JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

STERN

Extrait d'une lettre adressée à M. Liouville

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 216-219.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__216_0>

EXTRAIT

D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE,

PAR M. STERN.

« Je viens de lire dans votre Journal (février 1840) le beau Mémoire de M. Lebesgue, à la fin duquel il propose une question concernant la détermination du signe dans la formule

$$\frac{1}{\sqrt{p}} = \pm \Pi \operatorname{cotang} a \frac{2\pi}{p},$$

que j'ai donnée dans le Journal de M. Crelle (le double signe y a été omis par inadvertance). Je vais y répondre en peu de mots.

» On sait que les racines de l'équation

$$(1)\quad x^{p-1} - \frac{1}{4} p x^{p-3} + \frac{1}{16} p \frac{(p-3)}{1.2} x^{p-5} \ldots \pm \frac{1}{2^{p-1}} p = 0$$

sont $\sin \frac{2\pi}{p}, \quad \sin 2\frac{2\pi}{p}, \ldots \sin (p-1)\frac{2\pi}{p}.$

En faisant $p = 2m + 1$ et $x^2 = y$, on réduit cette équation à la suivante

$$(2)\quad y^m - \frac{1}{4} p y^{m-1} \ldots \pm \frac{1}{2^{p-1}} p = 0.$$

Si p est un nombre premier de la forme $4n + 3$, et qu'on désigne par a_1, $a_2, \ldots a_m$ les résidus quadratiques, les racines de l'équation (2) seront

$$\sin^2 a_1 \frac{2\pi}{p}, \quad \sin^2 a_2 \frac{2\pi}{p}, \ldots \sin^2 a_m \frac{2\pi}{p},$$

et l'on aura $\sin^2 a_1 \frac{2\pi}{p} \sin^2 a_2 \frac{2\pi}{p} \ldots \sin^2 a_m \frac{2\pi}{p} = \frac{2^{p-1}}{p},$

ou

$$(3)\quad \Pi \sin a \frac{2\pi}{p} = \pm \frac{\sqrt{p}}{2^m}.$$

Il est évident qu'on doit prendre le signe supérieur ou inférieur, selon que le nombre des résidus qui sont plus grands que $\frac{p-1}{2}$ est pair ou impair. D'ailleurs on sait que dans la congruence

$$1.2\ldots\frac{p-1}{2}\equiv\pm1 \quad (\text{mod. } p),$$

la détermination du signe dépend de la même condition; et comme M. Jacobi a montré (Journal de M. Crelle, tome IX, page 192) qu'on a toujours

$$1.2\ldots\frac{p-1}{2}\equiv(-1)^{\mathrm{N}} \quad (\text{mod. } p),$$

N désignant le nombre des diviseurs quadratiques de la forme t^2+pu^2, on aura

$$\Pi \sin a\frac{2\pi}{p}=(-1)^{\mathrm{N}}\frac{\sqrt{p}}{2^m}. \tag{4}$$

On sait aussi que p étant un nombre premier de la forme $4n+3$, les expressions

$$\cos a_1\frac{2\pi}{p},\quad \cos a_2\frac{2\pi}{p},\ldots\ \cos a_m\frac{2\pi}{p}$$

sont les racines de l'équation

$$x^m+\frac{1}{2}x^{m-1}-\frac{1}{2^2}(m-1)x^{m-2}\ldots\mp\frac{1}{2^m}=0,$$

où l'on doit prendre le signe supérieur ou inférieur, selon qu'on a

$$p=8k+7,\quad p=8k+3.$$

On aura donc

$$\Pi \cos a\frac{2\pi}{p}=\frac{1}{2^m} \tag{5}$$

pour le cas $p=8k+7$,

et

$$\Pi \cos a\frac{2\pi}{p}=-\frac{1}{2^m} \tag{6}$$

pour le cas $p=8k+3$.

