JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DUHAMEL

Nouvelle règle pour la convergence des séries

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 214-221.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__214_0>

Nouvelle règle sur la Convergence des Séries;

PAR M. DUHAMEL.

1. On sait qu'une série

$$U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n + U_{n+1} + \text{etc.}$$

dont tous les termes sont positifs, est convergente lorsque le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ tend vers une limite plus petite que l'unité, à mesure que n augmente indéfiniment; et qu'elle est divergente, lorsque cette limite est plus grande que l'unité. Il y a incertitude quand la limite dont nous parlons est égale à 1 : on observera toutefois que si $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est toujours au-dessus de la limite 1, la série est divergente, parce que ses termes vont toujours en croissant. Il existe pour les cas douteux des règles qui conduisent quelquefois à reconnaître la convergence ou la divergence des séries. Je me propose ici d'en faire connaître une nouvelle qui pourra s'appliquer dans des circonstances où les autres ne réussiraient pas.

2. Je remarquerai d'abord que si l'on a une série convergente

$$U_0 + U_1 + \ldots + U_n + U_{n+1} + \text{etc.}$$

et qu'une autre série

$$V_0 + V_1 + \ldots + V_n + V_{n+1} + \text{etc.}$$

soit telle que depuis un certain terme jusqu'à l'infini, l'on ait $\frac{V_{n+1}}{V_n} < \frac{U_{n+1}}{U_n}$, cette seconde série sera convergente. Car si l'on multiplie la première par $\frac{V_n}{U_n}$, n ayant une valeur déterminée telle que la condition supposée soit remplie, la série ainsi obtenue sera encore convergente. Or tous les termes de la seconde, depuis V_n, se trouveront inférieurs aux termes correspondants de cette dernière: donc la seconde série sera elle-même convergente.

3. Cela posé, considérons une série

$$U_0 + U_1 + \ldots + U_n + U_{n+1} + \text{etc.},$$

telle que l'on ait

$$\lim. \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1,$$

le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ étant toujours plus petit que l'unité, depuis une certaine valeur de n jusqu'à l'infini.

On pourra mettre ce rapport sous la forme

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{1+\alpha},$$

α étant positif et tendant vers zéro.

Or je vais démontrer que si l'on a

$$\lim. n\alpha > 1,$$

la série sera convergente; et qu'elle sera divergente, si l'on a

$$\lim. n\alpha < 1.$$

1°. Soit $\quad \lim. n\alpha = k, \quad \text{et} \quad k > 1.$

Désignons par m une quantité déterminée quelconque, comprise entre 1 et k, et par conséquent plus grande que l'unité. Il est facile de voir que, depuis une certaine valeur de n jusqu'à l'infini, on aura

$$1 + \alpha > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m.$$

En effet,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m = 1 + \frac{m}{n} + \frac{m(m-1)}{1.2n^2} + \text{etc.},$$

et pour que l'inégalité précédente ait lieu, il suffira que l'on ait

$$\alpha > \frac{m}{n} + \frac{m(m-1)}{1.2.n^2} + \text{etc.},$$

ou

$$n\alpha > m + \frac{m(m-1)}{1.2.n} + \text{etc.}$$

Or le second membre tend vers m et le premier vers k, à mesure que n augmente; donc, depuis une valeur déterminée de n jusqu'à l'infini, l'inégalité aura lieu, puisque la limite de son premier membre est plus grande que que la limite du second. Donc depuis cette valeur de n jusqu'à l'infini, on aura

$$1 + \alpha > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m,$$

et par suite,

$$\frac{1}{1+\alpha} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m},$$

ou

$$\frac{U_n}{U_{n+1}} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m};$$

mais si l'on considère la série

$$(1) \qquad \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots + \frac{1}{n^m} + \frac{1}{(n+1)^m} + \text{etc.},$$

le rapport du terme général au précédent sera

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m},$$

et par conséquent plus grand que dans la série proposée. De plus la série (1) est convergente puisque l'on a $m > 1$; donc aussi la série proposée est convergente : ce que nous nous proposions de démontrer.

