# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE



C. STURM

J. LIOUVILLE


**Démonstration d'un Théorème de M. Cauchy, relatif aux racines imaginaires des Équations**


*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 1 (1836), p. 278-289.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1__278_0>

# DÉMONSTRATION

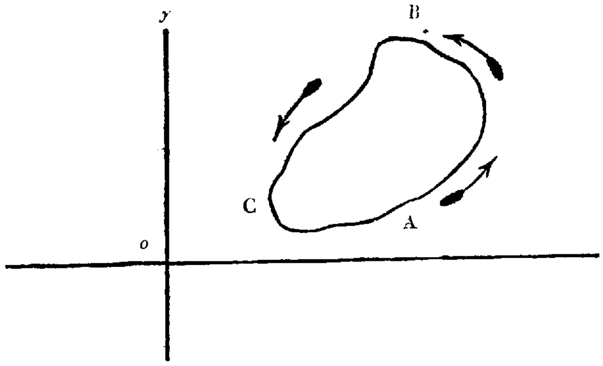
*D'un Théorème de* M. Cauchy, *relatif aux racines imaginaires des Équations;*

Par C. STURM et J. LIOUVILLE.

1. Soit $f(z) = z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots + A_{m-1} z + A_m$ une fonction entière de $z$ dans laquelle les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, A_m$ sont des constantes quelconques réelles ou imaginaires. Si l'on remplace l'indéterminée $z$ par $x + y\sqrt{-1}$, $f(z)$ prendra aussi la forme $P + Q\sqrt{-1}$, $P$ et $Q$ étant des fonctions réelles de $x, y$, et si l'on peut trouver des valeurs réelles de $x$ et $y$ qui annullent à la fois $P$ et $Q$, en substituant ces valeurs dans la formule $x + y\sqrt{-1}$, on aura une racine de l'équation $f(z) = 0$. On dit que la racine $z = x + y\sqrt{-1}$ est *simple* quand on a $f(z) = 0$, sans avoir en même temps $f'(z) = 0$: on dit que cette racine est double quand on a à la fois $f(z) = 0$, $f'(z) = 0$, sans avoir en même temps $f''(z) = 0$; et en général elle est multiple de l'ordre $n$ quand on a à la fois $f(z) = 0$, $f'(z) = 0, \ldots$, $f^{(n-1)}(z) = 0$, sans avoir en en même temps $f^{(n)}(z) = 0$. Nous regarderons toujours une racine double comme équivalente à deux racines égales entre elles; et ainsi de suite. Cette convention que les géomètres font ordinairement simplifiera beaucoup les énoncés de nos théorèmes.

On peut regarder les deux quantités $x$ et $y$ qui entrent dans une expression quelconque de la forme $x + y\sqrt{-1}$, comme étant l'abscisse et l'ordonnée d'un certain point M rapporté à des axes rectangulaires $Ox$, $Oy$ et situé dans le plan de ces axes: $x + y\sqrt{-1}$ devient réelle et le point M est placé sur l'axe des $x$, quand on a $y = 0$. A chaque valeur de $x+y\sqrt{-1}$ répondra ainsi un point M ayant $x$ pour abscisse, $y$ pour ordonnée, et réciproquement à chaque point M dont les coordonnées sont $x$ et $y$ répondra une expression de la forme $x+y\sqrt{-1}$. Parmi les points que l'on obtient en construisant ainsi la formule $x+y\sqrt{-1}$, on doit distinguer ceux pour lesquels on a à la fois $P=0$, $Q=0$ : ces points représentent en quelque sorte géométriquement les racines de l'équation $f(z)=0$.

2. Cela posé; si l'on trace dans le plan des $xy$ un contour ferme quelconque ABC,




on peut se demander si, dans l'intérieur de ce contour, il y a des points pour lesquels P et Q soient nuls en même temps, et combien il y en a; ou plus brièvement, on peut se demander combien, dans l'intérieur du contour ABC, il y a de racines de l'équation $f(z)=0$. Or, pour résoudre cette question, M. Cauchy a donné dans un de ses mémoires la règle que voici.

