{\mu K},$$

si, comme c'est probablement le cas de toutes les substances solides et liquides connues, la valeur de e est assez faible pour que la quantité $e.vke$ soit très-petite par rapport à μK .

31. Considérons maintenant une substance gazeuse, et introduisons dans nos formules l'hypothèse que la variation de sa densité ait lieu rigoureusement suivant les lois des gaz; nous aurons alors, d'après la loi de Boyle et de Mariotte, relative à la compression,

$$(22) \quad \frac{dp}{dv} = -\frac{p}{v},$$

et, d'après la loi de Gay-Lussac,

$$(23) \quad \frac{dv}{dt} = \frac{Ev}{1 + Et},$$

d'où nous tirons

$$\frac{dp}{dt} = \frac{Ep}{1 + Et}.$$

L'équation (14) deviendra, par suite,

$$(24) \quad \frac{dN}{dv} = \frac{d \left[\frac{Ep}{\mu(1 + Et)} - \frac{p}{J} \right]}{dt},$$

résultat particulier à la théorie dynamique.

L'équation (16) deviendra également

$$(25) \quad K - N = \frac{E^2 \cdot p v}{\mu(1 + Et)^2},$$

expression qui s'accorde avec le résultat du n° 33 de notre premier travail. Si V représente le volume du gaz à la température de 0 degré et sous l'unité de pression, l'équation (25) devient

$$(26) \quad K - N = \frac{E^2 V}{\mu(1 + Et)}.$$

32. Toutes les conclusions de M. Clausius, en ce qui concerne l'air ou les gaz, peuvent s'obtenir immédiatement au moyen des équations précédentes, en prenant

$$\mu = J \frac{E}{1 + Et},$$

ce qui donnera

$$\frac{dN}{dv} = 0,$$

et en supposant, comme lui, que la valeur de N , déjà indépendante de la densité du

gaz en raison de cette dernière équation, est également indépendante de la température.

53. Pour faire une dernière application des équations fondamentales de la théorie dynamique, supposons que le milieu, pour lequel on a défini les quantités M et N , soit composé du poids $1-x$ d'une substance dans un certain état, et du poids x de la même substance dans un autre état, à la même température, mais contenant une plus grande quantité de chaleur latente. Pour fixer les idées et éviter les circonlocutions, nous supposerons que la première portion est à l'état liquide, et la seconde partie à l'état gazeux; mais, comme on le verra, tout ce que nous dirons s'applique également au cas d'un solide en contact avec la même substance, soit à l'état liquide, soit à l'état gazeux.

54. Supposons que v et t soient respectivement le volume et la température du milieu considéré dans son ensemble; nous aurons

$$(27) \quad \lambda(1-x) + \gamma x = v,$$

si λ et γ représentent respectivement les volumes de l'unité de poids de la substance dans ses deux états; d'un autre côté, la pression p peut être considérée comme étant une fonction de t dépendante uniquement de la nature de la substance considérée. Pour exprimer les valeurs de M et de N pour le milieu composé dont il s'agit, appelons L la chaleur latente de l'unité de poids de la vapeur, c la chaleur spécifique du liquide, et h la chaleur spécifique de la vapeur maintenue à l'état de saturation; nous aurons

$$M dv = L \frac{dx}{dv} dv,$$

$$N dt = c(1-x) dt + h x dt + L \frac{dx}{dt} dt.$$

Or l'équation (27) nous donnera

$$(28) \quad (\gamma - \lambda) \frac{dx}{dv} = 1$$

et

$$(29) \quad (\gamma - \lambda) \frac{dx}{dt} + (1-x) \frac{d\lambda}{dt} + x \frac{d\gamma}{dt} = 0;$$

on en tire donc

$$(30) \quad M = \frac{L}{\gamma - \lambda},$$

$$(31) \quad N = c(1-x) + hx - L \frac{(1-x) \frac{d\lambda}{dt} + x \frac{d\gamma}{dt}}{\gamma - \lambda}.$$

55. L'expression de la deuxième proposition fondamentale devient, dans ce cas,

$$(32) \quad \mu = \frac{(\gamma - \lambda) \frac{dp}{dt}}{L},$$

équation qui s'accorde avec le résultat original de Carnot, et qui n'est autre chose que la formule, mentionnée ci-dessus au n° 51, qui nous a servi à déterminer μ au moyen des observations de M. Regnault sur la vapeur d'eau.

56. Pour obtenir la conclusion qu'on peut tirer de la première proposition fondamentale, nous différentierons, par rapport à t et v , les deux valeurs ci-dessus de M et de N , et nous aurons

$$\frac{dM}{dt} = \frac{1}{\gamma - \lambda} \cdot \frac{dL}{dt} - \frac{L}{(\gamma - \lambda)^2} \cdot \frac{d(\gamma - \lambda)}{dt},$$

$$\frac{dN}{dv} = \left(h - c - L \frac{\frac{d\gamma}{dt} - \frac{d\lambda}{dt}}{\gamma - \lambda} \right) \frac{dx}{dv} = \left[\frac{h - c}{\gamma - \lambda} - \frac{L}{(\gamma - \lambda)^2} \right] \frac{d(\gamma - \lambda)}{dt}.$$

Par suite, l'équation (2) du n° 20 devient

$$(33) \quad \frac{\frac{dL}{dt} + c - h}{\gamma - \lambda} = \frac{1}{J} \frac{dp}{dt}.$$

Si l'on combine cette équation avec l'expression (32) tirée de la deuxième proposition fondamentale, on aura

$$(34) \quad \frac{dL}{dt} + c - h = \frac{L\mu}{J}.$$

L'équation (33) concorde exactement avec une expression, donnée pour la première fois, par M. Clausius, et la méthode d'investigation précédente est en substance la même que celle employée par ce savant. La deuxième équation diffère d'une autre expression donnée également par M. Clausius, seulement en ce sens qu'elle n'implique aucune hypothèse relativement à la forme de la fonction μ de Carnot.