2°. Soit maintenant

$$\lim. n\alpha = k \quad \text{et} \quad k < 1.$$

Prenons une quantité quelconque m comprise entre 1 et k, et par suite plus petite que l'unité; je dis que l'on finira par avoir constamment

$$1 + \alpha < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m,$$

ou

$$\alpha < \frac{m}{n} + \frac{m(m-1)}{1.2.n^2} + \text{etc.},$$

ou encore

$$n\alpha < m + \frac{m(m-1)}{1.2.n} + \text{etc.}$$

Car lorsque n croît indéfiniment, le premier membre tend vers k et le second vers m qui est $> k$. Donc depuis une certaine valeur de n jusqu'à l'infini, les inégalités précédentes auront lieu; d'où il résultera

$$\frac{1}{1+\alpha} > \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m};$$

et par conséquent $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ finit par être constamment supérieur au rapport des termes correspondants de la série dont le terme général est $\frac{1}{n^m}$. Mais m étant plus petit que l'unité, cette dernière série est infinie; donc la proposée l'est aussi.

Donc enfin, comme nous l'avions annoncé, la série proposée sera convergente, si l'on a $\lim. n\alpha > 1$; et divergente, si l'on a $\lim. n\alpha < 1$.

4. On ne peut en général prononcer sur la nature de la série, lorsque l'on a

$$\lim. n\alpha = 1.$$

Néanmoins, si $n\alpha$ est toujours plus petit que la limite 1, on peut affirmer que la série est divergente. Car alors on a

$$\frac{1}{1+\alpha} > \frac{1}{1+\frac{1}{n}},$$

et le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est supérieur au rapport $\frac{n}{n+1}$ relatif à la série divergente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \text{etc.},$$

d'ou il résulte que la série proposée est infinie.

Le seul cas qui reste douteux est donc celui où l'on a

$$\lim . n\alpha = 1;$$

$n\alpha$ n'étant pas constamment plus petit que 1.

5. Appliquons cette règle à la série

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots\ldots 2n} \frac{1}{2n+1} + \text{etc.}$$

On aura dans ce cas

$$\lim \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$$

et

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{1}{1 + \frac{6n+5}{(2n+1)^2}},$$

d'où

$$\alpha = \frac{6n+5}{(2n+1)^2}, \quad n\alpha = \frac{6n^2+5n}{4n^2+4n+1},$$

et par suite,

$$\lim . n\alpha = \frac{6}{4} = 1 + \frac{1}{2};$$

d'où il résulte que la série proposée est convergente.

Considérons maintenant cette autre série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} + \text{etc.},$$

pour laquelle on a encore $\lim. \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$. Le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ aura pour valeur

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2n+1}}.$$

On aura donc

$$n\alpha = \frac{n}{2n+1}$$

et

$$\lim.\ n\alpha = \frac{1}{2},$$

d'où il résulte que la série est divergente, et que la somme est infinie.

6. Rapprochons maintenant de la règle précédente celle que l'on a déduite de la considération des intégrales définies, et, pour plus de clarté, rappelons d'abord en peu de mots les principes sur lesquels celle-ci est fondée.

Soit la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \text{etc.}$$

dont tous les termes, depuis une certaine valeur de n jusqu'à l'infini, sont positifs et décroissent constamment en tendant vers la limite zéro. Elle sera convergente ou divergente suivant que la somme des termes à partir de cette valeur de n tendra ou non vers une limite finie.

Supposons que l'expression du terme général soit une fonction de forme finie de n, et désignons par u_x une fonction de la variable x, obtenue en changeant n en x dans u_n. Cette fonction u_x reproduirait tous les termes de la série proposée, en y donnant à x toutes les valeurs entières et positives. Sa valeur allant constamment en décroissant quand on fait croître x par degrés égaux à l'unité, à partir d'une certaine valeur entière, il arrivera généralement que la fonction u_x ira constamment en décroissant lorsque x croîtra d'une manière continue depuis une certaine valeur jusqu'à l'infini.