Considérons le rapport $\frac{P}{Q}$ qui est une fonction réelle et rationnelle des coordonnées $x$, $y$: ce rapport pour chaque point du contour ABC a une valeur déterminée, si toutefois on suppose qu'il n'y ait sur le contour même aucun point pour lequel P et Q soient nuls en même temps. Si l'on marche le long du contour ABC toujours dans le même sens ABC, en partant du point quelconque A jusqu'à ce qu'on revienne à ce point, la quantité $\frac{P}{Q}$ prendra successivement diverses valeurs, et pourra changer de signe, en passant par zéro si P s'annulle et par l'infini si Q s'annulle. Soit

$i$ le nombre de fois où $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant et changeant de signe passe du positif au négatif, $k$ le nombre de fois où $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant et changeant de signe passe du négatif au positif, et $\Delta$ l'excès de $i$ sur $k$ : cet excès $\Delta$ ou $i-k$ sera toujours double du nombre $\mu$ des racines égales ou inégales contenues dans le contour ABC.

Le théorème de M. Cauchy consiste, comme on voit, dans l'équation $\mu = \frac{1}{2}\Delta$, $\mu$ et $\Delta$ ayant la signification que nous venons de leur attribuer.

Il est bien essentiel d'observer que, dans cet énoncé, on ne tient nullement compte des changements de signe que $\frac{P}{Q}$ peut éprouver en passant par l'infini : on ne fait non plus aucune attention aux cas où $\frac{P}{Q}$ s'annulle sans changer de signe.

La démonstration que M. Cauchy a donnée de son théorème est fondée sur l'emploi des intégrales définies et du calcul des résidus. Celle que nous allons exposer ici repose uniquement sur les premiers principes de l'Algèbre. Nous ne supposerons pas même connue cette proposition fondamentale de l'analyse des équations, *que toute équation algébrique* $f(z)=0$ *a au moins une racine de la forme*...... $a+b\sqrt{-1}$, nous proposant au contraire de déduire ce dernier principe du théorème de M. Cauchy dont il est, comme on le verra et comme l'auteur lui-même l'a observé, un simple corollaire.

3. Ce théorème est évident pour un contour quelconque ABC, lorsque dans l'intérieur de ce contour et sur le contour même on n'a jamais $P=0$ : alors en effet les deux nombres $\mu$ et $\Delta$ sont tous les deux nuls et par suite l'équation $\mu=\frac{1}{2}\Delta$ est satisfaite.

Elle est satisfaite encore lorsque dans l'intérieur du contour ABC et sur ce contour même on n'a jamais $Q=0$ : le nombre $\mu$ est alors encore égal à zéro et je vais prouver que l'on a aussi $\Delta=0$. En effet la fraction $\frac{P}{Q}$, quand on aura fait un tour entier pour revenir au point de départ A, devra se retrouver en ce point affectée du même signe que d'abord elle possédait, quand le mouvement a commencé : donc cette fraction doit changer de signe un nombre pair de fois, toujours en s'évanouissant, puisque son numérateur seul peut devenir nul, et en passant alternativement du positif au négatif et du négatif au positif : donc enfin l'excès $\Delta$ du nombre de fois où elle va du $+$ au $-$ sur le nombre de fois où elle va du $-$ au $+$ en s'évanouissant, est égal à zéro, ce qu'il fallait prouver.

4. Considérons maintenant un point M pour lequel on ait à la fois $P=0$, $Q=0$ et qui réponde par conséquent à une racine simple ou multiple de l'équation $f(z)=0$. Traçons autour du point M un contour convexe $A_1A_2A_3A_4$. Si pour un point quelconque N de la courbe ainsi tracée, le rayon vecteur MN ou $r$ est suffisamment petit, le théorème de M. Cauchy aura lieu pour ce contour $A_1A_2A_3A_4$. C'est ce que nous allons prouver.

