

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur l'intégrale $\int_0^\pi \cos i(u - x \sin u) du$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 6 (1841), p. 36.

[<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6_36_0>](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6_36_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Sur l'intégrale $\int_0^\pi \cos i(u - x \sin u) du$;

PAR J. LIOUVILLE.

En désignant par z cette intégrale où le nombre i est supposé entier positif, et qui se présente dans les recherches de mécanique céleste, on obtient aisément l'équation connue

$$x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + x \frac{dz}{dx} - i^2 (1 - x^2) z = 0 :$$

en faisant $y = z \sqrt{x}$ on trouvera ensuite

$$(a) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{4i^2 - 1}{4x^2} - i^2 \right) y.$$

L'équation (a) est comprise comme cas particulier dans l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(A + \frac{B}{x^2} \right) y,$$

que j'ai considérée dans les premières pages de ce volume. Pour que l'intégrale représentée par y pût s'exprimer sous forme finie en fonction de x , à l'aide des signes algébriques, exponentiels et logarithmiques, il faudrait donc que l'on eût

$$\frac{4i^2 - 1}{4} = \beta(\beta + 1), \quad \text{ou} \quad i = \pm \left(\beta + \frac{1}{2} \right),$$

β étant un nombre entier nul ou positif. Or cette condition n'est jamais remplie, i étant aussi un nombre entier. On sait, du reste, qu'il est facile de développer y en série convergente.