

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GAUSS

**Démonstration élémentaire d'un théorème de Legendre
relatif à la trigonométrie sphérique**

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 6 (1841), p. 273-274.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6_273_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE

D'UN

THÉORÈME DE LEGENDRE RELATIF A LA TRIGONOMETRIE SPHÉRIQUE;

PAR M. GAUSS [*].

On peut résoudre de petits triangles sphériques comme des triangles plans, pourvu que l'on diminue chaque angle sphérique du tiers de l'excès sphérique. Voici une démonstration tout-à-fait élémentaire de ce théorème.

Désignons l'excès sphérique par 3ω , les trois côtés du triangle par a, b, c , et les angles sphériques opposés par $A + \omega, B + \omega, C + \omega$. On a les deux formules connues

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{1}{2} a &= \frac{\sin \frac{3}{2} \omega \sin (A - \frac{1}{2} \omega)}{\sin (B + \omega) \sin (C + \omega)}, \\ \cos^2 \frac{1}{2} a &= \frac{\sin (B - \frac{1}{2} \omega) \sin (C - \frac{1}{2} \omega)}{\sin (B + \omega) \sin (C + \omega)};\end{aligned}$$

d'où résulte

$$\frac{\sin^6 \frac{1}{2} a}{\cos^2 \frac{1}{2} a} = \frac{\sin^3 \frac{3}{2} \omega \sin^3 (A - \frac{1}{2} \omega)}{\sin^2 (B + \omega) \sin (B - \frac{1}{2} \omega) \sin^2 (C + \omega) \sin (C - \frac{1}{2} \omega)}.$$

On a de même

$$\frac{\sin^6 \frac{1}{2} b}{\cos^2 \frac{1}{2} b} = \frac{\sin^3 \frac{3}{2} \omega \sin^3 (B - \frac{1}{2} \omega)}{\sin^2 (A + \omega) \sin (A - \frac{1}{2} \omega) \sin^2 (C + \omega) \sin (C - \frac{1}{2} \omega)}.$$

En divisant l'une de ces équations par l'autre, et extrayant la racine

[*] Cet article est traduit de l'allemand. Voir le Journal de M. Crelle, tome XXII.

carrée, on aura

$$\frac{\sin^3 \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} a} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} b}{\sin^3 \frac{1}{2} b} = \frac{\sin(A + \omega) \sin^2(A - \frac{1}{2} \omega)}{\sin(B + \omega) \sin^2(B - \frac{1}{2} \omega)}.$$

On peut mettre cette équation sous la forme

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \sqrt[3]{D},$$

en représentant, pour abréger, par D la quantité

$$\frac{a^3 \cos \frac{1}{2} a}{8 \sin^3 \frac{1}{2} a} \cdot \frac{8 \sin^3 \frac{1}{2} b}{b^3 \cos \frac{1}{2} b} \cdot \frac{\sin(A + \omega) \sin^2(A - \frac{1}{2} \omega)}{\sin^3 A} \cdot \frac{\sin^3 B}{\sin(B + \omega) \sin^2(B - \frac{1}{2} \omega)}.$$

Cette formule est rigoureuse; mais on voit aisément que si a, b, c sont très-petits du premier ordre, chacun des quatre facteurs dont D est composé ne diffère de l'unité que par des termes du quatrième ordre. Donc, etc.

Dans mes *Recherches générales sur les surfaces courbes*, j'ai étendu ce théorème aux triangles formés sur une surface courbe quelconque par les lignes les plus courtes.