JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

JOSEPH LIOUVILLE

Sur les variations séculaires des angles que forment entre elles les droites résultant de l'intersection des plans des orbites de Jupiter, Saturne et Uranus

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 483-492.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__483_0>

Sur les Variations séculaires des angles que forment entre elles les droites résultant de l'intersection des plans des orbites de Jupiter, Saturne et Uranus;

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

1. Les plans actuels des orbites des trois planètes supérieures, Jupiter, Saturne et Uranus, se coupent suivant des droites OA, OA′, OA″, qui font entre elles de très petits angles V, V′, V″. Cette remarque faite depuis long-temps donne lieu à une question intéressante. En effet, si les planètes n'étaient soumises qu'à l'action du Soleil, les angles V, V′, V″ seraient invariables; mais en ayant égard aux effets produits par l'attraction mutuelle de Jupiter, Saturne et Uranus, abstraction faite des autres planètes, que l'on peut négliger ici à cause de leur petitesse et de leur éloignement, il est clair que les angles V, V′, V″ varieront avec le temps. On peut donc se demander si, dans un grand nombre de siècles, ces angles seront encore très petits, ou si au contraire ils auront éprouvé des accroissements considérables. Telle est la question que je me propose de résoudre ici par une méthode simple et directe.

2. Soient m, m', m'' les masses de trois planètes circulant dans le même sens autour du Soleil, sur des ellipses dont les excentricités ont des valeurs très petites. Nous regardons les planètes m, m', m'' comme composant en quelque sorte avec le Soleil un système particulier, c'est-à-dire comme assez éloignées des autres planètes m''', m^{iv}, etc. pour que ces dernières n'aient sur le mouvement des premières qu'une influence extrêmement petite; ce cas est à peu près celui de Jupiter, Saturne et Uranus. Les plans des trois orbites forment en outre de très petits angles soit entre eux, soit avec un plan fixe auquel nous rapporterons les mouvements de m, m', m'', et qui sera, si l'on veut, le plan de l'écliptique à une époque arbitrairement

choisie. Le plan de m'' et celui de m' coupent le plan de m suivant les droites OA′, OA″ : les droites dont il s'agit font entre elles deux angles supplémentaires l'un de l'autre; nous désignerons par V celui de ces angles qui est actuellement $< 90°$, en sorte que l'on ait aujourd'hui $V < 90°$. Le plan de m'' et celui de m coupent celui de m' suivant les droites OA , OA″ comprenant de même entre elles l'angle aigu V′: enfin le plan de m' et celui de m coupent le plan de m'' suivant les droites OA , OA′ qui comprennent entre elles l'angle aigu V″.

Désignons par φ, φ', φ'' les inclinaisons respectives des trois orbites sur le plan fixe, et par α, α', α'' les longitudes de leurs nœuds ascendants. L'équation du premier plan en coordonnées rectangulaires sera

$$z = \operatorname{tang}\varphi \cos\alpha . y - \operatorname{tang}\varphi \sin\alpha . x.$$

Les équations du second et du troisième plan seront de même

$$z = \operatorname{tang}\varphi' \cos\alpha' . y - \operatorname{tang}\varphi' \sin\alpha' . x,$$
$$z = \operatorname{tang}\varphi'' \cos\alpha'' . y - \operatorname{tang}\varphi'' \sin\alpha'' . x.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}\varphi \sin\alpha &= p, & \operatorname{tang}\varphi \cos\alpha &= q, \\ \operatorname{tang}\varphi' \sin\alpha' &= p', & \operatorname{tang}\varphi' \cos\alpha' &= q', \\ \operatorname{tang}\varphi'' \sin\alpha'' &= p'', & \operatorname{tang}\varphi'' \cos\alpha'' &= q'', \end{aligned}$$

les équations des plans de nos trois planètes deviendront simplement

$$z = qy - px, \quad z = q'y - p'x, \quad z = q''y - p''x.$$

De là, par les formules connues de la Géométrie analytique, on conclura facilement, en fonction de p, q, p', q', p'', q'', les valeurs des trois quantités tang V, tang V′, tang V″. Ces formules sont assez compliquées, mais on les simplifiera en observant que, à cause de la petitesse des quantités p, q, p', q', p'', q'', il est permis de négliger les termes où ces quantités entrent à la quatrième dimension par rapport à ceux où elles entrent à la deuxième dimension. On trouvera de cette manière

$$\operatorname{tang} V = \pm \frac{(p-p')(q-q'')-(p-p'')(q-q')}{(p-p')(p-p'')+(q-q')(q-q'')},$$
$$\operatorname{tang} V' = \pm \frac{(p'-p'')(q'-q)-(p'-p)(q'-q'')}{(p'-p'')(p'-p)+(q'-q'')(q'-q)},$$
$$\operatorname{tang} V'' = \pm \frac{(p''-p)(q''-q')-(p''-p')(q''-q)}{(p''-p)(p''-p')+(q''-q)(q''-q')},$$

et l'on aura soin de prendre dans les seconds membres, un signe tel que ces seconds membres soient positifs, du moins à l'origine du temps, puisque les angles V, V', V'' sont alors aigus par hypothèse.