Soient $a$ et $b$ les coordonnées du point M. En nommant $\varphi$ l'angle que le rayon vecteur MN ou $r$ fait avec l'axe des $x$, les coordonnées du point N seront $x=a+r\cos\varphi$, $y=b+r\sin\varphi$; et par suite, en développant $f(x+y\sqrt{-1})$ et observant que $f(a+b\sqrt{-1})=0$, on aura

$$(1)\quad f(x+y\sqrt{-1})=\frac{f'(a+b\sqrt{-1})}{1}.r(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$$
$$+\frac{f''(a+b\sqrt{-1})}{1.2}.r^2(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^2+\ldots$$
$$+\frac{f^{(m)}(a+b\sqrt{-1})}{1.2\ldots m}.r^m(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^m.$$

Le terme général de ce développement est

$$\frac{f^{(n)}(a+b\sqrt{-1})}{1.2\ldots n}\, r^n(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^n;$$

représentons par $H_n$ le module de $\frac{f^{(n)}(a+b\sqrt{-1})}{1.2\ldots n}$, et par $\alpha_n$ un angle convenable, en sorte que l'on ait

$$\frac{f^{(n)}(a+b\sqrt{-1})}{1.2\ldots n}=H_n(\cos\alpha_n+\sqrt{-1}\sin\alpha_n),$$

puis rappelons-nous la formule de Moivre $(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+\sqrt{-1}\sin n\varphi$; ce terme général deviendra

$$H_n r^n [\cos(n\varphi + \alpha_n) + \sqrt{-1}\sin(n\varphi + \alpha_n)].$$

On a donc

$$\begin{aligned} f(x+y\sqrt{-1}) = {} & H_1 r[\cos(\varphi+\alpha_1) + \sqrt{-1}\sin(\varphi+\alpha_1)] \\ & + H_2 r^2[\cos(2\varphi+\alpha_2) + \sqrt{-1}\sin(2\varphi+\alpha_2)] + \ldots\ldots \\ & \ldots\ldots + H_m r^m [\cos(m\varphi+\alpha_m) + \sqrt{-1}\sin(m\varphi+\alpha_m)]; \end{aligned}$$

d'où résulte

$$\begin{aligned} P &= H_1 r\cos(\varphi+\alpha_1) + H_2 r^2\cos(2\varphi+\alpha_2) + \ldots + H_m r^m\cos(m\varphi+\alpha_m), \\ Q &= H_1 r\sin(\varphi+\alpha_1) + H_2 r^2\sin(2\varphi+\alpha_2) + \ldots + H_m r^m\sin(m\varphi+\alpha_m). \end{aligned}$$

Si la racine $a + b\sqrt{-1}$ est une racine simple, le coefficient $H_1$ sera essentiellement différent de zéro; ce cas est celui qu'il convient d'examiner en premier lieu.

5. Pour mieux fixer alors le degré de petitesse du rayon vecteur $r$, désignons par K la somme des modules $H_2$, $H_3, \ldots H_m$, et posons à la fois $r < 1$, $r < \frac{H_1\sqrt{2}}{2K}$, c'est-à-dire rendons $r$ plus petit que le plus petit des deux nombres 1 et $\frac{H_1\sqrt{2}}{2K}$. En adoptant pour $r$ une valeur assujettie à la condition qui vient d'être énoncée, P aura le même signe que son premier terme $H_1 r\cos(\varphi+\alpha_1)$ toutes les fois que la valeur absolue de $\cos(\varphi+\alpha_1)$ sera supérieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui arrivera si l'angle $\varphi+\alpha_1$ est compris entre les limites $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, ou entre les limites $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$; de même le signe de Q sera celui de son premier terme $H_1 r\sin(\varphi+\alpha_1)$ toutes les fois que la valeur absolue de $\sin(\varphi+\alpha_1)$ sera supérieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui arrivera si l'angle $\varphi+\alpha_1$ est compris entre les limites $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, ou entre les limites $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$.

Ce que nous venons de dire sur la manière dont les signes de P et Q dépendent des signes de leurs premiers termes, est vrai non seulement le long du contour $A_1A_2A_3A_4$, mais encore dans son intérieur où l'on a *à fortiori* $r<1$, $r<\frac{H_1\sqrt{2}}{2K}$; or, quand la valeur absolue de $\sin(\varphi+\alpha_1)$ est plus petite que $\frac{\sqrt{2}}{2}$, celle de $\cos(\varphi+\alpha_1)$ est plus grande que $\frac{\sqrt{2}}{2}$, et *vice versâ;* donc, quel que soit $\varphi$ et sauf le cas où $r=0$, une au moins des deux quantités P, Q est différente de zéro, et possède le même signe que son premier terme. Sur le contour $A_1A_2A_3A_4$, et dans son intérieur, il n'y a donc que le point M pour lequel on ait à la fois $P=0$, $Q=0$, et qui réponde à une racine de l'équation $f(z)=0$.

