

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LEBESGUE

Démonstration de l'impossibilité de résoudre l'équation

$x^7 + y^7 + z^7 = 0$ en nombres entiers

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 5 (1840), p. 276-279.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5_276_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

DÉMONSTRATION

DE

L'IMPOSSIBILITÉ DE RÉSOUDRE L'ÉQUATION $x^7 + y^7 + z^7 = 0$

EN NOMBRES ENTIERS ;

PAR M. LEBESGUE [*],

Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

La démonstration suivante revient au fond à celle de M. Lamé, dont elle n'est qu'une simplification.

Théorème I. « L'équation

$$p^2 = q^4 - 2^{2a} \cdot 3 \cdot 7^4 q^2 r^2 + 2^{4a+4} \cdot 7^7 r^4,$$

» où les nombres p, q, r sont impairs et premiers entre eux, n'est possible que pour $r = 0$; a est un nombre entier positif. »

Démonstration. La différence de deux carrés impairs étant divisible par 8, il est nécessaire que a soit plus grand que l'unité.

L'équation donnée peut se mettre sous la forme

$$[p + (q^2 - 2^{2a-1} \cdot 3 \cdot 7^4 r^2)][p - (q^2 - 2^{2a-1} \cdot 3 \cdot 7^4 r^2)] = 2^{4a-2} \cdot 7^7 r^4;$$

les deux facteurs du premier membre ne sauraient avoir pour diviseur premier commun ni 7, ni un diviseur de r , car alors p et q^2 auraient un

[*] Il ne sera pas inutile de transcrire ici un passage de la lettre que M. Lebesgue m'a adressée en m'envoyant cet article.

« Le rapport de M. Cauchy sur le Mémoire de M. Lamé, ce Mémoire lui-même et les recherches que j'avais faites sur le théorème de Fermat, m'ont conduit, pour $n = 7$, à une solution qui ne diffère pas essentiellement de celle de M. Lamé. Je vous l'envoie de suite, car je désirerais qu'elle pût paraître prochainement, si vous n'y voyez pas d'inconvénient. . . La solution de M. Stern (Voir le Cahier de juin), très bonne en théorie, ne me semble pas praticable pour de grands nombres. Je compte vous en envoyer une autre, etc., etc. » (J. L.)

même diviseur ; de plus, des deux facteurs du premier membre l'un est divisible seulement par 2, et l'autre par 2^{4a-3} , car leur somme $2p$ est double d'un impair ; il faudra donc poser $r = ts$, t premier à s , et faire

$$\begin{array}{l} p + q^2 - 2^{2a-1} \cdot 3 \cdot 7^4 t^2 s^2 = 2s^4 \\ p - q^2 + 2^{2a-1} \cdot 3 \cdot 7^4 t^2 s^2 = 2^{4a-3} \cdot 7^7 t^4 \end{array} \left| \begin{array}{l} = 2 \cdot 7^7 \cdot s^4 \\ \text{ou} \\ = 2^{4a-3} \cdot t^4 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} = 2^{4a-3} s^4 \\ \text{ou} \\ = 2 \cdot 7^7 \cdot t^4 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} = 2^{4a-3} \cdot 7^7 \cdot s^4 \\ \text{ou} \\ = 2 \cdot t^4 \end{array} \right|$$

Les trois derniers systèmes donnent $q^2 - 2^{2a-1} \cdot 3 \cdot 7^4 t^2 s^2$ de forme $4k+3$, ce qui est absurde ; on ne peut donc admettre que le premier, d'où résulte l'équation

$$q^2 = s^4 + 2^{2a-1} \cdot 3 \cdot 7^4 s^2 t^2 - 2^{4a-4} \cdot 7^7 t^4,$$

qui revient à

$$(s^2 + 2^{2a-2} \cdot 3 \cdot 7^4 t^2 \pm q)(s^2 + 2^{2a-2} \cdot 3 \cdot 7^4 t^2 \mp q) = 2^{4a+2} \cdot 7^7 t^4.$$

On démontrera comme plus haut que les deux facteurs du premier membre où les signes supérieurs doivent être pris ensemble, aussi bien que les inférieurs, n'ont que 2 pour plus grand commun diviseur. D'ailleurs le signe de q peut être choisi de sorte que le premier facteur soit divisible par 2 seulement, et l'autre par 2^{4a+1} , d'où, en supposant $t = uv$, u et v premiers entre eux, les deux décompositions

$$\begin{array}{l} s^2 + 2^{2a-2} \cdot 3 \cdot 7^4 u^2 v^2 \pm q = 2u^4 \\ s^2 + 2^{2a-2} \cdot 3 \cdot 7^4 u^2 v^2 \mp q = 2^{4a+1} \cdot 7^7 v^4 \end{array} \left| \begin{array}{l} = 2 \cdot 7^7 \cdot u^4 \\ \text{ou} \\ = 2^{4a+1} \cdot v^4 \end{array} \right|$$

dont la deuxième doit être rejetée, parce qu'elle donne à

$$s^2 + 2^{2a-2} \cdot 3 \cdot 7^4 u^2 v^2$$

la forme $4k+3$. On admettra donc la première, d'où résulte

$$s^2 = u^4 - 2^{2(a-1)} \cdot 3 \cdot 7^4 u^2 v^2 + 2^{4(a-1)+4} \cdot 7^7 v^4.$$

Or cette équation ne diffère de la première qu'en ce que a y est remplacé par $a-1$ et p, q, r , par s, u, v . Continuant ainsi, en remplaçant successivement a par $a-1, a-2, \dots, 3, 2$, on tombera sur l'équation

$$x^2 = y^4 - 2^2 \cdot 3 \cdot 7^4 \cdot y^2 z^2 - 2^8 \cdot 7^7 z^4,$$

où x, y, z sont impairs, et qui est impossible comme on l'a déjà dit. On est donc obligé de supposer $r = 0$ dans l'équation de l'énoncé.