57. Si nous supposons les quantités μ et L connues pour une certaine température quelconque, l'équation (32) nous donnera le moyen de déterminer la valeur de $\frac{dp}{dt}$ pour cette température; par suite, si nous en tirons la valeur de dt , nous aurons

$$(35) \quad dt = \frac{\gamma - \lambda}{\mu L} dp,$$

expression qui montre quel changement produit la pression sur le point d'ébullition du liquide, quand le milieu est composé d'un liquide et de sa vapeur, ou sur le point de fusion du solide, quand le milieu consiste en un solide en contact avec la même substance à l'état liquide. Cette expression s'accorde avec la conclusion à laquelle est arrivé notre frère aîné dans ses *Recherches théoriques sur l'effet d'abaissement que produit la pression sur le point de congélation de l'eau* [*]. Le résultat qu'il a obtenu en

[*] *Transactions*, vol. XVI, cinquième partie. Son travail a été publié de nouveau, avec de légères modifications, dans le *Journal de Mathématiques de Cambridge et Dublin*, nouvelle série, vol. V.—Novembre 1850.

prenant pour μ la valeur, à la température de 0 degré, qui découle de la Table I de notre premier travail, peut s'énoncer ainsi : Chaque augmentation d'une atmosphère dans la pression produit un abaissement de 0,0075 degré centigrade dans la température du point de congélation. M. Clausius obtient le chiffre 0,00733, avec des données identiques, abstraction faite de μ ; la différence entre ces deux chiffres provient de ce que celui de M. Clausius a été calculé avec une formule qui suppose implicitement pour μ la valeur hypothétique $J \frac{E}{1 + Et}$. C'est en appliquant l'équation (33) à

la détermination de la quantité $\frac{dL}{dt}$, pour le même cas, que M. Clausius est arrivé au curieux résultat, mentionné au n° 43, au sujet de la chaleur latente de l'eau soumise à une pression extérieure.

33. Enfin, on doit remarquer que toutes les quantités, à l'exception de h , qui entrent dans l'équation (33), sont connues avec une exactitude assez satisfaisante, en ce qui concerne la vapeur d'eau, dans des limites assez étendues de la température ; cette équation peut donc nous servir à déterminer h , quantité qui n'a, jusqu'à présent, fait le sujet d'aucune recherche expérimentale. Nous avons ainsi

$$-h = \frac{\gamma - \lambda}{J} \frac{dp}{dt} - \left(\frac{dL}{dt} + c \right),$$

expression dans laquelle on doit prendre pour γ les meilleures valeurs connues de la densité de la vapeur d'eau saturée. Si, pour le calcul de cette densité à différentes températures, nous avons recours aux lois des gaz, en prenant pour point de départ le chiffre $\frac{1}{1693,5}$ pour la densité à 100 degrés, et en nous servant des pressions déterminées par M. Regnault, les valeurs du premier terme du second membre de l'équation précédente seront les mêmes que si nous les mettions sous la forme suivante, tirée de l'expression (34),

$$-h = \frac{L\mu}{J} - \left(\frac{dL}{dt} + c \right),$$

et employions les valeurs de μ que l'on trouve dans la Table I de notre premier travail. Les valeurs de $-h$, inscrites dans le tableau suivant, ont été calculées par ce procédé, et, de plus, en utilisant les données suivantes fournies par M. Regnault et déduites de ses expériences sur la chaleur totale de la vapeur et sur la chaleur spécifique de l'eau,

$$\frac{dL}{dt} + c = 0,305,$$

$$L = 606,5 + 0,305t - (0,00002.t^2 + 0,0000003.t^3).$$

Les valeurs de $-h$, inscrites dans la troisième colonne du tableau, sont celles obtenues

par M. Clausius au moyen d'une équation identique avec l'expression sous laquelle se présenterait l'équation (34) si l'on y substituait pour μ la valeur $J \frac{E}{1 + Et}$.

t	VALEURS DE $-h$ suivant la Table I du <i>Rapport sur la théorie</i> <i>de Carnot.</i>	VALEURS DE $-h$ suivant M. Clausius
0	1,863	1,916
50	1,479	1,465
100	1,174	1,133
150	0,951	0,879
200	0,780	0,676

39. D'après ces résultats, il paraît que la quantité h est négative dans toute l'étendue de l'échelle thermométrique à laquelle se rapportent les expériences; conséquemment, si l'on comprime une certaine quantité de vapeur saturée dans un vase où il n'existe pas d'eau à l'état liquide, il faudra continuellement lui enlever de la chaleur pour que cette vapeur reste à l'état de saturation, à mesure que sa température s'élèvera; et inversement, si on laisse se dilater en vase clos de la vapeur saturée, il faudra lui fournir de la chaleur pour empêcher une partie de cette vapeur de se transformer en liquide, à mesure que sa température s'abaissera. Cette conclusion extrêmement remarquable a été énoncée, pour la première fois, par M. Rankine dans le travail qu'il a communiqué à la Société le 4 février de l'année dernière; elle a été découverte en même temps par M. Clausius, et publiée dans le Mémoire qu'il a inséré dans les *Annales de Pogendorff*, aux mois d'avril et de mai de la même année.

