

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM ROBERTS

Note sur quelques intégrales transcendentes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 12 (1847), p. 449-456.

[<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12_449_0>](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12_449_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

NOTE

SUR QUELQUES INTÉGRALES TRANSCENDANTES;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

1. La fonction transcendante

$$\int_0^{\varphi} \frac{\log(1 - k^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi,$$

qui dépend, en général, de trois quantités, jouit de la propriété d'être exprimée par des fonctions qui n'en contiennent que deux, à l'instar de l'intégrale elliptique de troisième espèce à paramètre logarithmique. En effet, désignons par u la fonction dont il s'agit, et nous aurons, en la différentiant par rapport à θ ,

$$\frac{du}{d\theta} = 2 \cotang \theta [F(\varphi) - E(-k^2 \sin^2 \theta, \varphi)].$$

Or on a, d'après la découverte célèbre de M. Jacobi (LEGENDRE, tome III, page 154), en désignant par Y la transcendante $\int \frac{E(\varphi) d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$,

$$\begin{aligned} & 2 \cotang \theta [F(\varphi) - E(-k^2 \sin^2 \theta, \varphi)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} [Y(\varphi'') - Y(\varphi') - 2E(\theta) F(\varphi)], \end{aligned}$$

où

$$\varphi' = \text{am}[F(\varphi) - F(\theta)], \quad \varphi'' = \text{am}[F(\varphi) + F(\theta)];$$

en sorte que

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} [Y(\varphi'') - Y(\varphi') - 2E(\theta) F(\varphi)].$$

Mais si l'on regarde φ comme constant, on a

$$\frac{d\varphi'}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi'}} = -\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \quad \frac{d\varphi''}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi''}} = \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}.$$

En intégrant $\frac{du}{d\theta}$ par rapport à θ , il vient donc facilement

$$u = \int \frac{\Upsilon(\varphi') d\varphi'}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi'}} + \int \frac{\Upsilon(\varphi'') d\varphi''}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi''}} - 2F(\varphi) \Upsilon(\theta) + f(\varphi).$$

Maintenant soit $\theta = 0$, ce qui donne $\varphi = \varphi' = \varphi''$; on en conclura

$$f'(\varphi) = -2 \int \frac{\Upsilon(\varphi) d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

d'où l'on déduira finalement

$$\begin{aligned} \int \frac{\log(1-k^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} d\varphi &= \int \frac{\Upsilon(\varphi') d\varphi'}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi'}} \\ &+ \int \frac{\Upsilon(\varphi'') d\varphi''}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi''}} - 2 \int \frac{\Upsilon(\varphi) d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - 2F(\varphi) \Upsilon(\theta), \end{aligned}$$

équation qui constate la propriété énoncée.

On pourrait aussi arriver à l'équation qu'on vient d'obtenir en employant une formule donnée par M. Jacobi (Journal de M. Crelle, tome XV), savoir [*,],

$$\begin{aligned} 2\Upsilon \operatorname{am}(p) + 2\Upsilon \operatorname{am}(q) &= \Upsilon \operatorname{am}(p+q) + \Upsilon \operatorname{am}(p-q) \\ &- \log[1-k^2\sin^2 \operatorname{am}(p)\sin^2 \operatorname{am}(q)], \end{aligned}$$

en la multipliant par dp , et en intégrant ensuite.

2. Il serait intéressant peut-être d'étudier d'une manière approfondie les propriétés de notre nouvelle transcendante $\int \frac{\Upsilon(\varphi) d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$; mais je me suis borné pour le moment à déterminer les valeurs qu'elle prend pour $\varphi = \frac{i\pi}{2}$, i étant un entier quelconque : ces valeurs peuvent s'exprimer assez simplement par des fonctions elliptiques. En effet,

[*] Voir aussi le *Traité élémentaire* de M. VERHULST, page 114.

