JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LEJEUNE-DIRICHLET

Sur une nouvelle méthode pour la détermination des intégrales multiples

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 164-168.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__164_0>

Sur une nouvelle Méthode pour la détermination des Intégrales multiples ;

Par M. LEJEUNE-DIRICHLET (*).

On sait que l'évaluation ou même la réduction des intégrales multiples présente généralement de très grandes difficultés, lorsque les inégalités de condition qui définissent l'étendue des intégrations, renferment à la fois plusieurs des variables. En m'occupant de quelques questions de Physique mathématique qui dépendent, en dernière analyse, de l'évaluation d'une classe d'intégrales multiples d'un ordre indéfini, j'ai été conduit à une méthode qui paraît diminuer, dans beaucoup de cas, les difficultés dont je viens de parler. Cette méthode consiste simplement à multiplier l'expression qu'il s'agit d'intégrer par un facteur dont la valeur est égale à l'unité dans l'étendue que les intégrations doivent embrasser, et qui s'évanouit en dehors de cette étendue. L'expression différentielle ainsi modifiée, pouvant être intégrée entre des limites constantes et très simples, telles que 0 et ∞, ou $-\infty$ et ∞, la question sera le plus souvent beaucoup plus facile à traiter. C'est ce procédé que je vais appliquer à quelques problèmes particuliers. Pour premier exemple, je choisirai la question si célèbre de l'attraction des ellipsoïdes homogènes. La méthode appliquée à ce problème présente cela de remarquable, que la solution pour les deux cas d'un point extérieur et d'un point intérieur, qu'on avait toujours ramenés du premier au second, ou traités par des moyens tout-à-fait différents, résulte d'une analyse uniforme, qui s'étend généralement à toute loi d'attraction proportionnelle à une puissance quelconque entière ou fractionnaire de la distance. La même

(*) Cet article est extrait des *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*. Voyez tome VIII, page 156. (J. L.)

analyse ramène ce problème aux quadratures, lorsque la densité, au lieu d'être constante, est une fonction quelconque rationnelle et entière des trois coordonnées rectangulaires; mais, pour plus de simplicité, je supposerai la densité constante et égale à l'unité.

Soient x, y, z, les coordonnées d'un point quelconque de la masse attirante, a, b, c celles du point attiré. Posons $\rho^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ et soit $\frac{1}{\rho^p}$ la loi de l'attraction, la constante p étant supposée comprise entre 2 et 3, cas auquel il est facile de ramener tous les autres. Cela posé, la question se réduit à déterminer l'intégrale triple suivante, dont le coefficient différentiel pris par rapport à a, donne la composante de l'attraction parallèle à l'axe des x, que je désignerai par A :

$$-\frac{1}{p-1}\iiint\frac{dx\,dy\,dz}{\rho^{p-1}} \quad (1), \qquad \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 < 1.$$

Or, comme l'intégrale $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi}\cos g\varphi\, d\varphi$ est égale à l'unité ou à zéro, suivant que la constante positive g est inférieure ou supérieure à l'unité, on conclut que l'intégrale (1) est la partie réelle de celle-ci :

$$-\frac{2}{\pi(p-1)}\int_0^\infty d\varphi.\frac{\sin\varphi}{\varphi}\iiint e^{\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2\right]\varphi\sqrt{-1}}\,\frac{dx\,dy\,dz}{\rho^{p-1}};$$

les intégrations par rapport aux variables x, y, z pouvant maintenant s'étendre depuis $-\infty$ jusqu'à ∞. Pour obtenir l'intégrale triple relative à ces variables, on exprimera la fraction $\frac{1}{\rho^{p-1}} = \frac{1}{(\rho^2)^{\frac{p-1}{2}}}$, par une intégrale définie, au moyen de la formule connue d'Euler, que M. Poisson a démontrée et qui suppose les constantes q et r positives, et de plus $r < 1$:

$$\int_0^\infty e^{q\psi\sqrt{-1}}\,\psi^{r-1}\,d\psi = \frac{\Gamma(r)\,e^{\frac{r\pi}{2}\sqrt{-1}}}{q^r} \qquad (2).$$

Il viendra ainsi, en remplaçant ρ^2 par sa valeur,

$$-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{e^{-(p-1)\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}}{(p-1)\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}\int_0^\infty d\varphi.\frac{\sin\varphi}{\varphi}\int_0^\infty d\Psi.\Psi^{\frac{p-1}{2}-1}e^{(a^2+b^2+c^2)\Psi}\,\mathrm{U},$$

U désignant, pour abréger, le produit de trois intégrales simples, dont celle relative à x est, en vertu d'une formule connue qui dérive de l'équation (2),

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[\left(\Psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}\right)x^2-2a\Psi x\right]\sqrt{-1}}\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{\Psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}}}\cdot e^{-\frac{a^2\Psi^2}{\Psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}}\sqrt{-1}}\cdot\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