60. On pourrait croire, à première vue, qu'il y a contradiction, d'une part, entre ce fait bien connu, que la vapeur s'échappant à l'air libre, à travers un petit orifice, d'une chaudière à haute pression, ne brûle pas en la mouillant, la main qu'on expose au courant [*], et, d'autre part, cette proposition, que de la vapeur, se dilatant à partir de l'état de saturation, a besoin qu'on lui fournisse de la chaleur pour l'empêcher de se

[*] [Note ajoutée le 26 juin 1852.] A présent, je suis porté à croire que la vitesse du courant dans ces circonstances exerce une grande influence sur la sensation, en faisant un mélange de la vapeur avec l'air environnant. En effet, j'ai trouvé que la main souffre de la douleur quand on l'expose à un courant de la vapeur émise d'une chaudière ordinaire à pression atmosphérique, même si l'on fait passer la vapeur à travers un tuyau en cuivre, appliqué à la bouche de la chaudière et entouré de sources de chaleur pour dessécher la vapeur. Mais s'il peut y avoir de l'incertitude sur les causes des sensations diverses dans les diverses circonstances, je ne crois pas qu'il puisse y en avoir sur le fait de la sécheresse du courant près de l'orifice d'une chaudière à haute pression, ni sur l'exactitude de l'explication que j'ai donnée de ce fait, dans la Lettre à M. Joule.

condenser en partie; puisque, en effet, la vapeur s'échappant ainsi, échaufferait la main si elle n'était pas complètement sèche, et conséquemment, si elle n'était pas à une température supérieure à celle de l'ébullition. Voici l'explication de cette difficulté apparente, telle que nous l'avons donnée dans une Lettre écrite par nous à M. Joule en octobre dernier, et publiée dans le *Philosophical Magazine*: La vapeur, en se précipitant à travers l'orifice, produit un effet mécanique qui est immédiatement perdu en frottement du fluide, et qui est, par conséquent, retransformé en chaleur; de la sorte, la vapeur, sortant à la pression atmosphérique, aurait à céder, pour se convertir en eau à 100 degrés, autant de chaleur qu'elle en céderait si elle était d'abord condensée à la haute pression de la chaudière, et si, après coup, sa température était ramenée à 100 degrés: or la chaleur cédée, dans ce dernier cas, par une livre de vapeur saturée ayant la température t dans son état initial, est supérieure (suivant la loi de Watt modifiée par M. Regnault), de la quantité $0,305 \times (t - 100)$, à la chaleur que la vapeur saturée à 100 degrés devrait abandonner pour être réduite en liquide; conséquemment, la vapeur sortante doit avoir une température supérieure à 100 degrés, et, par suite, elle doit être sèche.

II.

Mémoire sur une méthode de déterminer par l'expérience la relation qui existe entre le travail dépensé et la chaleur produite dans la compression d'un gaz.

(Mémoire lu 21 avril 1851.)

61. Les recherches importantes de M. Joule sur les circonstances thermiques qui accompagnent la dilatation et la compression de l'air, le mode admirable de raisonnement qu'il expose à ce sujet dans son travail *Sur les changements de température produits par la raréfaction et la condensation de l'air* [*], et principalement le moyen qu'il emploie pour tenir compte de tout l'effet mécanique qui peut se produire extérieurement, ou se perdre intérieurement en frottements du fluide, ont introduit une méthode tout à fait nouvelle de traiter les questions relatives aux propriétés physiques des fluides. L'objet du présent Mémoire est de faire voir comment, au moyen de cette méthode, et en s'appuyant sur les principes exposés dans notre précédent travail, on peut établir une théorie complète des phénomènes observés par M. Joule, et de signaler quelques-uns des résultats qu'il y aurait à obtenir en continuant et en étendant ses recherches expérimentales.

[*] *Philosophical Magazine*, mai 1845, vol. XXVI, page 369.

62. L'Appendice à notre *Rapport sur la théorie de Carnot* [*] contient une étude théorique sur la chaleur développée par la compression d'un fluide quelconque satisfaisant aux lois de Boyle et Mariotte et de Gay-Lussac [**]. Il a été démontré, depuis, que nos conclusions ne demandaient aucune modification quand on adoptait la théorie dynamique de la chaleur; par suite, les formules auxquelles nous sommes parvenu doivent être regardées comme s'appliquant rigoureusement aux fluides de l'espèce considérée, indépendamment de toute hypothèse. L'on peut obtenir de la manière suivante des formules analogues pour les fluides ne satisfaisant pas aux lois des gaz, et pour les solides soumis à une pression uniforme dans tous les sens.

63. Soit $M dv$ la quantité de chaleur absorbée par un corps maintenu à une température constante t , lorsque son volume augmente de v à $v + dv$; soit p la pression uniforme exercée extérieurement sur le corps, quand le volume est v et la température t ; soit enfin $p + \frac{dp}{dt} dt$ la valeur que prendrait p si la température était portée à $t + dt$, le volume restant invariable. Nous aurons alors, par suite de l'équation (3) du n° 24 de notre premier travail, laquelle est la conséquence d'une extension donnée par M. Clausius à la théorie de Carnot, l'expression

$$(a) \quad M = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dt} [***],$$

dans laquelle μ est la fonction de Carnot, identique pour toutes les substances à la même température.

