# JOURNAL
DE
# MATHÉMATIQUES
## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE


J. BERTRAND

**Note sur un point du calcul des variations**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 7 (1842), p. 55-58.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__55_0>

# NOTE

## SUR UN POINT DU CALCUL DES VARIATIONS;

**Par M. J. BERTRAND,**

Élève-Ingénieur des Mines.

Lorsque l'on cherche à rendre une certaine intégrale maxima ou minima, en conservant à une autre intégrale une valeur constante, la règle donnée par Euler ramène la question à la recherche du maximum absolu d'une autre intégrale, que l'on obtient en ajoutant l'une des deux premières au produit de l'autre par un facteur indéterminé.

On a donné plusieurs démonstrations de ce théorème; celle que je vais exposer me semble plus directe et peut-être plus facile. Elle est sans doute moins simple que la démonstration si connue et dégagée de tout calcul dont on se contente quelquefois; mais cette dernière démonstration me paraît insuffisante : elle prouve bien que toutes les solutions auxquelles la règle citée conduit satisfont à la question, mais non pas qu'elles soient les seules possibles.

Supposons qu'il soit question de rendre $\int_a^b \mathrm{U}dx$ maximum, $\int_a^b \mathrm{V}dx$ restant constant; il faut, comme on sait, que la variation $\delta \int_a^b \mathrm{U}dx$ s'annulle toutes les fois que $\delta \int_a^b \mathrm{V}\,dx$ sera elle-même égale à o; ou, en donnant à ces variations la forme connue, et supposant, pour plus de simplicité, que la question fixe d'avance tout ce qui est relatif aux limites, afin de faire disparaître des variations les termes en dehors du signe $\int$, il faut que $\int_a^b \omega u dx$ s'annulle pour toutes les valeurs de $\omega$ qui donneront $\int_a^b \omega v dx = 0$, $u$ et $v$ étant des fonctions qui se déduisent, comme on sait, de U et V.

Il est évident que l'on satisfait à cette condition en posant

$$u = cv,$$

$c$ étant une constante, car alors les deux intégrales ont, quel que soit $\omega$, un rapport constant, et s'annullent par conséquent en même temps; mais il faut prouver que cette condition $u = cv$ est nécessaire. Pour cela, supposons que le rapport $\frac{u}{v}$ ne soit pas constant, et désignons-le par $f(x)$, les deux intégrales deviendront

$$\int_a^b \omega v f(x) dx, \quad \int_a^b \omega v dx;$$

puisque $f(x)$ n'est pas constant, on peut trouver une constante $c$, qui, entre deux limites convenablement choisies $x_0$, $x_1$, soit toujours plus grande que $f(x)$, c'est-à-dire plus près de l'infini positif, et qui, entre deux autres limites $x'_0$, $x'_1$, soit, au contraire, constamment moindre que cette même fonction. Nous supposerons de plus ces limites assez rapprochées pour qu'aucune des fonctions $f(x)$, $u$ et $v$ ne change de signe dans leur intervalle.

Considérons une valeur de $\omega$ qui annulle à la fois les deux intégrales; s'il y a réellement maximum ou minimum, il suffira pour cela que cette valeur annulle la seconde. Changeons cette fonction $\omega$ seulement entre les limites $x_0$, $x_1$, et $x'_0$, $x'_1$, il est clair que ce changement pourra être fait de manière que la deuxième intégrale augmente entre les premières limites précisément autant qu'elle diminue dans les secondes, de telle sorte qu'elle conserve sa valeur o; on peut même évidemment supposer que cela se fasse en donnant à l'accroissement arbitraire de $\omega$ constamment le même signe entre $x_0$, $x_1$, ainsi qu'entre $x'_0$, $x'_1$. Soit alors $\alpha$ l'accroissement de la deuxième intégrale entre $x_0$ et $x_1$, $\alpha$ sera aussi sa diminution entre $x'_0$ et $x'_1$; mais, d'après la condition $f(x) < c$ entre les premières limites, et puisque $\omega$, $v$ et $f(x)$ conservent constamment le même signe, l'accroissement de la première intégrale entre $x_0$ et $x_1$ sera moindre que $c\alpha$, tandis que l'inégalité $f(x) > c$ montre que sa diminution entre $x'_0$ et $x'_1$ sera, au contraire, plus grande que $c\alpha$; comme $\omega$ n'a été changé qu'entre ces limites, il ne peut pas y avoir de compensation, et la nouvelle valeur de $\omega$, bien qu'annulant la seconde intégrale $\int_a^b \omega v dx$, donne à la première $\int_a^b \omega u dx$ une valeur différente de o. Il n'y a donc ni maximum ni minimum relatif, à moins que $\frac{u}{v}$ ne soit constant.

Si les limites étaient variables, les deux variations qui doivent s'annuler en même temps deviendraient

$$\varphi_a - \varphi_b + \int_a^b \omega u dx,$$

$$\psi_a - \psi_b + \int_a^b \omega v dx,$$

$\varphi_a$, $\varphi_b$, $\psi_a$, $\psi_b$, renfermant à tous leurs termes les valeurs que $\omega$ et ses dérivées prennent aux deux limites $a$ et $b$, ou les variations de ces limites elles-mêmes. D'abord il est évident que l'on doit avoir, comme tout à l'heure, $u = cv$, car, quelles que soient les conditions aux limites, on les remplira toujours en supposant toutes les variations qui en dépendent égales à o, ce qui fera disparaître les termes $\varphi_a$, $\varphi_b$, $\psi_a$, $\psi_b$, et permettra par conséquent de répéter le raisonnement précédent. Ces deux intégrales deviennent donc

$$\varphi_a - \varphi_b + c \int_a^b \omega v dx,$$

$$\psi_a - \psi_b + \int_b^a \omega v dx.$$

Supposons que l'on choisisse un système quelconque de valeurs possibles pour les variations aux limites; on pourra toujours faire en sorte que $\omega$ soit déterminé dans l'intervalle $a$ et $b$, de manière qu'avec ces valeurs limites, la somme

$$\psi_a - \psi_b + \int_a^b \omega\, dx$$

soit égale à o; mais alors on devra avoir aussi

$$\varphi_a - \varphi_b + c\int_a^b \omega v\, dx = 0;$$

donc

$$\varphi_a - \varphi_b = c(\psi_a - \psi_b),$$

et cela pour des valeurs quelconques des variations aux limites.

Or les deux équations

$$u = cv, \quad \varphi_a - \varphi_b = c(\psi_a - \psi_b),$$

sont précisément celles qu'il faudrait considérer pour rendre l'intégrale $\int_a^b (U - cV)\, dx$ maximum ou minimum.

On sait comment, cette première question une fois résolue, on peut déterminer la valeur de $c$ par la condition que $\int_a^b V\, dx$ ait précisément la valeur que la question lui assignait, car jusqu'ici nous avons seulement exprimé que cette intégrale est constante.