Théorème II. « L'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$, où l'on suppose x, y, z , entiers et premiers entre eux, n'est possible qu'en supposant nulle l'une des inconnues, les deux autres étant ± 1 et ∓ 1 . »

Démonstration. De l'équation donnée on tire

$$(x+y+z)^7 = 7(x+y)(x+z)(y+z)[(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)^2 + xyz(x+y+z)],$$

qui devient identique quand on ajoute $x^7 + y^7 + z^7$ au deuxième membre. Posons, pour abréger,

$$x+y+z=s, \quad x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz=u, \quad (x+y)(x+z)(y+z)=v, \quad t=u^2+xyzs,$$

il en résultera $s^7 = 7vt$; de là les conséquences suivantes :

1°. Le nombre t est impair, de forme $4k+1$, car des trois nombres x, y, z , l'un est pair et les deux autres impairs. Tous les diviseurs premiers de t le sont de s , et par conséquent de u .

2°. Le nombre t est premier à x, y, z , car autrement x, y, z ne seraient pas premiers entre eux;

3°. Le nombre t est premier à v , car on a

$$v = s(xy + xz + yz) - xyz,$$

et si t n'était pas premier à v , il ne le serait pas à xyz ;

4°. Le nombre t est une quatorzième puissance non divisible par 7.

En effet, l'équation $s^7 = 7v(u^2 + xyzs)$ montre que si θ est un diviseur premier de $t = u^2 + xyzs$, ce diviseur aura nécessairement le même exposant pair dans u^2 et dans s . Si donc u est divisible par θ^a , s le sera par θ^{2a} et t par θ^{4a} ; à moins cependant qu'on ait $\theta = 7$: alors $7t$ serait divisible par 7^{4a} . Il résulte de là que t ou $7t$ est nécessairement une quatorzième puissance; or $7t$ qui est de forme $4k+3$, n'est pas même un carré: il faut donc poser $t = q^{14}$ et $u = qr$, puisqu'un diviseur θ^a dans u répond à θ^{4a} dans t . Les nombres q et r sont impairs ainsi que u ; d'ailleurs ils sont premiers entre eux.

5°. Comme $7v$ est premier à t , $7v$ sera une septième puissance, et l'on aura $v = 7^6 \cdot p^7$. Le nombre p est nécessairement pair.

6°. Nous pouvons donc poser les équations

$$(a) \quad (x + y)(x + z)(y + z) = 7^6 \cdot p^7,$$

$$(b) \quad (x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz)^2 + xyz(x + y + z) = 7^{14},$$

$$(c) \quad (x + y + z) = 7pq^2,$$

$$(d) \quad x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz = qr.$$

Les équations (c) et (d) donnent

$$xy + xz + yz = 7^2 p^2 q^4 - qr,$$

d'où, en multipliant par l'équation (c), et tenant compte ensuite de l'équation (a),

$$xyz = 7pq^2(7^2 p^2 q^4 - qr) - 7^6 p^7;$$

alors l'équation (b) devient

$$q^{12} = r^2 + 7^2 \cdot p^2 q^3 (7^2 \cdot p^2 q^3 - r) - 7^7 p^8,$$

$$\text{ou bien} \quad (r - \tfrac{1}{2} \cdot 7^2 p^2 q^3)^2 = q^{12} - 3(\tfrac{1}{2} 7^2 p^2 q^3)^2 + 7^7 p^8,$$

$$\text{qui, en posant} \quad r - \tfrac{1}{2} \cdot 7^2 p^2 q^3 = p_1, \quad q^3 = q_1, \quad p^3 = 2^{a+1} r_1,$$

$$\text{devient} \quad p_1^2 = q_1^4 - 2^{2a} \cdot 3 \cdot 7^4 q_1^2 r_1^2 + 2^{4a+4} \cdot 7^7 r_1^4,$$

dans laquelle p_1 , q_1 et r_1 sont premiers entre eux. Cette équation ne peut être satisfaite que par $r_1 = 0$; ainsi $p = 0$. On a donc à la fois $x + y + z = 0$ et $(x + y)(x + z)(y + z) = 0$, ou encore $xz = 0$, puisque

$$(x + y)(x + z)(y + z) = (x + y + z)(xy + xz + yz) - xyz.$$

L'une des inconnues x , y , z est donc nulle.

Corollaire. L'équation $x^7 + y^7 = z^7$ est impossible en nombres entiers positifs, sans être nuls, car autrement on pourrait supposer x , y , z premiers entre eux, et l'équation $x^7 + y^7 + (-z)^7 = 0$ serait satisfaite sans qu'une des inconnues fût nulle.