Supposons maintenant que le corps se dilate en passant du volume V au volume V' , et qu'étant maintenu constamment à la température t , il absorbe une quantité H de chaleur; on a alors

$$(b) \quad H = \int_V^{V'} M dv = \frac{1}{\mu} \frac{d}{dt} \int_V^{V'} p dv.$$

Mais si nous appelons W le travail mécanique que produit la substance pendant son expansion, nous aurons

$$(c) \quad W = \int_V^{V'} p dv,$$

et, par suite,

$$(d) \quad H = \frac{1}{\mu} \frac{dW}{dt}.$$

[*] *Transactions*, vol. XVI, cinquième partie.

[**] Pour éviter à l'avenir les circonlocutions, nous appellerons ces lois les *lois des gaz* ou les *lois de la densité des gaz*.

[***] Dans toute l'étendue de ce Mémoire, les formules qui n'impliquent l'existence d'aucune hypothèse sont désignées par des lettres; celles qui supposent l'existence des *lois des gaz* sont numérotées en chiffres arabes; enfin, celles qui supposent, en outre, l'hypothèse de M. Mayer sont distinguées par des chiffres romains.

Cette formule, établie sans le secours d'aucune supposition sujette à contestation, exprime la relation qui existe entre la chaleur développée par la compression d'une substance quelconque et le travail nécessaire pour opérer cette compression, autant qu'il est possible de le faire, sans l'aide d'aucune hypothèse, au moyen de considérations purement théoriques.

64. La formule précédente conduit à celle que nous avons donnée autrefois pour le cas des fluides satisfaisant aux lois de la densité des gaz; en effet, pour ce cas, nous avons

$$(1) \quad p v = p_0 v_0 (1 + E t),$$

d'où nous déduisons, au moyen de la formule (c),

$$(2) \quad W = p_0 v_0 (1 + E t) \log \frac{V'}{V}$$

et

$$(3) \quad \frac{dW}{dt} = E p_0 v_0 \log \frac{V'}{V} = \frac{E}{1 + E t} W.$$

Et conséquemment, par suite de l'équation (d), on a

$$(4) \quad H = \frac{E}{\mu (1 + E t)} \cdot W,$$

équation qui concorde avec l'expression (11) du n° 49 de notre premier travail.

65. Nous concluons de là que la chaleur, dégagée par un fluide satisfaisant aux lois de la densité des gaz, est proportionnelle au travail dépensé pour opérer la compression à une température constante quelconque; mais que la quantité de travail nécessaire pour produire l'unité de chaleur n'est pas la même pour toutes les températures, à moins que la valeur de la fonction de Carnot ne varie en raison inverse de la quantité $1 + E t$; nous en concluons, enfin, que cette quantité de travail n'est pas le simple équivalent mécanique de la chaleur dépensée, comme l'a supposé M. Mayer sans motif plausible [*], à moins que ladite fonction n'ait précisément pour valeur

$$(1) \quad \mu = J \frac{E}{1 + E t}.$$

Cette formule nous a été suggérée par M. Joule, dans une Lettre du 9 décembre 1848, comme étant probablement la valeur exacte de μ , par la raison qu'elle est nécessaire pour mettre d'accord, d'une part, l'expression déduite de la théorie de Carnot qui

[*] Cette supposition est, en effet, contraire au principe important de Carnot, d'après lequel une action thermique et un effet mécanique, ou une action mécanique et un effet thermique, ne peuvent pas être regardés comme liés par la simple relation de la cause à l'effet, quand il intervient finalement tout autre effet, tel, par exemple, qu'un changement dans la densité du corps.

représente la quantité de chaleur développée dans la compression des gaz en fonction du travail dépensé, et, d'autre part, l'hypothèse qu'a adoptée ce physicien, parce qu'elle est vérifiée, au moins approximativement, par ses propres observations, et laquelle consiste à admettre que le travail dépensé est rigoureusement l'équivalent mécanique de la chaleur développée. Cette formule, que nous appellerons *hypothèse de M. Mayer*, du nom de celui qui l'a le premier énoncée, M. Clausius l'a également adoptée, sans aucune raison tirée de l'expérience; et, par suite, c'est une expression de μ , identique avec la fonction citée plus haut, qui sert de base à toutes ses déductions mathématiques au sujet de la puissance motrice de la chaleur. L'équation (4) fait voir que si cette hypothèse est vraie, à une certaine température, pour un fluide quelconque soumis aux lois des gaz, elle doit être vraie, à la même température, pour tous les fluides satisfaisant à la même condition.

66. Il résulte des formules précédentes que, parmi toutes les recherches expérimentales susceptibles d'apporter des preuves à l'appui de l'hypothèse de M. Mayer, on doit considérer comme pouvant atteindre complètement ce but, celles qui, conjointement avec une seule détermination exacte de J , fourniraient des données nécessaires pour établir la valeur de μ dans des limites étendues de la température. Aussi, parmi toutes les expériences qu'on pourrait se proposer à ce sujet, celles-là contribueraient peut-être plus que toutes autres au progrès de la théorie dynamique de la chaleur, qui consisteraient à déterminer la densité de la vapeur saturée pour toutes les températures comprises entre 0 et 230 degrés, et qui complèteraient ainsi, avec les résultats déjà publiés de M. Regnault, les données nécessaires pour calculer les valeurs de μ dans cette étendue de l'échelle thermométrique.

