

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

OSSIAN BONNET

Note sur l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 6 (1841), p. 238-240.

[<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6_238_0>](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6_238_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

NOTE

SUR L'INTÉGRALE $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$;

PAR M. OSSIAN BONNET,

Élève-Ingénieur des Ponts-et-Chaussées.

M. Poisson a donné, dans le dix-neuvième cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, les deux formules

$$(1) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a x \cos ax \, dx = \frac{1}{2^a}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a x \cos(a+2m)x \, dx = 0,$$

dans lesquelles a est un nombre positif quelconque, et m un nombre entier positif.

Je vais appliquer ces deux formules à la détermination de l'intégrale d'Euler

$$(2) \quad A = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

où a est une constante positive et < 1 .

En posant $x = \tan^2 \gamma$, j'ai d'abord

$$(3) \quad A = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a-1} \gamma \cos^{1-2a} \gamma \, d\gamma.$$

Maintenant, soit

$$1 - 2a > 0.$$

On sait que, y étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on a

$$2^a \cos \frac{a\pi}{2} \sin^a y = \cos ay - a \cos (a-2)y + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2} \cos (a-4)y \dots,$$

en se bornant à la valeur réelle et positive du premier membre. Changeant dans cette formule a en $2a-1$, nous en tirerons

$$\sin^{2a-1} y = \frac{1}{2^{a-1} \cos \frac{2a-1}{2} \pi} [\cos(2a-1)y - (2a-1) \cos(2a-3)y + \dots].$$

Substituant cette valeur de $\sin^{2a-1} y$ dans la formule (3), il vient

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2^{2a-2} \sin a\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{1-2a} y \cos(1-2a)y dy \\ &- (2a-1) \frac{1}{2^{2a-2} \sin a\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{1-2a} y \cos(2+1-2a)y dy \dots \end{aligned}$$

Or, d'après les formules ci-dessus, tous les termes du développement du second membre sont nuls, excepté le premier, qui est

$$\frac{\pi}{2^{1-2a}} \cdot \frac{1}{2^{2a-2} \sin a\pi} = \frac{\pi}{\sin a\pi};$$

donc, dans le cas de $1-2a > 0$, on a

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{2a-1} y dy = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Soit, en second lieu, $2a-1 > 0$. Je pose

$$y = \frac{\pi}{2} - y', \quad a = 1 - a'.$$

L'intégrale

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{2a-1} y dy$$

devient

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{2a'-1} y' dy'.$$

Mais $2a' - 1$ étant > 0 , cette dernière intégrale a pour valeur

$$\frac{\pi}{\sin a' \pi} = \frac{\pi}{\sin a \pi};$$

il en est donc de même de

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{2a-1} y dy = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx,$$

dans le cas de $2a - 1 > 0$.

D'ailleurs, dans le cas de $2a - 1 = 0$, la formule à démontrer se vérifie aisément. Donc, dans tous les cas,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin a \pi}.$$

ERRATA pour le *Mémoire* de M. STEINER. (Cahier d'avril.)

Page 113, ligne 14, *après* sphériques, *ajoutez* isoscèles

Page 160, ligne 12, et page 167, ligne 26, *au lieu de* arcs de cercle égaux, *lisez*
arcs de CERCLES ÉGAUX, *ou bien* arcs de cercle à rayons égaux.