En combinant les équations (5) et (6) avec l'équation (4), on trouve

$$(7)\qquad \Pi \operatorname{cotang} a\frac{2\pi}{p} = (-1)^{N}\frac{1}{\sqrt{p}}$$

pour le cas $p = 8k + 7$,

et

$$(8)\qquad \Pi \operatorname{cotang} a\frac{2\pi}{p} = (-1)^{N+1}\frac{1}{\sqrt{p}}$$

pour le cas $p = 8k + 3$. On voit donc que le signe est tout-à-fait déterminé.

» On a aussi

$$\Pi \operatorname{tang} a\frac{2\pi}{p} = (-1)^{N}\sqrt{p},$$

$$\Pi \operatorname{tang} a\frac{2\pi}{p} = (-1)^{N+1}\sqrt{p},$$

selon que $p = 8k + 7$ ou $p = 8k + 3$.

» Je profite de cette occasion pour faire une remarque sur la détermination du signe dans la congruence

$$2b \equiv \pm r^2 \pmod{p},$$

que M. Gauss a donnée dans son premier Mémoire sur les résidus biquadratiques (p. 31). Comme la détermination *générale* de ce signe n'a pas réussi à l'illustre géomètre, elle semble appartenir aux plus profonds mystères de la théorie des nombres. Il est d'autant plus remarquable, que pour le cas $p=8n+5$, on puisse donner une formule qui détermine en même temps la valeur et le signe de b; car alors on a

$$(9)\qquad 2^n(1.2\ldots n) \equiv 2.4\ldots 2n,$$

$$(10)\qquad 2^{n+1}(4n+3.4n+4\ldots 5n+3) \equiv 1.3\ldots 2n+1 \pmod{p},$$

et $4n+3 \equiv -(4n+2)$, $4n+4 \equiv -(4n+1)$,... $5n+3 \equiv -(3n+2)$.

Il suit donc

$$(11)\qquad 2^{n+1}(4n+2.4n+1\ldots 3n+2) \equiv (-1)^{n+1}(1.3\ldots 2n+1),$$

et en multipliant cette formule par la formule (9), on a

$$2^{2n+1}(4n+2.\ldots 3n+2) \equiv (-1)^{n+1}(n+1.\ldots 2n+1).$$

et

$$(12) \qquad 2^{2n+1} \equiv (-1)^{n+1} \frac{n+1.n+2\ldots 2n+1}{3n+2\ldots 4n+2}.$$

Mais M. Gauss a démontré, dans le Mémoire cité, que g étant une racine primitive, le nombre 2 est congru à un des nombres $g, g^5, \ldots g^{p-4}$ ou à un des nombres $g^3, g^7, \ldots g^{p-2}$, selon qu'on a $b = 8m+2$ ou $b = 8m+6$. On aura donc $2^{2n+1} \equiv g^{2n+1}$, selon que b est contenu dans la première forme ou dans la seconde. Et comme on a

$$b \equiv g^{2n+1}.a \quad (\textit{Ib.}, \text{ page } 27),$$

la valeur de a étant déterminée par la congruence

$$(13) \qquad 2a \equiv \frac{4n+2\ldots 2n+2}{1\ldots 2n+1} \quad (\text{mod. } p),$$

il en suit $b \equiv 2^{2n+1}.a$ ou $-b \equiv 2^{2n+1}.a$, selon qu'on a $b = 8m+2$ ou $b = 8m+6$, c'est-à-dire qu'il faut toujours fixer le signe de manière qu'on ait

$$b \equiv 2 \quad (\text{mod. } 8).$$

En combinant les formules (12) et (13), on trouve

$$\pm 2b \equiv (-1)^{n+1} \frac{3n+1\ldots 2n+2}{1\ldots n},$$

et le signe est déterminé par la congruence

$$b \equiv 2, \quad (\text{mod. } 8).$$

« J'ai déjà consigné plusieurs des remarques précédentes dans un Mémoire que j'ai présenté à l'Académie des Sciences au courant de l'année 1837, mais sur lequel on n'a pas encore fait de rapport. »

(20 mai 1840.)