67. Les valeurs de μ , données dans la Table I de notre *Rapport sur la théorie de Carnot*, lesquelles ont été obtenues au moyen des observations de M. Regnault sur la vapeur d'eau, en supposant, d'une part, que le chiffre $\frac{1}{1693,5}$ (la densité maximum de l'eau étant prise pour unité) représente la densité de la vapeur saturée à 100 degrés, et, d'autre part, en employant les lois des gaz pour conclure des pressions observées par M. Regnault la densité à d'autres températures, ces valeurs de μ , disons-nous, sont loin de vérifier l'équation (1), comme on le voit dans la Table des valeurs de $\frac{\mu(1 + Et)}{E}$, contenue dans le n° 34 de notre précédent travail, ou comme le montre la Table comparative suivante :

I. TEMPÉRATURE <i>t</i> .	II. VALEURS DE μ , en supposant que la densité de la vapeur d'eau est calculée comme ci-dessus [μ].	III. VALEURS DE μ , d'après la formule de M. Joule $J \frac{E}{1 + Et}$	IV. VALEURS DE μ , d'après l'hypothèse modifiée sur la densité de la vapeur saturée $\frac{1717,6}{1693,5} \times [\mu]$
0	4,967	5,087	5,038
10	4,832	4,908	4,901
20	4,703	4,740	4,769
30	4,578	4,584	4,643
40	4,456	4,458	4,519
50	4,337	4,300	4,399
60	4,221	4,170	4,281
70	4,114	4,050	4,172
80	4,013	3,935	4,070
90	3,921	3,827	3,977
100	3,833	3,724	3,887
110	3,753	3,627	3,806
120	3,679	3,535	3,731
130	3,611	3,447	3,662
140	3,546	3,364	3,596
150	3,487	3,284	3,536
160	3,432	3,209	3,481
170	3,382	3,136	3,430
180	3,335	3,067	3,382
190	3,289	3,001	3,336
200	3,247	2,937	3,295
210	3,208	2,876	3,254
220	3,171	2,818	3,216
230	3,135	2,762	3,179

Lorsque nous lui fîmes remarquer ces différences, en 1848, M. Joule nous répondit que, même entre 0 et 100 degrés, le peu d'exactitude des données que l'on possède sur la vapeur d'eau suffisait pour les expliquer. Nous ne pensons pas que, généralement, on admette une telle inexactitude dans la partie de ces données que l'on doit aux observations de M. Regnault; par suite, il ne reste plus que l'incertitude qui règne, dans l'état actuel de la science, sur la densité de la vapeur saturée, pour empêcher de conclure définitivement que la valeur de μ ne peut pas être représentée par l'expression $J \frac{E}{1 + Et}$; il résulte de là que l'hypothèse de M. Mayer sera confirmée (ou ruinée dans le cas contraire), si la densité de la vapeur saturée, au lieu de suivre les lois des gaz,

peut être réellement représentée par les équations

$$(II) \quad \begin{cases} \sigma = \frac{\left(\frac{1}{E} + t\right) [\mu]}{J} [\sigma], \\ [\sigma] = \frac{1}{1693,5} \cdot \frac{1 + E \times 100}{1 + Et} \cdot \frac{P}{\varpi}. \end{cases}$$

dans lesquelles $[\mu]$ désigne les quantités correspondantes aux températures 0, 1, 2, ..., 230 degrés qu'on trouve dans la Table I de notre *Rapport sur la théorie de Carnot*; $[\sigma]$ désigne la densité de la vapeur saturée, telle qu'elle a été supposée dans les calculs de cette Table, les valeurs de $\frac{P}{\varpi}$, employées dans ces calculs, étant d'ailleurs le quotient de la division par 760, des chiffres contenus dans la Table finale du huitième Mémoire de M. Regnault. Les variations considérables aux lois des gaz qu'indiquent les équations (II) ressortent clairement, en comparant, d'une part, dans la Table précédente, les chiffres de la colonne II avec ceux de la colonne III, et en observant, d'autre part, que le coefficient de $[\sigma]$ dans les équations (II) s'obtient, pour chacune des températures de la Table, en divisant les nombres de la colonne II par ceux correspondants de la colonne III. La colonne IV donne les valeurs de μ , telles qu'elles seraient si la densité de la vapeur saturée à 100 degrés était $\frac{1}{1717,6}$ au lieu de $\frac{1}{1693,5}$, et si, pour les autres températures, elle était calculée au moyen des lois des gaz.

68. Ce sujet a été étudié avec beaucoup de soin par M. Clausius, qui a fait voir les déviations considérables aux lois de la densité des gaz qu'exige l'hypothèse de M. Mayer dans la densité de la vapeur d'eau saturée, et qui a donné, pour cette densité, une formule empirique fondée, d'une part, sur cette hypothèse, et, d'autre part, sur les observations de M. Regnault au sujet de la pression et de la chaleur latente. Faute de données expérimentales, la théorie ne peut aller plus loin dans cette direction; cependant, d'après ce que nous savons des gaz et des vapeurs saturées, il est permis de douter qu'une hypothèse qui ne repose sur aucune preuve expérimentale suffise pour donner quelque probabilité à des déviations aussi considérables aux lois des gaz, en ce qui concerne la vapeur d'eau [*].