Si l'on développe les numérateurs des trois fractions précédentes, on trouve que ces numérateurs sont identiquement égaux entre eux : nous représenterons par u leur valeur commune, c'est-à-dire que nous ferons

$$(p-p')(q-q'')-(p-p'')(q-q')=u.$$

En posant de plus

$$(p-p')(p-p'')+(q-q')(q-q'')=v,$$
$$(p'-p'')(p'-p)+(q'-q'')(q'-q)=v',$$
$$(p''-p)(p''-p')+(q''-q)(q''-q')=v'',$$

nous aurons

$$\operatorname{tang} V = \pm \frac{u}{v}, \quad \operatorname{tang} V' = \pm \frac{u}{v'}, \quad \operatorname{tang} V'' = \pm \frac{u}{v''}.$$

Je nomme φ_0, φ_0, φ_0, α_0, α'_0, α''_0 les valeurs initiales de φ, φ', φ'', α, α', α'', c'est-à-dire les valeurs que ces dernières quantités possèdent lorsque le temps t est égal à zéro. En général l'indice o placé au bas d'une lettre exprime pour nous la valeur initiale de la fonction du temps que cette lettre représente. Si les planètes m, m', m'' étaient soumises seulement à l'action du Soleil, elles décriraient autour de cet astre des ellipses invariables : les angles α, φ, α', φ', α'', φ'' demeureraient constamment égaux à α_0, φ_0, α_0, φ'_0, α''_0, φ''_0, et par suite les angles V, V', V'' seraient aussi constants. Mais en vertu de l'attraction réciproque des planètes, les angles α, φ, α', φ', α'', φ'' éprouvent des variations plus ou moins considérables qui doivent influer sur les valeurs de V, V', V'': il s'agit d'examiner si ces perturbations agrandiront à la longue d'une manière très sensible les angles V, V', V'', ou si au contraire ces angles resteront toujours très petits comme à l'origine.

5. Lorsqu'on a seulement égard aux inégalités séculaires du mouvement des trois planètes m, m', m'', les six quantités p, q, p', q', p'', q'', sont, comme on sait, des fonctions du temps t déterminées, avec une approximation suffisante pour notre objet, par six équations différentielles, linéaires et du premier ordre, que voici

$$
\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= -(0,1)(q-q') - (0,2)(q-q''),\\
\frac{dq}{dt} &= (0,1)(p-p') + (0,2)(p-p''),\\
\frac{dp'}{dt} &= -(1,0)(q'-q) - (1,2)(q'-q''),\\
\frac{dq'}{dt} &= (1,0)(p'-p) + (1,2)(p'-p''),\\
\frac{dp''}{dt} &= -(2,0)(q''-q) - (2,1)(q''-q'),\\
\frac{dq''}{dt} &= (2,0)(p''-p) + (2,1)(p''-p').
\end{aligned}
$$

Je prends ces équations dans la *Mécanique céleste*. Les coefficients $(0, 1)$, $(0, 2)$, etc., sont des quantités de l'ordre des masses m, m', m'': les valeurs de ces coefficients dépendent de celles des demi-grands axes des orbites de ces trois planètes.

L'intégration des six équations différentielles précédentes introduira six constantes arbitraires que l'on déterminera à l'aide des valeurs initiales de p, q, p', q', p'', q'', lesquelles sont aussi au nombre de six. En désignant par p_0, q_0, p'_0, q'_0, p''_0, q''_0, ces valeurs initiales, on aura

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \operatorname{tang}\varphi_0 \sin\alpha_0, & q_0 &= \operatorname{tang}\varphi_0 \cos\alpha_0,\\
p'_0 &= \operatorname{tang}\varphi'_0 \sin\alpha'_0, & q'_0 &= \operatorname{tang}\varphi'_0 \cos\alpha'_0,\\
p''_0 &= \operatorname{tang}\varphi''_0 \sin\alpha''_0, & q''_0 &= \operatorname{tang}\varphi''_0 \cos\alpha''_0;
\end{aligned}
$$

quant aux valeurs mêmes de p, q, etc., elles seront de cette forme

$$p = N\sin l + N_1 \sin(g_1 t + l_1) + N_2 \sin(g_2 t + l_2),$$
$$q = N\cos l + N_1 \cos(g_1 t + l_1) + N_2 \cos(g_2 t + l_2);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$N, N_1, N_2, \ldots\ l, l_1, l_2, \ldots$ étant des constantes, et g_1, g_2 représentant les racines d'une certaine équation du second degré.

