JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

LEBESGUE

Démonstration d'une formule de M. Dirichlet ; remarques sur quelques expressions du nombre π

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 76-80.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__76_0>

DÉMONSTRATION

D'UNE FORMULE DE M. DIRICHLET;

REMARQUES SUR QUELQUES EXPRESSIONS DU NOMBRE π;

PAR M. LEBESGUE,

Professeur à Bordeaux.

I.

La formule suivante

$$\sum \left(\frac{n}{p}\right) \frac{1}{n} = \frac{\pi}{p\sqrt{p}} (\Sigma b - \Sigma a),$$

tome IV de ce Journal, page 405, d'où il résulte $\Sigma b > \Sigma a$ (page 406), peut se démontrer ainsi qu'il suit.

Dans cette formule, p est un nombre premier de forme $4q + 3$, n un nombre entier positif non divisible par p; de sorte que l'on a $\left(\frac{n}{p}\right) = 1$ si n est résidu quadratique de p, et $\left(\frac{n}{p}\right) = -1$ si n est non résidu. La somme $\sum \left(\frac{n}{p}\right) \frac{1}{n}$ s'étend à toutes les valeurs de n, les multiples de p étant seuls exceptés. Les sommes Σb, Σa du second membre sont

$$\Sigma a = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{\frac{p-1}{2}}, \quad \Sigma b = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{\frac{p-1}{2}},$$

en représentant par $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ les $\frac{p-1}{2}$ résidus quadratiques contenus entre o et p, et par $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{\frac{p-1}{2}}$ les $\frac{p-1}{2}$ non résidus compris entre les mêmes limites; ces non résidus sont, pour le cas de $p = 4q + 3$ premier, les mêmes que les nombres $p - a_1$, $p - a_2, \ldots$, $p - a_{\frac{p-1}{2}}$.

Ceci posé, Euler a démontré la formule

$$\text{(A)} \qquad \sum_{x=0}^{x=\infty} \frac{1}{px+a} - \sum_{x=0}^{x=\infty} \frac{1}{px+p-a} = \frac{\pi}{p} \cot \frac{a\pi}{p}.$$

(*Introd. in Anal.*, t. I, n° 178, où l'on a changé n en p et m en a). Il faut bien remarquer que dans cette série on doit prendre autant de termes positifs que de termes négatifs. Si l'on met pour a les nombres a_1, $a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$, on aura, en ajoutant membre à membre les équations,

$$\sum \frac{1}{px+a_1} - \sum \frac{1}{px+p-a_1} = \frac{\pi}{p} \cot \frac{a_1\pi}{p},$$

$$\sum \frac{1}{px+a_2} - \sum \frac{1}{px+p-a_2} = \frac{\pi}{p} \cot \frac{a_2\pi}{p},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum \frac{1}{px+a_{\frac{p-1}{2}}} - \sum \frac{1}{px+p-a_{\frac{p-1}{2}}} = \frac{\pi}{p} \cot \frac{a_{\frac{p-1}{2}}\pi}{p},$$

l'équation

$$\sum \left(\frac{n}{p}\right) \frac{1}{n} = \frac{\pi}{p} \sum \cot a \frac{\pi}{p},$$

dont le premier membre contient autant de termes positifs que de termes négatifs, en supposant les nombres n rangés par ordre de grandeur. Dans le second membre, a prend les valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$, de sorte qu'en posant $\omega = \frac{2\pi}{p}$, il devient $\sum \cot a \frac{\omega}{2}$, dont la valeur est $\frac{\Sigma b - \Sigma a}{\sqrt{p}}$, ainsi que je l'ai montré ailleurs (tome VII de ce Journal, page 143, équation 14). On a donc

$$\sum \left(\frac{n}{p}\right) \frac{1}{n} = \frac{\pi}{p\sqrt{p}} (\Sigma b - \Sigma a),$$

formule susceptible de généralisation, comme on peut le voir dans le tome XXI du Journal de M. Crelle (*Application de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres*, par M. Lejeune-Dirichlet).

En général, la différence

$$\sum_{x=0}^{x=\infty} \frac{1}{px+a} - \sum_{x=0}^{x=\infty} \frac{1}{px+b},$$

où l'on suppose a et b positifs $< p$, et où l'on prend autant de termes positifs que de termes négatifs, peut s'exprimer sous forme finie, comme je le ferai voir dans une autre Note. Ces sortes de différences se présentent dans diverses recherches, notamment dans la détermination du nombre de formes réduites pour un déterminant donné, question très-importante dont la solution se trouve dans le Mémoire de M. Dirichlet cité plus haut.

II.