69. Nous devons à M. Joule une série d'expériences très-importantes sur la relation qui existe entre les effets thermaux, les effets mécaniques extérieurs et les effets méca-

[*] La vérification expérimentale de l'hypothèse de M. Mayer, faite par M. Joule pour des températures comprises entre 50 et 60 degrés Fahrenheit, prouve, si elle est rigoureusement exacte, que la densité de la vapeur saturée à 10 degrés centigrades environ, est seulement les $\frac{1693,5}{1717,6}$ de la valeur que nous lui avons supposée dans les calculs de notre premier travail; mais elle ne donne aucune indication d'une déviation des lois des gaz, dans la manière dont la densité de la vapeur d'eau saturée varie avec la température.

riques intérieurs (c'est-à-dire la force vive détruite par le frottement du fluide), qui sont produits pendant la compression ou la dilatation de l'air dans diverses circonstances [*]. Ces recherches présentent des résultats qui, dans l'étendue (de 50 à 60 degrés Fahrenheit) de l'échelle thermométrique où elles ont été faites, sont des vérifications de l'hypothèse de M. Mayer, fondées sur deux méthodes distinctes, l'une et l'autre parfaites en principe, et qui pourraient servir de base à des expériences pour une température quelconque.

70. La première de ces méthodes consiste simplement à déterminer, par l'observation directe, la chaleur développée pendant la dépense d'une quantité donnée de travail que l'on emploie à comprimer de l'air, et à comparer cette chaleur avec celle qui est engendrée par la même quantité de travail, dans les expériences originales de M. Joule sur la chaleur développée par l'action magnéto-électrique, ou par le frottement des fluides en mouvement.

71. La seconde méthode est particulièrement remarquable en ce qu'elle fournit pour l'air, dans chaque expérience séparée, un moyen de vérifier l'hypothèse de M. Mayer pour la température expérimentée, sans qu'on ait besoin de connaître la valeur absolue de l'équivalent mécanique de la chaleur. Dans ces expériences de M. Joule, la vérification en question consiste dans la détermination de la totalité de l'effet thermal extérieur qui est produit, lorsque de l'air passe en se dilatant, à travers un petit orifice, d'un récipient dans un autre où l'on a fait préalablement le vide au moyen d'une machine pneumatique (*air pump*). Dans ces circonstances, le premier effet produit par l'expansion du gaz est la force vive engendrée pendant le mouvement rapide de l'air. Après que l'équilibre est rétabli, tout cet effet mécanique s'est perdu en frottements du fluide (car il n'y a pas d'effet mécanique appréciable produit extérieurement sous forme de son, seul effet mécanique extérieur, autre que la chaleur, qui puisse être le résultat des mouvements d'un fluide dans l'intérieur d'un vase rigide); d'un autre côté, il n'est pas, dans les sciences physiques, de vérité mieux établie que la proposition suivante : Jusqu'au moment où l'équilibre thermal, aussi bien que l'équilibre mécanique, se rétablit à la température primitive, la quantité de chaleur qui sera cédée par le fluide contenu dans les deux récipients devra être supérieure à celle (une quantité négative) qui serait cédée si l'air, pendant son expansion, faisait mouvoir un piston à l'encontre d'une résistance extérieure, de toute la quantité que représente l'équivalent thermal de l'effet mécanique qui serait produit par ce piston. Par suite, si les deux récipients et le tube qui les réunit sont plongés (comme dans la première série des expériences de M. Joule), dans un vase plein d'eau, et si, lorsque la pression et la température de l'air seront devenues identiques dans les deux vases, on trouve que l'eau n'a cédé ni absorbé aucune quantité de chaleur, on doit en conclure que l'hypothèse de M. Mayer est vraie pour la température de l'expérience (naturellement il demeure entendu que, pendant toute la durée de l'expérience, l'air et les corps environ-

[*] *Philosophical Magazine*, mai 1845.

nants devront avoir gardé une température absolument constante); mais s'il se manifeste dans l'eau une élévation ou un abaissement quelconque de température, ce sera une preuve que le travail dû à l'expansion est plus grand ou plus petit que la valeur absolue de l'équivalent de la chaleur absorbée.

72. La seconde expérience, exécutée par M. Joule avec le même appareil, et dans laquelle il examine séparément les effets thermaux produits extérieurement autour des deux récipients et autour de la partie du tube qui contient le petit orifice (un robinet d'arrêt), cette expérience nous a suggéré l'idée d'une méthode d'investigation qui nous paraît plus simple et mieux appropriée pour soumettre l'hypothèse de M. Mayer à une épreuve extrêmement délicate, pour une température quelconque. Cette méthode consiste à supprimer les deux récipients de l'appareil de M. Joule, à leur substituer (comme il l'a fait pour l'un d'eux seulement dans sa troisième expérience) deux longs tubes en spirale, et à faire passer de force et d'une manière continue, de l'air dans tout le système. La première partie spirale du tube, jusqu'à une courte distance de l'orifice, doit être maintenue à une température aussi voisine que possible de celle de l'atmosphère qui entoure la portion contenant le petit orifice, et cela dans le but unique de bien fixer la température de l'air entrant. Les considérations suivantes ont pour objet de faire voir à quelles conclusions pourrait conduire l'observation expérimentale des phénomènes thermaux que présenterait un fluide quelconque traité par la méthode en question.