soient φ et ψ deux amplitudes satisfaisant à l'équation

$$F(k, \varphi) + F(k, \psi) = F(k);$$

ou a, comme on sait,

$$Y(k, \varphi) - Y(k, \psi) + Y(k, \tfrac{1}{2}\pi) = E(k) F(k, \varphi) - \tfrac{1}{2} \log(1 - k^2 \sin^2 \varphi),$$

et, par conséquent, en désignant par la caractéristique Ξ l'intégrale dont nous nous occupons,

$$\begin{aligned} & \Xi(k, \varphi) + \Xi(k, \psi) + Y(k, \tfrac{1}{2}\pi) F(k, \varphi) \\ &= \tfrac{1}{2} E(k) [F(k, \varphi)]^2 - \tfrac{1}{2} \int_0^{\varphi} \frac{\log(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi + C, \end{aligned}$$

ou, parce que la constante C est évidemment égale à $\Xi(k, \tfrac{1}{2}\pi)$,

$$\begin{aligned} & \Xi(k, \varphi) + \Xi(k, \psi) - \Xi(k, \tfrac{1}{2}\pi) \\ &= \tfrac{1}{2} E(k) [F(k, \varphi)]^2 - Y(k, \tfrac{1}{2}\pi) F(k, \varphi) - \tfrac{1}{2} \int_0^{\varphi} \frac{\log(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi. \end{aligned}$$

Si, dans cette formule, on pose à la fois $\varphi = \pi$, $\psi = -\tfrac{1}{2}\pi$, on obtiendra, en se rappelant que Ξ est une fonction impaire, et que

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \frac{\log(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = 2 \log k' F(k), \\ & Y(k, \tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{1}{2} E(k) F(k) - \tfrac{1}{2} \log k', \end{aligned}$$

(k' étant le complément de k , comme de coutume), on obtiendra, dis-je,

$$(a) \quad \Xi(k, \pi) - 2\Xi(k, \tfrac{1}{2}\pi) = E(k) [F(k)]^2.$$

Nous allons maintenant établir une autre relation entre $\Xi(\pi)$ et $\Xi(\tfrac{1}{2}\pi)$, laquelle, combinée avec (a), servira à la complète détermination de ces quantités. Voici comment cela s'effectue.

Désignons cette fois par φ et ψ deux amplitudes satisfaisant à la formule de duplication

$$F(k, \psi) = 2F(k, \varphi),$$

et l'on aura, pour la relation correspondante entre les fonctions Y (LEGENDRE, tome III, page 156),

$$Y(k, \psi) = 4Y(k, \varphi) + \log(1 - k^2 \sin^4 \varphi);$$

par conséquent,

$$\Xi(k, \psi) = 8\Xi(k, \varphi) + 2 \int \frac{\log(1 - k^2 \sin^4 \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi,$$

ce qui donne encore

$$\Xi(k, \pi) = 8\Xi(k, \tfrac{1}{2}\pi) + 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1 - k^2 \sin^4 \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi.$$

Or cette dernière intégrale définie peut être ramenée aux fonctions elliptiques à l'aide de quelques formules que j'ai déjà données dans ce Journal (tome XI, pages 473 et 474). Les voici :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1 + \cotang^2 \theta \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \\ &= \pi F(k', \theta) - 2F(k) Y(k', \theta) - [E(k) - F(k)] [F(k', \theta)]^2 \\ & \quad - 2F(k) \log \sin \theta - \tfrac{1}{2} \pi F(k') - \log k F(k), \\ & \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log[1 - (1 - k'^2 \sin^2 \theta) \sin^2 \varphi]}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \\ &= \pi F(k', \theta) - 2F(k) Y(k', \theta) - [E(k) - F(k)] [F(k', \theta)]^2 \\ & \quad + \log\left(\frac{k'}{k}\right) F(k) - \tfrac{1}{2} \pi F(k'). \end{aligned}$$

Faisons, dans ces équations, $\cotang^2 \theta = k$, ce qui nous donnera

$$F(k', \theta) = \tfrac{1}{2} F(k'), \quad Y(k', \theta) = \tfrac{1}{8} F(k') E(k') - \tfrac{1}{4} \log\left(\frac{2k\sqrt{k}}{1+k}\right),$$

et nous conclurons de la première de nos deux formules :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1 + k \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \\ &= \tfrac{1}{2} \log\left(\frac{2 + 2k}{\sqrt{k}}\right) F(k) - \tfrac{1}{4} F(k') [F(k) E(k') + E(k) F(k') - F(k) F(k')] \\ &= \tfrac{1}{2} \log\left(\frac{2 + 2k}{\sqrt{k}}\right) F(k) - \tfrac{\pi}{8} F(k'); \end{aligned}$$

semblablement on trouvera, en vertu de la seconde,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1 - k \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \tfrac{1}{2} \log\left(\frac{2 - 2k}{\sqrt{k}}\right) F(k) - \tfrac{\pi}{8} F(k'),$$

et, par conséquent,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \frac{1}{2} \log \left(\frac{4k'^2}{k} \right) F(k) - \frac{1}{4} \pi F(k').$$

Donc

$$\Xi(k, \pi) = 8 \Xi(k, \tfrac{1}{2}\pi) + \log \left(\frac{4k'^2}{k} \right) F(k) - \frac{1}{2} \pi F(k'),$$

ce qui est la relation cherchée.