Au moyen de la formule d'Euler (A), on vérifiera facilement diverses formules, entre autres

$$(a) \qquad \frac{\pi}{4} = \operatorname{tang} \frac{\pi}{4n} + \frac{1}{3} \operatorname{tang} \frac{3\pi}{4n} + \frac{1}{5} \operatorname{tang} \frac{5\pi}{4n} + \ldots;$$

on la mettra sous cette forme

$$(b) \qquad \frac{\pi}{4} = A_1 \operatorname{tang} \frac{\pi}{4n} + A_3 \operatorname{tang} \frac{3\pi}{4n} + \ldots + A_{2n-1} \operatorname{tang} \frac{(2n-1)\pi}{4n},$$

en représentant par A_{2i+1} une série qui n'est autre que

$$\sum \frac{1}{4nx+2i+1} - \sum \frac{1}{4nx+4n-(2i+1)} = \frac{\pi}{4n} \cot \frac{(2i+1)\pi}{4n},$$

de sorte que chaque terme du second membre de l'équation (b) se réduisant à $\frac{\pi}{4n}$, l'équation se trouvera satisfaite.

Pour obtenir l'équation (b), on a transposé les termes du second membre de l'équation (a), ce qui n'est permis qu'en supposant convergente la série

$$\operatorname{tang} \frac{\pi}{4n} + \frac{1}{3} \operatorname{tang} \frac{\pi}{4n} + \frac{1}{5} \operatorname{tang} \frac{\pi}{4n} + \ldots;$$

alors la transposition peut être supposée faite sur un nombre de termes multiple de $4n$, et aussi grand qu'on voudra.

Voici un autre moyen d'obtenir l'équation (a), de manière à reconnaître immédiatement la convergence du second membre.

Dans les séries

$$(\mathrm{B})\qquad \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} = \cos x - \dfrac{1}{3}\cos 3x + \dfrac{1}{5}\cos 5x - \ldots, \\ \dfrac{x}{2} = \sin x - \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin 3x - \ldots, \end{cases}$$

qui sont convergentes entre o et $\frac{\pi}{2}$, on fera successivement

$$x = \frac{\pi}{2n},\quad x = \frac{2\pi}{2n},\quad x = \frac{3\pi}{2n},\ldots,\quad x = \frac{(n-1)\pi}{2n} < \frac{\pi}{2}.$$

Ajoutant terme à terme les équations ainsi obtenues, on trouve, en réduisant au moyen des valeurs connues de

$$\sin a + \sin 2a + \ldots + \sin(n-1)a \quad \text{et} \quad \cos a + \cos 2a + \ldots + \cos(n-1)a,$$

les formules

$$(c)\qquad (2n-1)\frac{\pi}{4} = \cot\frac{\pi}{4n} + \frac{1}{3}\cot\frac{3\pi}{4n} + \frac{1}{5}\cot\frac{5\pi}{4n} + \ldots,$$

$$(d)\qquad \frac{n\pi}{4} = \operatorname{cos\acute{e}c}\frac{\pi}{2n} + \frac{1}{3}\operatorname{cos\acute{e}c}\frac{3\pi}{2n} + \frac{1}{5}\operatorname{cos\acute{e}c}\frac{5\pi}{2n}.$$

Comme les seconds membres sont des séries convergentes, il est permis de retrancher membre à membre et terme à terme; de là l'équation (a), à cause de $\operatorname{tang} a + \cot a = 2 \operatorname{cos\acute{e}c} 2a$.

Le calcul relatif à l'équation

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots$$

a été donné dans le Journal de M. Crelle, t. XII, p. 254 et 255. Si le résultat paraît différent, cela tient à ce qu'il peut être simplifié par le moyen de l'équation $\cot a - \cot 2a = \operatorname{cos\acute{e}c} 2a$. Il y a aussi deux fautes d'impression : $\sum\limits_{p=1}^{p=\infty}$ au lieu de $\sum\limits_{p=0}^{p=\infty}$ (page 255, ligne 8), et $+\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots\right) = \frac{\pi}{8}\right]$ au lieu de $-\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \ldots\right) = \frac{\pi}{8}\right]$ (ligne 9).

Voici les formules nécessaires pour les réductions :

$$A = \sin a + \sin 2a + \ldots + \sin(n-1)a = \frac{1}{2}\left[(1-\cos na)\cot\frac{a}{2} - \sin na\right],$$

$$B = \cos a + \cos 2a + \ldots + \cos(n-1)a = \frac{1}{2}\left[\sin na \cot\frac{a}{2} - (1+\cos na)\right],$$

qui donnent pour

$$a = (4k+1)\frac{\pi}{4n},\quad A = B = \frac{1}{2}\left[\cot(4k+1)\frac{\pi}{4n} - 1\right],$$

$$a = (4k+3)\frac{\pi}{4n},\quad A = -B = \frac{1}{2}\left[\cot(4k+3)\frac{\pi}{4n} + 1\right],$$

$$a = (4k+2)\frac{\pi}{4n},\quad A = \cot(4k+2)\frac{\pi}{4n},\quad B = 0,$$

$$a = (4k+4)\frac{\pi}{4n},\quad A = 0,\quad B = -1.$$

Quant au calcul numérique de π, les séries (a), (c), (d) ne paraissent avoir aucun avantage sur les séries (B). Il est possible que ces formules (a), (c), (d) soient utiles dans quelques cas particuliers; je les donne donc ici, ignorant si elles ont déjà été données.