73. Soient p la pression uniforme de fluide dans la première spirale, jusqu'à une courte distance de l'orifice, et p' la pression, également à une courte distance de l'orifice, mais du côté opposé, laquelle sera uniforme tout le long de la deuxième spirale. Appelons t la température extérieure, et faisons en sorte que l'air, dans les deux spirales, soit autant que possible à cette même température. S'il se produit dans le fluide, à son passage dans l'orifice, une élévation ou un abaissement quelconque de la température, ce ne peut être qu'après avoir parcouru une longueur assez considérable de la deuxième spirale, que le gaz reprendra sensiblement la température t ; par suite, cette spirale devra être assez longue pour que la température mesurée avec une grande exactitude, à la sortie par l'extrémité du tube, ne diffère pas d'une manière appréciable de la température primitive t .

74. Soit H la quantité totale de chaleur émise par la portion du tube qui contient l'orifice et la deuxième spirale, pendant le passage d'un volume u de gaz dans la première spirale, ou pendant le passage d'un volume équivalent u' dans la partie de la deuxième spirale où la température est sensiblement égale à t ; cette quantité sera composée de deux parties : l'une (positive) sera la chaleur produite par le frottement du fluide; l'autre (négative) proviendra du fait de l'expansion du fluide dans son passage d'un côté à l'autre de l'orifice. Pour déterminer ces deux quantités partielles de chaleur, supposons d'abord que le transport du fluide se fasse sans qu'il y ait perte d'effet mécanique en frottements intérieurs, comme il arriverait si, au lieu de séparer le fluide en

deux parties à des pressions différentes, au moyen d'un petit orifice, on opérerait cette séparation au moyen d'un piston mobile, et, en outre, si, après avoir renfermé, entre ce piston et un deuxième piston, un volume u de gaz pris du côté où la pression est la plus élevée p , on faisait, d'une part, glisser le système dans l'intérieur du tube jusqu'à ce que le deuxième piston ait pris la place du premier, et si, d'autre part, on laissait en même temps se dilater le volume u jusqu'à ce qu'il soit devenu u' . Cela fait, adoptons, en ce qui concerne le volume v de la substance renfermée entre les pistons et maintenue à une température constante, la notation qui nous a déjà servi dans le présent travail et dans notre précédente publication; nous aurons alors, pour la quantité de chaleur absorbée pendant le mouvement de piston,

$$\int_u^{u'} M dv,$$

ou, d'après la deuxième équation fondamentale de la théorie dynamique, équation (3) du n° 21 du Mémoire précédent,

$$\frac{1}{\mu} \int_u^{u'} \frac{d\varpi}{dt} dv,$$

expression dans laquelle ϖ représente la pression de la substance (dont la valeur est comprise entre p et p') quand son volume est quelconque v . D'un autre côté, le travail exécuté par les pistons sera donné par l'équation

$$(e) \quad W = \int_u^{u'} \varpi dv + pu - p'u'.$$

Si maintenant le transport de la substance d'une partie du tube où la pression est p , à celle où elle est p' , se fait à travers un petit orifice, la valeur totale de W représentera exactement la quantité de travail qui sera perdue comme effet mécanique, et qui sera employée à engendrer de la *force vive thermique*. La quantité de chaleur ainsi produite sera

$$\frac{1}{J} \left[\int_u^{u'} \varpi dv + pu - p'u' \right].$$

Par suite, la quantité totale de chaleur émise sera l'excès de la valeur de cette dernière expression sur la valeur de celle que nous avons trouvée plus haut pour représenter la chaleur absorbée lorsque l'effet mécanique est entièrement extérieur; nous aurons donc

$$(f) \quad H = \frac{1}{J} \left[\int_u^{u'} \varpi dv + pu - p'u' \right] - \frac{1}{\mu} \int_u^{u'} \frac{d\varpi}{dt} dv.$$

Quelques changements de température que l'air subisse dans l'orifice même ou dans son voisinage, cette expression représentera rigoureusement la quantité totale de chaleur qui sera émise par la portion du tube qui contient l'orifice et toute la seconde spirale, pendant le passage d'un volume u dans la première spirale, ou d'un volume u' dans la partie de la seconde spirale où la température est sensiblement t .

75. Pour appliquer ce résultat au cas d'un fluide satisfaisant aux lois des gaz, nous pouvons poser

$$pu = p' u';$$

par suite, l'équation (e) devient

$$(5) \quad W = \int_u^{u'} \pi dv = pu \cdot \log \frac{u'}{u} = p' u' \log \frac{p}{p'}.$$

D'un autre côté, par suite de l'équation (3), nous avons

$$\frac{dW}{dt} = \frac{Epu}{1+Et} \log \frac{u'}{u} = \frac{EW}{1+Et}.$$

Par suite, l'expression (f) de la chaleur émise devient

$$(6) \quad H = \left[\frac{1}{J} - \frac{E}{\mu(1+Et)} \right] W.$$

76. Enfin, si l'hypothèse de M. Mayer est applicable au gaz employé dans l'expérience, en conséquence de l'équation (I), on aura