On a donc

$$\Xi(k, \tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{1}{12} \pi F(k') + \tfrac{1}{6} E(k) [F(k)]^2 + \tfrac{1}{6} \log \left(\frac{k}{4k'^2} \right) F(k),$$

$$\Xi(k, \pi) = \tfrac{1}{6} \pi F(k') + \tfrac{4}{3} E(k) [F(k)]^2 + \tfrac{1}{3} \log \left(\frac{k}{4k'^2} \right) F(k).$$

Ayant obtenu les valeurs de $\Xi(\frac{1}{2}\pi)$, $\Xi(\pi)$, on peut en déduire celles que prend la même transcendante pour les amplitudes $\frac{3\pi}{2}$, 2π , $\frac{5\pi}{2}$, ... en suivant une marche tout à fait semblable à celle de Legendre dans le cas de la fonction Y (tome III, page 157). En effet, on a, lorsque $\varphi + \psi = \pi$,

$$Y(\varphi) = Y(\psi) - 2E(k) [F(k) - F(\varphi)],$$

d'où l'on déduit aisément

$$\Xi(\varphi) + \Xi(\pi - \varphi) = \Xi(\pi) - 2E(k) F(\varphi) [F(k) - \tfrac{1}{2} F(\varphi)];$$

ce qui nous donnera, en changeant le signe de φ , l'équation suivante:

$$\Xi(\pi + \varphi) - \Xi(\pi - \varphi) - 2\Xi(\varphi) = 4E(k) F(k) F(\varphi).$$

En faisant dans celle-ci successivement $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, π , $\frac{3\pi}{2}$, ... nous en tirerons

$$\Xi\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 3\Xi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4E(k) [F(k)]^2, \quad \Xi(2\pi) - 2\Xi(\pi) = 8E(k) [F(k)]^2,$$

et ainsi de suite.

5. On aurait pu obtenir les résultats du numéro précédent plus promptement, en employant, au lieu de la fonction Y , la transcendante nommée Θ par M. Jacobi. Cette fonction, qui dépend de deux

quantités, est définie, comme l'on sait, par l'équation

$$\Theta(q, x) = q^{-\frac{1}{12}} (2kk')^{\frac{1}{6}} \left(\frac{K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (1 - 2q \cos 2x + q^2)(1 - 2q^3 \cos 2x + q^6) \dots,$$

où K est la fonction complète $F(k)$, $q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$, K' étant la fonction complète à module complémentaire, et

$$x = \frac{\pi}{2K} F(k, \varphi).$$

D'ailleurs, $\Theta(q, x)$ est liée avec $\Upsilon(k, \varphi)$ par l'équation

$$\log \Theta(q, x) = \Upsilon(k, \varphi) - \frac{1}{2} \frac{E(k)}{F(k)} [F(k, \varphi)]^2 + \frac{1}{2} \log \left(\frac{2KK'}{\pi} \right)$$

(LEGENDRE, tome III, page 151); en sorte que

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \Theta(q, x) dx = \frac{\pi}{2K} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\Upsilon(k, \varphi) d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{2} \pi K E(k) + \frac{1}{4} \pi \log \left(\frac{2KK'}{\pi} \right).$$

On a aussi évidemment

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \Theta(q, x) dx &= \frac{1}{4} \pi \log \left[\frac{K}{\pi} (2kk')^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{6}} \right] \\ &+ \sum \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log (1 - 2q^{2i+1} \cos 2x + q^{4i+2}) dx, \end{aligned}$$

où la somme $\sum$ s'étend à toutes les valeurs entières de i , depuis zéro jusqu'à l'infini. Mais, en se rappelant que $q < 1$, on verra que chaque terme de cette série s'évanouit, en vertu d'un théorème de Poisson (*Journal de l'École Polytechnique*, xvii^e cahier), savoir :

$$\int_0^{\pi} \log (1 - 2a \cos x + a^2) dx = 0,$$

lorsque a est plus petit que l'unité[*]. Donc

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \Theta(q, x) dx = \frac{1}{4} \pi \log \left[\frac{K}{\pi} (2kk')^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{6}} \right].$$

[*] Voir une démonstration de ce théorème, déduite de celui de Cotes, par M. Darboux, tome III de ce Journal, page 355.

et, par conséquent, après quelques réductions,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Y(k, \varphi) d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{12} \pi K' + \frac{1}{6} E(k) K^2 + \frac{1}{6} K \log \left(\frac{k}{4k'^2} \right).$$

conformément à ce que nous avons déjà trouvé.

