

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

POISSON

**Note de M. Poisson relative au mémoire précédent**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1<sup>re</sup> série*, tome 2 (1837), p. 184-188.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1837\\_1\\_2\\_\\_184\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__184_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

## NOTE DE M. POISSON

## RELATIVE AU MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

La première équation du paragraphe XIV, savoir :

$$(1) \quad \int_0^b \int_c^b \frac{(y^2 - x^2) dy dx}{\sqrt{(b^2 - x^2)(c^2 - x^2)(y^2 - b^2)(c^2 - y^2)}} = \frac{1}{2} \pi,$$

peut se changer en celle-ci,

$$(2) \quad \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{(b^2 - x^2)(c^2 - x^2)}} \int_b^c \frac{y^2 dy}{\sqrt{(y^2 - b^2)(c^2 - y^2)}} - \int_0^b \frac{x^2 dx}{\sqrt{(b^2 - x^2)(c^2 - x^2)}} \int_b^c \frac{dy}{\sqrt{(y^2 - b^2)(c^2 - y^2)}} = \frac{1}{2} \pi$$

Pour la vérifier, je fais d'abord

$$x = b \sin \varphi, \quad dx = b \cos \varphi d\varphi, \quad b = ac;$$

les limites relatives à  $\varphi$ , qui répondent à  $x = 0$  et  $x = b$ , seront  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \frac{1}{2} \pi$ ; et d'après les notations connues de Legendre, il en résultera

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{(b^2 - x^2)(c^2 - x^2)}} &= \frac{1}{c} \int_0^{\frac{1}{2} \pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{c} F, a, \\ \int_0^b \frac{x^2 dx}{\sqrt{(b^2 - x^2)(c^2 - x^2)}} &= c \int_0^{\frac{1}{2} \pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \varphi}} \\ &\quad - c \int_0^{\frac{1}{2} \pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \varphi}} = c(F, a - E, a). \end{aligned}$$

Je fais ensuite

$$\begin{aligned} \frac{y^2 - b^2}{c^2 - y^2} &= \cot^2 \theta, \quad y^2 = c^2 - (c^2 - b^2) \sin^2 \theta, \\ dy &= - \frac{(c^2 - b^2) \sin \theta \cos \theta d\theta}{\sqrt{c^2 - (c^2 - b^2) \sin^2 \theta}}, \quad c^2 - b^2 = e^2 a^2, \end{aligned}$$

les limites relatives à  $y$ , qui répondent à  $y = b$  et  $y = c$ , seront  $\theta = \frac{1}{2}\pi$  et  $\theta = 0$ ; en les intervertissant et changeant le signe de l'intégrale, on aura

$$\int_b^c \frac{dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = \frac{1}{c} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1}{c} F_{1,a},$$

$$\int_b^c \frac{y^2 dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = c \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta} d\theta = c E_{1,a}.$$

Au moyen de ces transformations, l'équation (2) devient

$$(3) \quad F_{1,a} E_{1,a} + F_{1,a} E_{1,a} - F_{1,a} F_{1,a} = \frac{1}{2}\pi;$$

et en observant que les modules  $a$  et  $a$  sont complémentaires, on voit qu'elle coïncide avec une équation trouvée par Legendre (\*).

La dernière équation du paragraphe XIV devant subsister pour toutes les valeurs de  $\mu$ , et ayant lieu évidemment pour  $\mu = 0$ , il suffira de vérifier sa différentielle par rapport à  $\mu$ , ou, ce qui est la même chose, l'équation

$$\int_0^b \int_b^c \frac{(\mu^2-x^2)(\mu^2-y^2)(y^2-x^2)dydx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = \frac{1}{2}\pi\mu^4 - \frac{1}{3}\pi\mu^2(b^2+c^2) + \frac{1}{6}\pi b^2c^2.$$

Elle se décompose en trois autres, savoir :

$$\int_0^b \int_b^c \frac{(y^2-x^2)dydx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = \frac{1}{2}\pi,$$

$$\int_0^b \int_b^c \frac{(y^4-x^4)dydx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = \frac{1}{3}\pi(b^2+c^2),$$

$$\int_0^b \int_b^c \frac{x^2 y^2 (y^2-x^2)dydx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = \frac{1}{6}\pi b^2 c^2.$$