$$(III) \quad H = 0.$$

77. Il résulte de l'équation (III), que si l'hypothèse de M. Mayer est vraie, il n'y aura besoin, après tout, ni d'une émission ni d'une absorption de chaleur pour ramener la température de l'air, après son passage dans l'orifice à sa température primitive t . Conséquemment, et quoiqu'il se produise, sans aucun doute, à chaque instant, d'une part, un refroidissement dans les parties de l'air voisines de l'orifice, qui communiquent, par suite de leur expansion, de la force vive aux particules contiguës, et, d'autre part, un échauffement dans les particules qui sont la cause des pertes de force vive qu'éprouvent les parties voisines sous forme de frottement du fluide; cependant, très-près de l'orifice et de chaque côté, là où le mouvement de l'air est uniforme, la température restera constamment égale à t . Il en résulte que l'épreuve la plus simple à laquelle on pourrait soumettre l'hypothèse en question, consisterait à s'assurer si la température de l'air est exactement la même des deux côtés de l'orifice. Cette expérience pourrait se faire au moyen de thermomètres très-sensibles, ajustés dans le tube, de chaque côté de l'orifice, et à des distances suffisantes pour qu'ils soient en dehors du mouvement rapide de l'air qui a lieu dans le voisinage immédiat dudit orifice; on pourrait aussi, dans le même but, recourir à un procédé encore plus délicat [*], qui consisterait à employer un galvanomètre très-sensible et une petite batterie thermo-électrique disposée de telle sorte que les soudures alternatives (*one set of solderings*) purent être placées dans le tube du côté du courant d'air entrant, et que les autres furent aussi dans le tube, mais du côté opposé de l'orifice. Dans ce

[*] [Note ajoutée le 23 juin 1852.] A présent, il me semble que ce procédé n'aurait aucun avantage sur l'autre; mais, au contraire, que celui-là, dans lequel on se sert de thermomètres, est le seul des deux dont on doive user.

cas, le tube contenant l'orifice devrait être recourbé pour rapprocher entre elles les portions à chaque côté dudit orifice, autant qu'il serait nécessaire pour l'installation requise. La seule difficulté que nous entrevoyons dans l'exécution de ces dispositions, c'est celle que présentera le joint qu'il faudra faire à l'extrémité de la batterie exposée à l'air à haute pression, pour la rendre impénétrable à l'air. La première idée qui s'était présentée à notre esprit était de placer la petite batterie elle-même tout entière dans l'intérieur du tube, et pour obtenir la différence requise de pression entre les deux parties du gaz, de luter imparfaitement le contour, avec de la cire ou autrement, de manière à laisser un mince passage à l'air; mais cet arrangement ne serait pas satisfaisant, parce que certains éléments de la batterie, sinon les extrémités elles-mêmes, subiraient des changements de température (l'hypothèse de M. Mayer fût-elle rigoureusement vraie), par suite du mouvement rapide de l'air au milieu de ces éléments. Pour être dans de bonnes conditions, il faut que la batterie ne soit pas exposée au mouvement de l'air qui a lieu dans le voisinage de l'orifice; par conséquent, la partie centrale de la batterie devra être placée en dehors du tube, et les extrémités devront être lutées dans les parois du tube, avec un mastic suffisamment solide et compacte pour rendre le joint parfaitement étendu du côté où la pression diffère de celle de l'atmosphère. Avec de tels moyens, nous pensons qu'on pourra facilement exécuter une série d'expériences propres à fournir des lumières certaines sur la vérité de l'hypothèse de M. Mayer, dans des limites très-étendues de la température.

78. Si cette méthode d'investigation accuse une différence de température quelconque entre les côtés de l'orifice, il restera démontré que l'hypothèse de M. Mayer n'est pas exacte; et, suivant que l'air sortant de l'orifice sera à une température plus élevée ou plus basse que l'air entrant, on en conclura que la chaleur absorbée, quand de l'air se dilate à une température constante, est plus petite ou plus grande que l'effet mécanique produit par l'expansion.

79. Dans ce cas, on pourrait employer des méthodes calorimétriques semblables à celles de M. Joule pour déterminer la quantité de chaleur qui est émise ou absorbée par l'air, dans le voisinage de l'orifice ou dans la deuxième spirale, jusqu'au moment où sa température redevient celle du courant à son entrée; et il est probable qu'en opérant avec beaucoup de soin, on obtiendrait des résultats extrêmement exacts pour une grande étendue de l'échelle thermométrique.

80. Le résultat de chaque expérience permettrait de calculer une valeur de μ en fonction de l'équivalent mécanique de M. Joule, au moyen de l'équation suivante, déduite des expressions (5) et (6),

$$(7) \quad \mu = \frac{\frac{JE}{1 + Et}}{1 - J \cdot \frac{H}{p' u' \log \frac{p}{p'}}}.$$

Dans le deuxième membre de cette équation, p' désigne la pression de l'air dans la deuxième spirale, laquelle serait celle de l'atmosphère, ou du moins en serait très-voisine, si, comme dans la troisième expérience de M. Joule mentionnée plus haut [*], l'air sortant de la deuxième spirale était mesuré au moyen de l'auge pneumatique (*pneumatic trough*); p désigne la pression dans la première spirale, qui devra être constante et mesurée d'ailleurs avec le plus grand soin; u' est le volume d'air qui sort de l'appareil dans un temps quelconque, et H est la quantité de chaleur émise ou absorbée dans le même temps. L'expérience pourra avoir une durée quelconque, et la valeur de chacune de ces quatre quantités devra être déterminée avec le plus grand soin, de façon à donner autant d'exactitude que possible aux résultats. A ces conditions, aucune méthode d'investigation ne nous paraît mieux appropriée à la détermination des valeurs de la fonction de Carnot, pour différentes températures, en supposant déjà connue la valeur de l'équivalent mécanique de la chaleur.

[*] Et décrite par l'auteur à la page 378 du volume qui contient son Mémoire. (*Philosophical Magazine*, vol. XXVI.)