En substituant cette valeur et celles des deux autres intégrales de forme analogue, remplaçant ensuite la variable Ψ par une autre s telle que $\Psi=\frac{\varphi}{s}$, différentiant par rapport à a, et observant qu'on a

$$\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^3=\sqrt{-1}\,e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}},$$

on trouvera

$$\frac{4a}{\alpha^2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}\,\frac{e^{-(p-2)\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}}{p-1}\int_0^\infty\frac{ds\;s^{1-\frac{p}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}\int_0^\infty e^{\varphi\left(\frac{a^2}{\alpha^2+s}+\frac{b^2}{\beta^2+s}+\frac{c^2}{\gamma^2+s}\right)\sqrt{-1}}\,\frac{\sin\varphi}{\varphi^{2-\frac{p}{2}}}\,d\varphi$$

Cette expression devant être réduite à sa partie réelle, tout revient à avoir celle de $e^{-(p-2)\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{\sigma\varphi\sqrt{-1}}\frac{\sin\varphi}{\varphi^{2-\frac{p}{2}}}d\varphi$, en posant, pour abréger,

$$\sigma=\frac{a^2}{\alpha^2+s}+\frac{b^2}{\beta^2+s}+\frac{c^2}{\gamma^2+s}.$$

Or, cette intégrale, en y remplaçant $\sin\varphi$ par des exponentielles imaginaires, sera immédiatement donnée par l'équation (2), en ayant soin d'observer que le second membre de cette équation doit être remplacé par $\frac{\Gamma(r)\, e^{-\frac{r\pi}{2}\sqrt{-1}}}{(-q)^r}$, lorsque q a une valeur négative. On trouve ainsi que la partie réelle qu'il s'agit d'obtenir est zéro, ou

$$-\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)\sin\frac{p\pi}{2}}{2(1-\sigma)^{\frac{p}{2}-1}} = \frac{\pi}{2\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)}\,\frac{1}{(1-\sigma)^{\frac{p}{2}-1}},$$

suivant que $\sigma > 1$ ou $\sigma < 1$.

I. Si le point est intérieur, on aura $\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}+\frac{c^2}{\gamma^2}<1$, et par conséquent aussi $\sigma < 1$, la variable s étant positive. Il viendra donc simplement

$$=\frac{2a\pi^2}{\alpha^2(p-1)}\,\frac{1}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)}\int_0^\infty \frac{ds\, s^{1-\frac{p}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}\left(1-\frac{a^2}{\alpha^2+s}-\frac{b^2}{\beta^2+s}-\frac{c^2}{\gamma^2+s}\right)^{1-\frac{p}{2}}$$

II. Si le point est extérieur, on déterminera la racine positive unique λ de l'équation $\sigma = 1$, et l'on aura évidemment $\sigma > 1$ ou $\sigma < 1$, suivant que $s < \lambda$ ou $s > \lambda$. L'expression de A sera donc, dans ce cas,

$$=\frac{2a\pi^{\frac{\lambda}{2}}}{\alpha^2(p-1)}\,\frac{1}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)}\int_\lambda^\infty \frac{ds\, s^{1-\frac{p}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}\left(1-\frac{a^2}{\alpha^2+s}-\frac{b^2}{\beta^2+s}-\frac{c^2}{\gamma^2+s}\right)^{1-\frac{p}{2}}.$$

Si dans cette dernière expression on écrit $\lambda + s$ au lieu de s, et qu'on fasse

$$\alpha^2+\lambda=\alpha'^2,\quad a'=\frac{a\alpha}{\alpha'},\quad \beta^2+\lambda=\beta'^2,\; b'=\frac{b\beta}{\beta'},\quad \gamma^2+\lambda=\gamma'^2,\quad c'=\frac{c\gamma}{\gamma'},$$

elle prendra la même forme que celle qui se rapporte au point intérieur, comme cela doit être en vertu du théorème des points correspondants, dû à M. Ivory, et qui, comme M. Poisson en a déjà fait la remarque, s'étend à toutes les lois d'attraction en fonction de la distance. Il est sans doute inutile d'ajouter que l'analyse que nous venons de développer, s'applique à toute intégrale dont la forme est semblable à celle de l'intégrale (1), et quel que soit le nombre des variables qu'elle puisse renfermer.

Comme second exemple, j'indiquerai l'intégrale

$$V = \int x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}\ldots dxdydz\ldots,$$

qui doit être étendue à toutes les valeurs positives de $x, y, z, \ldots$ telles qu'on ait

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r + \ldots < 1,$$

les constantes $a, b, c, \ldots p, q, r, \ldots \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ étant également positives. Par une analyse toute semblable, on parvient à cette expression très simple, qu'on peut aussi obtenir par d'autres moyens, et qui renferme un grand nombre de résultats relatifs aux volumes, aux centres de gravité, moments d'inertie, etc. :

$$V = \frac{\alpha^a\beta^b\gamma^c\ldots}{pqr}\,\frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right)\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)\Gamma\left(\frac{c}{r}\right)\ldots}{\Gamma\left(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\ldots\right)}.$$

En terminant, je ferai observer que l'intégrale transformée que l'on obtient au moyen du procédé indiqué, peut, dans beaucoup de cas, devenir indéterminée, à cause des limites infinies. Pour éviter les difficultés et même les inexactitudes que cette circonstance pourrait faire naître, on aura recours à l'artifice ingénieux dont MM. Poisson et Cauchy ont fait usage dans différentes recherches, et qui consiste à remplacer l'intégrale proposée par une autre, dont la première puisse être considérée comme la limite, et qui reste complétement déterminée, lorsqu'on lui applique la méthode dont nous venons de donner quelques exemples.