Les valeurs numériques de toutes les constantes N, N_1, etc., ayant été calculées par Duval le Roy pour le cas particulier de Jupiter, Saturne et Uranus, on voit qu'en admettant l'exactitude des calculs de cet astronome, les valeurs des quantités p, q, p', q', p'', q'' elles-mêmes pourraient être regardées comme des fonctions entièrement connues du temps t : en les substituant dans les expressions de tang V, tang V', tang V'', il serait dès lors facile de savoir ce que deviennent les angles V, V', V'' au bout d'un temps quelconque; mais ici nous présenterons d'une autre manière la recherche des formules propres à déterminer ces angles, et nous ne ferons aucun usage des calculs de Duval le Roy.

4. Étudions d'abord la quantité représentée par u au n° 2. En la différenciant, il vient

$$\frac{du}{dt} = (q' - q'')\frac{dp}{dt} + (q'' - q)\frac{dp'}{dt} + (q - q')\frac{dp''}{dt}$$
$$+ (p'' - p')\frac{dq}{dt} + (p - p'')\frac{dq'}{dt} + (p' - p)\frac{dq''}{dt}.$$

Substituons dans cette équation, au lieu de $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dp'}{dt}$, $\frac{dq'}{dt}$, $\frac{dp''}{dt}$, $\frac{dq''}{dt}$, leurs valeurs fournies par les équations différentielles du n° 3; en posant

$$(2,0) - (1,0) = K, \quad (0,1) - (2,1) = K', \quad (1,2) - (0,2) = K'',$$

et ayant égard aux valeurs de v, v', v'', nous obtiendrons sans difficulté

$$\frac{du}{dt} = Kv + K'v' + K''v''.$$

Si l'on différencie actuellement la valeur de v, on a

$$\frac{dv}{dt}=(p-p'+p-p'')\frac{dp}{dt}+(p''-p)\frac{dp'}{dt}+(p'-p)\frac{dp''}{dt}$$
$$+(q-q'+q-q'')\frac{dq}{dt}+(q''-q)\frac{dq'}{dt}+(q'-q)\frac{dq''}{dt}.$$

Cette équation se simplifie beaucoup lorsqu'on remplace les dérivées $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, etc. par leurs valeurs, et lorsqu'on observe que les trois fonctions

$$\begin{array}{l}(p-p')(q-q'')-(p-p'')(q-q'),\\ (p'-p'')(q'-q)-(p'-p)(q'-q''),\\ (p''-p)(q''-q')-(p''-p')(q''-q),\end{array}$$

sont identiquement égales entre elles. On trouve ainsi

$$\frac{dv}{dt}=[(0,1)-(2,1)+(1,2)-(0,2)+(1,0)-(2,0)]u,$$

ou bien

$$\frac{dv}{dt}=-(K-K'-K'')u.$$

On obtient de même

$$\frac{dv'}{dt}=-(K'-K''-K)u,$$
$$\frac{dv''}{dt}=-(K''-K-K')u.$$

Mais en différenciant l'équation

$$\frac{du}{dt}=Kv+K'v'+K''v'',$$

il vient

$$\frac{d^2u}{dt^2}=K\frac{dv}{dt}+K'\frac{dv'}{dt}+K''\frac{dv''}{dt},$$

ce qui, en ayant égard aux valeurs de $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dv'}{dt}$, $\frac{dv''}{dt}$, et faisant

$$w=K(K-K'-K'')+K'(K'-K''-K)+K''(K''-K-K'),$$

nous donne

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -n^2u,$$

équation différentielle du second ordre dont l'intégrale est

$$u = h\sin(nt+\omega),$$

h et ω désignant deux constantes arbitraires.