4. Il est bon d'observer que la méthode qu'on vient d'indiquer nous donne avec facilité les valeurs des intégrales définies

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\sin \varphi) d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\cos \varphi) d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

que j'ai déduites, dans ce Journal (tome XI, page 475), de la considération de la fonction Y . En effet, on a

$$\sin \operatorname{am} \left(\frac{2Kx}{\pi} \right) = \frac{2q^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}} \sin x \frac{1-2q^2 \cos 2x+q^4}{1-2q \cos 2x+q^2} \cdot \frac{1-2q^4 \cos 2x+q^6}{1-2q^3 \cos 2x+q^5}, \dots,$$

$$\cos \operatorname{am} \left(\frac{2Kx}{\pi} \right) = 2q^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k'}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \cos x \frac{1+2q^2 \cos 2x+q^4}{1-2q \cos 2x+q^2} \cdot \frac{1+2q^4 \cos 2x+q^6}{1-2q^3 \cos 2x+q^5}, \dots$$

(LEGENDE, tome III, page 97), d'où l'on déduit, en se rappelant que

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log(\sin x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log(\cos x) dx = \frac{1}{2} \pi \log \frac{1}{2},$$

et en ayant égard à la formule de Poisson que nous avons citée,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \sin \operatorname{am} \left(\frac{2Kx}{\pi} \right) dx = \frac{\pi}{4K} \left[K \log \left(\frac{1}{k} \right) - \frac{1}{2} \pi K' \right],$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \cos \operatorname{am} \left(\frac{2Kx}{\pi} \right) dx = \frac{\pi}{4K} \left[K \log \left(\frac{k'}{k} \right) - \frac{1}{2} \pi K' \right].$$

5. Je terminerai cette Note en remarquant que l'analyse précédente nous conduit immédiatement à évaluer trois intégrales doubles définies d'une forme remarquable, savoir :

$$(I) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1-k^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} d\theta d\varphi,$$

$$(II) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1+\cotang^2 \theta \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \sqrt{1-k'^2 \sin^2 \theta}} d\theta d\varphi,$$

$$(III) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log[1-(1-k'^2 \sin^2 \theta) \sin^2 \varphi]}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \sqrt{1-k'^2 \sin^2 \theta}} d\theta d\varphi.$$

Rappelons-nous, en effet, que

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1 - k^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = E(k) [F(k, \theta)]^2 - 2F(k) \Upsilon(k, \theta),$$

ce qui nous donnera, pour la valeur de (I),

$$\frac{1}{3} E(k) [F(k)]^3 - 2F(k) \Xi(k, \frac{1}{2}\pi),$$

ou bien encore

$$\frac{1}{3} F(k) \left[\log \left(\frac{4k'^2}{k} \right) F(k) - \frac{1}{2} \pi F(k') \right].$$

De même, on trouvera, pour la valeur de (II),

$$\begin{aligned} & - 2F(k) \Xi(k', \frac{1}{2}\pi) - \frac{1}{3} [F(k')]^3 [E(k) - F(k)] - \log k F(k) F(k') \\ & - 2F(k) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\sin \theta) d\theta}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \theta}}, \end{aligned}$$

expression qu'on peut mettre, après quelques réductions, sous la forme simple

$$\frac{1}{3} \pi [F(k)]^2 - \frac{1}{6} \pi [F(k')]^2 + \frac{1}{3} \log \left(\frac{4k'^2}{k} \right) F(k) F(k').$$

Enfin, la valeur de la troisième de nos intégrales sera

$$\frac{1}{3} \log \left(\frac{4k'^2}{k} \right) F(k) F(k') - \frac{1}{6} \pi [F(k)]^2 - \frac{1}{6} \pi [F(k')]^2.$$