La première est la même que l'équation (1), qu'on vient de vérifier; les deux autres peuvent s'écrire ainsi :

---

(\*) *Traité des fonctions elliptiques*, tome I<sup>er</sup>, page 60.

$$(4) \begin{cases} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}} \int_b^c \frac{y^4 dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} \\ - \int_0^b \frac{x^4 dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}} \int_0^c \frac{dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = \frac{1}{3}\pi (b^2+c^2), \\ \int_0^b \frac{x^2 dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}} \int_b^c \frac{y^4 dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} \\ - \int_0^b \frac{x^4 dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}} \int_b^c \frac{y^2 dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = \frac{1}{6}\pi b^2 c^2. \end{cases}$$

D'après les transformations précédentes, on a

$$\int_0^b \frac{x^4 dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}} = a^4 c^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4 \phi d\phi}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \phi}},$$

$$\int_b^c \frac{y^4 dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = c^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(1-a^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}} d\theta}{(1-a^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}}.$$

En intégrant par parties, et ayant égard aux limites, on a aussi

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 \phi \cos^2 \phi d\phi}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \phi}} = \frac{1}{a^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \sqrt{1-a^2 \sin^2 \phi} d\phi,$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4 \phi d\phi}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \phi}} &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 \phi d\phi}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \phi}} \\ &\quad - \frac{1}{a^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(1-2\sin^2 \phi)(1-a^2 \sin^2 \phi) d\phi}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \phi}} \\ &= \frac{2(1+a^2)}{a^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 \phi d\phi}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \phi}} - \frac{1}{a^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \phi}} \\ &\quad - 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4 \phi d\phi}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \phi}}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4 \phi d\phi}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \phi}} &= \frac{2(1+a^2)}{3a^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 \phi d\phi}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \phi}} \\ &\quad - \frac{1}{3a^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \phi}} \\ &= \frac{2+a^2}{3a^4} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \phi}} - \frac{2(1+a^2)}{3a^4} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \phi}}. \end{aligned}$$

En même temps, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1-a^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}} d\theta &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta}} \\ &\quad - 2a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta}} + a^4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4 \theta d\theta}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta}}, \\ \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4 \theta d\theta}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta}} &= \frac{2(1+a^2)}{3a^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta}} \\ &\quad - \frac{1}{3a^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta}}; \end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1-a^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}} d\theta &= \frac{3-a^2}{3} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta}} \\ &\quad + \frac{2a^2(a^2-2)}{3} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \frac{2(1+a^2)}{3} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta}} - \frac{a^2}{3} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta}} \end{aligned}$$

Cela étant, en employant les notations de Legendre, on aura

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{x^4 dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}} &= \frac{c^3(2+a^2)}{3} F_{1,a-2} - \frac{c^3(1+a^2)}{3} E_{1,a}, \\ \int_b^c \frac{y^4 dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} &= \frac{2c^3(1+a^2)}{3} E_{1,a} - \frac{a^2 c^3}{3} F_{1,a}; \end{aligned}$$

et comme on a trouvé précédemment

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}} &= \frac{1}{c} F_1 a, \\ \int_0^b \frac{x^2 dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}} &= c(F_1 a - E_1 a), \\ \int_b^c \frac{dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} &= \frac{1}{c} F_1 a, \\ \int_b^c \frac{y^2 dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} &= c E_1 a,\end{aligned}$$

les équations (4) deviendront

$$\begin{aligned}\frac{c^2}{3} (1+a^2) (F_1 a E_1 a + F_1 a E_1 a - F_1 a F_1 a) &= \frac{1}{3} \pi (b^2 + c^2), \\ \frac{c^4 a^2}{3} (F_1 a E_1 a + F_1 a E_1 a - F_1 a F_1 a) &= \frac{1}{3} \pi b^2 c^2;\end{aligned}$$

ce qui coïncide, à cause de  $b = ac$ , avec l'équation (3) citée plus haut.