Pour déterminer ces constantes, on posera $t=0$ dans les deux équations

$$u = h\sin(nt+\omega),$$

$$\frac{du}{dt} = \mathrm{K}v + \mathrm{K}'v' + \mathrm{K}''v'' = nh\cos(nt+\omega),$$

et en nommant u_0, v_0, v'_0, v''_0 les valeurs initiales de u, v, v', v'', on aura

$$u_0 = h\sin\omega,\quad \mathrm{K}v_0 + \mathrm{K}'v'_0 + \mathrm{K}''v''_0 = nh\cos\omega;$$

il faudra en outre se rappeler que

$$\begin{aligned}
u_0 &= (p_0 - p'_0)(q_0 - q''_0) - (p_0 - p''_0)(q_0 - q'_0),\\
v_0 &= (p_0 - p'_0)(p_0 - p''_0) + (q_0 - q'_0)(q_0 - q''_0),\\
v'_0 &= (p'_0 - p''_0)(p'_0 - p_0) + (q'_0 - q''_0)(q'_0 - q_0),\\
v''_0 &= (p''_0 - p_0)(p''_0 - p'_0) + (q''_0 - q_0)(q''_0 - q'_0).
\end{aligned}$$

De là résulte, pour déterminer h, l'égalité

$$h = \sqrt{\frac{1}{n^2}(\mathrm{K}v_0 + \mathrm{K}'v'_0 + \mathrm{K}''v''_0)^2 + u_0^2};$$

ensuite on prendra $\sin\omega = \frac{u_0}{h}$.

En remplaçant u par $h\sin(nt+\omega)$ dans les équations qui fournissent les valeurs de $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dv'}{dt}$, $\frac{dv''}{dt}$, puis intégrant ces équations, il vient

$$\begin{aligned}
v &= v_0 + \frac{(\mathrm{K}-\mathrm{K}'-\mathrm{K}'')h}{n}[\cos(nt+\omega) - \cos\omega],\\
v' &= v'_0 + \frac{(\mathrm{K}'-\mathrm{K}''-\mathrm{K})h}{n}[\cos(nt+\omega) - \cos\omega],\\
v'' &= v''_0 + \frac{(\mathrm{K}''-\mathrm{K}-\mathrm{K}')h}{n}[\cos(nt+\omega) - \cos\omega],
\end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\begin{aligned} \nu &= \lambda + \mu\cos(nt+\omega), \\ \nu' &= \lambda' + \mu'\cos(nt+\omega), \\ \nu'' &= \lambda'' + \mu''\cos(nt+\omega), \end{aligned}$$

en faisant

$$\mu = \frac{(K - K' - K'')h}{n}, \quad \mu' = \frac{(K' - K'' - K)h}{n}, \quad \mu'' = \frac{(K'' - K - K')h}{n},$$

et

$$\lambda = \nu_0 - \mu\cos\omega, \quad \lambda' = \nu'_0 - \mu'\cos\omega, \quad \lambda'' = \nu''_0 - \mu''\cos\omega.$$

Par suite on a

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} V &= \pm \frac{h\sin(nt+\omega)}{\lambda + \mu\cos(nt+\omega)}, \\ \operatorname{tang} V' &= \pm \frac{h\sin(nt+\omega)}{\lambda' + \mu'\cos(nt+\omega)}, \\ \operatorname{tang} V'' &= \pm \frac{h\sin(nt+\omega)}{\lambda'' + \mu''\cos(nt+\omega)}. \end{aligned}$$

5. Faisons l'application de nos formules au cas particulier où les trois planètes m, m', m'' sont respectivement Jupiter, Saturne et Uranus. En rapportant leurs mouvements à l'écliptique fixe de 1800 (époque à laquelle nous plaçons l'origine du temps t), et adoptant les nombres contenus dans le troisième volume de l'ouvrage de M. de Pontécoulant, on a

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 1^\circ.18'.52'', & \alpha_0 &= 98^\circ.25'.45'', \\ \varphi'_0 &= 2^\circ.29'.38'', & \alpha'_0 &= 111^\circ.56'.\ 7'', \\ \varphi''_0 &= 46'.26'', & \alpha''_0 &= 72^\circ.59'.21'', \end{aligned}$$

la circonférence étant supposée partagée en 360°. Il en résulte par un calcul très simple

$$\begin{aligned} p_0 &= 0{,}0226975, & q'_0 &= -\,0{,}0162700, \\ q_0 &= -\,0{,}0033635, & p''_0 &= 0{,}0129167, \\ p'_0 &= 0{,}0404010, & q'' &= 0{,}0039517; \end{aligned}$$

puis

$$
\begin{aligned}
u_0 &= \quad 0{,}000003269,\\
\nu_0 &= -\,0{,}000267568,\\
\nu_0' &= \quad 0{,}000747560,\\
\nu_0'' &= \quad 0{,}000416744.
\end{aligned}
$$

