

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. CATALAN

Théorème sur la réduction d'une intégrale multiple

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 6 (1841), p. 81-84.

[<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6_81_0>](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6_81_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

THÉORÈME

SUR LA RÉDUCTION D'UNE INTÉGRALE MULTIPLE;

PAR E. CATALAN.

La formule suivante

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varphi(m \cos \theta + n \sin \theta \sin \omega + p \sin \theta \cos \omega) \sin \theta d\theta d\omega = 2\pi \int_{-1}^{+1} \varphi(a\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}) da,$$

que l'on doit à M. Poisson [*], est comprise comme cas particulier dans une autre formule que je vais démontrer, et où l'intégrale double se trouve remplacée par une intégrale multiple.

Soit l'intégrale d'ordre $n - 1$,

$$(1) \quad A = \iint \dots dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \varphi(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n) \sqrt{1 + \left(\frac{dx_n}{dx_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{dx_{n-1}}\right)^2}.$$

dans laquelle les variables reçoivent toutes les valeurs positives ou négatives, propres à vérifier l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1,$$

et dans laquelle aussi, par conséquent, les variables indépendantes satisfont à la condition

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1.$$

Cette intégrale revient évidemment à

$$(2) \quad A = \iint \dots \frac{dx_1 \dots dx_{n-1}}{x_n} \varphi(m_1 x_1 + \dots + m_n x_n).$$

[*] *Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences*, tome III, page 126

Pour la réduire, je prends les formules de transformation suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 = a_1 u_1 + b_1 u_2 + \dots + l_1 u_n, \\ x_2 = a_2 u_1 + b_2 u_2 + \dots + l_2 u_n, \\ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \\ x_n = a_n u_1 + b_n u_2 + \dots + l_n u_n; \end{cases}$$

dans ces équations, les coefficients de u_i sont

$$a_1 = \frac{m_1}{\Delta}, \quad a_2 = \frac{m_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{m_n}{\Delta},$$

en supposant

$$\Delta^2 = m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_n^2;$$

les autres coefficients satisfont aux conditions

$$(4) \quad \begin{cases} b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = 1, \dots, l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_n^2 = 1, \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = 0, \dots, a_1 l_1 + a_2 l_2 + \dots + a_n l_n = 0, \\ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \\ k_1 l_1 + k_2 l_2 + \dots + k_n l_n = 0. \end{cases}$$

Le nombre des coefficients a_i, b_i , etc., dans les formules (3), est $n^2 - n$.

Les équations de condition sont en nombre $(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

On pourra donc prendre arbitrairement $n^2 - n - \frac{n(n+1)}{2}$ coefficients, ou $\frac{n(n-3)}{2}$ coefficients.

En ajoutant les carrés des équations (3), et ayant égard aux relations (4), on trouve

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2;$$

donc

$$(5) \quad u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = 1.$$

Les formules (3) et (4) donnent aussi

$$(6) \quad m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n = u_1 \Delta;$$

donc, au moyen de la transformation de variables qui vient d'être indiquée, la fonction $\varphi(m_1x_1 + \dots + m_nx_n)$ devient simplement

$$\varphi(u, \Delta).$$

Il nous reste actuellement à transformer la quantité $dx_1 \dots dx_{n-1}$. Or, M. Jacobi a démontré depuis long-temps [*] que le système de variables employé ci-dessus donne cette relation très simple :

$$\frac{dx_1 \dots dx_{n-1}}{x_n} = \frac{du_1 du_2 \dots du_{n-1}}{u_n}.$$

En substituant dans la formule (2), on trouve

$$(7) \quad A = \int \int \dots \frac{du_1 du_2 \dots du_{n-1}}{u_n} \varphi(u, \Delta).$$

Dans cette nouvelle intégrale, les variables doivent recevoir toutes les valeurs réelles satisfaisant à l'équation (5).

Actuellement, remplaçons u_n par sa valeur, et donnons à u_1 une valeur déterminée; nous aurons à évaluer

$$(8) \quad B = \int \int \dots \frac{du_2 \dots du_{n-1}}{\sqrt{1 - u_1^2 - \dots - u_{n-1}^2}},$$

les limites étant données par

$$u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_{n-1}^2 \leq 1 - u_1^2.$$

On sait [**] que cette intégrale d'ordre $n - 2$, a pour expression

$$(9) \quad B = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (1 - u_1^2)^{\frac{n-3}{2}};$$

[*] Journal de M. Crelle, tome XII, page 40. — M. Sturm m'a fait voir que l'on peut arriver facilement à cette relation, en effectuant le changement de variables *successivement*, au lieu de l'opérer en une seule fois.

[**] *Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples*, tome IV de ce Journal, page 336.

donc, en substituant dans la formule (7), et doublant le résultat à cause du radical, on obtiendra

$$(10) \quad A = 2 \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} \varphi(u, \Delta) du, (1 - u^2)^{\frac{n-3}{2}}.$$

Enfin, en égalant les valeurs (2) et (10), on a ce théorème :

$$(11) \quad \int \dots \int \frac{dx_1 \dots dx_{n-1}}{\sqrt{1-x_1^2-\dots-x_{n-1}^2}} \varphi(m_1 x_1 + \dots + m_n x_n) = 2 \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} \varphi(u, \Delta) du (1-u^2)^{\frac{n-3}{2}}.$$

Si l'on pose $u = \cos \theta$, on obtient, au lieu de la formule (10),

$$(12) \quad A = 2 \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\pi \varphi(\Delta \cos \theta) \sin^{n-2} \theta d\theta.$$

Lorsque $n = 3$, la formule (11) coïncide avec celle de M. Poisson.

(Juin 1840.)