Admettant qu'il en soit ainsi depuis la valeur entière m, on aura

$$u_m > \int_m^{m+1} u_x dx,\quad u_{m+1} > \int_{m+1}^{m+2} u_x dx,\quad u_{m+2} > \int_{m+2}^{m+3} u_x dx,\ \text{etc.}\ldots$$

et

$$u_{m+1} < \int_m^{m+1} u_x dx, \quad u_{m+2} < \int_{m+1}^{m+2} u_x dx, \quad \text{etc.}\dots$$

D'où il résulte

$$\int_m^\infty u_x dx < u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \text{etc.}\dots$$

et

$$\int_m^\infty u_x dx > u_{m+1} + u_{m+2} + \text{etc.}\dots\dots$$

Or si cette intégrale $\int_m^\infty u_x dx$ est finie, il s'ensuivra que la série à partir de u_{m+1} le sera de même. Et si elle est infinie, la série commençant à u_m le sera aussi. D'où il résulte que la série proposée sera convergente ou divergente, suivant que l'intégrale

$$\int_m^\infty u_x dx$$

sera finie ou infinie.

7. Appliquons cette règle à la série

$$\frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \dots + \frac{1}{n^a} + \text{etc.}\dots\dots$$

La fonction u_x est dans ce cas $\frac{1}{x^a}$, et va constamment en décroissant quand x augmente, a étant supposé positif.

Or, $\int \frac{dx}{x^a} = \frac{x^{1-a}}{1-a} + \text{C}$ et par suite $\int_m^\infty \frac{dx}{x^a}$ est infinie, si l'on a $a < 1$, et finie si $a > 1$;

Si $a = 1$, on a $\int \frac{dx}{x^a} = \int \frac{dx}{x} = \log x + \text{C}$, quantité infinie en même temps que x.

Donc la série proposée est convergente si $a > 1$, et divergente si $a < 1$ ou $a = 1$.

8. Appliquons cette même règle à la série

$$\frac{\log.2}{2} + \frac{\log.3}{3} + \dots + \frac{\log n}{n} + \text{etc.}\dots$$

On a alors $u_x = \frac{\log x}{x}$, expression qui décroît constamment depuis la valeur de x pour laquelle $\log x = 1$. Or,

$$\int \frac{dx \log x}{x} = \frac{\log^2 x}{2 \log e} + C.$$

Donc $\int_m^\infty u_x dx$ est infinie, et la série en question est divergente. Ce qui montre que le produit $\sqrt[2]{2}\,\sqrt[3]{3}\,\sqrt[4]{4} \ldots \sqrt[n]{n} \ldots$ est infini. Notre première règle conduirait au même résultat, parce que l'on aurait

$$n\alpha = \frac{\log n - n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)},$$

ce qui donne $\lim. n\alpha = 1$. Mais comme on a évidemment $n\alpha < 1$, la série est divergente, d'après ce que nous avons dit dans le n° 4.

L'une et l'autre règle feraient voir que la série dont le terme général est $\left(\frac{\log n}{n}\right)^2$ est convergente.

9. M. Cauchy a démontré dans son *Analyse algébrique* que dans le cas où $\lim. \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, on peut affirmer que la série est convergente, lorsque $\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n}$ a une limite plus grande que 1; et qu'elle est divergente, lorsque cette limite est plus petite que 1. Nous ajouterons à cette règle une remarque qui paraît avoir échappé à ce savant géomètre, et qui est analogue à celle que nous avons faite dans le n° 4. C'est que dans le cas où $\frac{\log\left(\frac{1}{u_n}\right)}{\log n}$ a pour limite 1, la série est divergente, si ce rapport finit par être constamment au-dessous de la limite 1 vers laquelle il converge; de sorte qu'il n'y a d'incertitude que dans le cas où le rapport ne croît pas constamment, en s'approchant de sa limite 1.