D'après M. de Pontécoulant, on a aussi

$$
\begin{aligned}
(0,1) &= 7'',367280, & (1,2) &= 0'',386656,\\
(0,2) &= 0'',105202, & (2,0) &= 0'',931305,\\
(1,0) &= 18'',129129, & (2,1) &= 1'',390990;
\end{aligned}
$$

d'où l'on conclut

$$K = -\,17'',197824,\quad K' = 5'',976290,\quad K'' = 0{,}281454:$$

les coefficients K, K′, K″ sont, comme on voit, exprimés en secondes sexagésimales : en adoptant les valeurs ci-dessus, le temps t qui entre dans nos formules, représentera un certain nombre d'années juliennes.

En partant de ces données, on a trouvé $n = 23'',311702$. La valeur de u_0 étant très petite, on peut négliger u_0^2 dans l'expression générale de h : on a ainsi

$$h = \frac{K\nu_0 + K'\nu_0' + K''\nu_0''}{n} = 0{,}000394;$$

par suite il vient

$$\mu = -\,0{,}000396,\quad \mu' = 0{,}000387,\quad \mu'' = 0{,}000194.$$

L'angle ω, dont le sinus $= \frac{u_0}{h}$, est à peu près d'un demi-degré; on peut donc regarder son cosinus comme sensiblement égal à l'unité : de là résulte

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \nu_0 - \mu = 0{,}000128,\\
\lambda' &= \nu_0' - \mu' = 0{,}000360,\\
\lambda'' &= \nu_0'' - \mu'' = 0{,}000222,
\end{aligned}
$$

d'où l'on voit que l'on a $\lambda^2 < \mu^2$, $\lambda'^2 < \mu'^2$, et au contraire $\lambda''^2 > \mu''^2$. Cela posé, discutons successivement les valeurs de tang V, tang V′, tang V″.

La valeur de V devant être positive pour $t = 0$, il faut poser

$$\operatorname{tang} V = -\,\frac{h\sin(nt+\omega)}{\lambda + \mu\cos(nt+\omega)}.$$

Cette valeur de tang V devient infinie lorsqu'on a

$$\cos(nt + \omega) = -\frac{\lambda}{\mu},$$

équation qui fournit pour t une valeur réelle, puisque λ^2 est $< \mu^2$.

L'angle V peut donc croître jusqu'à 90° et au-delà; il n'est susceptible d'aucun *maximum*. On peut en dire autant de l'angle V'. La valeur de tang V'' est au contraire

$$\text{tang}\, V'' = \frac{h \sin(nt + \omega)}{\lambda'' + \mu'' \cos(nt + \omega)},$$

λ''^2 étant $> \mu''^2$, de sorte qu'elle ne devient jamais infinie.

L'angle V'' sera donc toujours plus petit que 90° : son *maximum* s'obtiendra en égalant à zéro la différentielle de l'expression précédente prise par rapport au temps. On a par là

$$\textit{maximum} \text{ de tang } V'' = \frac{h}{\sqrt{\lambda''^2 - \mu''^2}}.$$

Mais à cause de la petitesse de $\lambda''^2 - \mu''^2$, on voit qu'un léger changement dans les données du problème suffirait pour rendre $\lambda''^2 < \mu''^2$, c'est-à-dire pour rendre V'' susceptible d'un accroissement indéfini. On voit de même que ce changement pourrait suffire aussi pour rendre la valeur de λ'^2 supérieure à celle de μ'^2, c'est-à-dire pour donner un *maximum* à V'. En observant en outre que les petites quantités négligées dans nos formules peuvent avoir ici un effet très sensible, on comprend que les conclusions relatives aux angles V', V'' sont tout-à-fait incertaines. Cependant nos calculs prouvent suffisamment que ces angles ne sont pas assujétis à demeurer toujours très petits. Quant à l'angle V, sa marche est déterminée avec plus de précision par notre analyse, puisque la différence entre λ^2 et μ^2 est considérable, la valeur de μ^2 étant $> 9\lambda^2$.

Je ferai observer en terminant, que les expressions de tang V, tang V', tang V'', obtenues ci-dessus, sont périodiques : elles ne changent pas lorsque t augmente de $\frac{C}{n}$, C étant la circonférence estimée en secondes sexagésimales : la période de leurs variations est donc de 56000 ans à peu près.