Cela posé, pour parcourir le contour $A_1A_2A_3A_4$, nous désignerons par $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, les quatre points pour lesquels on a... $\varphi+\alpha_1=\frac{\pi}{4}$, $\varphi+\alpha_1=\frac{3\pi}{4}$, $\varphi+\alpha_1=\frac{5\pi}{4}$, $\varphi+\alpha_1=\frac{7\pi}{4}$; et prenant le point $A_1$ pour point de départ, nous irons successivement de $A_1$ en $A_2$, de $A_2$ en $A_3$, de $A_3$ en $A_4$, et de $A_4$ en $A_1$. D'après ce que l'on vient de dire, le polynome Q ne changera jamais de signe dans l'intervalle $A_1A_2$ ni dans l'intervalle $A_3A_4$, et la même chose aura lieu pour le polynome P dans les deux intervalles $A_2A_3$, $A_4A_1$.

Au point $A_1$ les deux polynomes P et Q ont les mêmes signes que leurs premiers termes, tous deux égaux à $H_1r.\frac{\sqrt{2}}{2}$, c'est-à-dire le signe +; la fraction $\frac{P}{Q}$ est donc positive. Au point $A_2$ ces deux polynomes ont encore les mêmes signes que leurs premiers termes qui sont $-H_1r.\frac{\sqrt{2}}{2}$, $H_1r.\frac{\sqrt{2}}{2}$; et la fraction $\frac{P}{Q}$ est négative. Quand on va du point $A_1$ au point $A_2$, la fraction $\frac{P}{Q}$ change donc de signe une ou plusieurs fois; et comme dans cet intervalle on n'a jamais $Q=0$, il en résulte qu'elle s'évanouit toujours au moment où elle change de signe. En vertu de ces changements de signe, la fraction $\frac{P}{Q}$ d'abord positive devient négative, puis redevient positive, et ainsi de suite. Mais comme finalement le signe + se trouve remplacé par le signe —, il faut que le nombre de fois où la fraction $\frac{P}{Q}$ passe du positif au négatif l'emporte d'une unité sur le nombre de fois où elle passe du négatif au positif.

Du point $A_2$ au point $A_3$ la fraction $\frac{P}{Q}$ change encore de signe ; mais sans s'évanouir, puisque dans cet intervalle on a constamment $P < 0$.

Du point $A_3$ où la fraction $\frac{P}{Q}$ est positive jusqu'au point $A_4$ où elle est négative, les changements de signe n'ont lieu que lorsque P s'évanouit. On arrive donc pour l'intervalle $A_3A_4$ au résultat fourni par l'intervalle $A_1A_2$, savoir que $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant passe du positif au négatif une fois de plus que du négatif au positif.

Enfin, dans l'intervalle $A_4A_1$, P est toujours $> 0$, et la fraction $\frac{P}{Q}$ ne peut jamais s'évanouir.

En résumé, nous trouvons donc pour le contour entier $A_1A_2A_3A_4$ l'excès $\Delta$ égal à 2 ; d'un autre côté ce contour ne renferme dans son intérieur qu'une seule racine. Le théorème de M. Cauchy est donc vrai pour le contour en question.

6. Supposons en second lieu que la racine $a + b\sqrt{-1}$ soit multiple de l'ordre $n$ : on devra regarder alors le contour $A_1 A_2 A_3 A_4$, dont les dimensions sont très petites, comme renfermant $n$ racines égales entre elles, et l'on aura par suite $\mu = n$ : pour que le théorème de M. Cauchy soit exact, il faut donc que l'excès $\Delta$ soit alors égal à $2n$. Or, quand la racine $a + b\sqrt{-1}$ est multiple de l'ordre $n$, on a $H_1 = 0$, $H_2 = 0$, .... $H_{n-1} = 0$ ; les valeurs de P et de Q sont par conséquent

$$\begin{aligned}
P &= H_n r^n \cos(n\varphi + \alpha_n) + H_{n+1} r^{n+1} \cos[(n+1)\varphi + \alpha_{n+1}] \\
&\qquad + \ldots + H_m r^m \cos(m\varphi + \alpha_m) \\
Q &= H_n r^n \sin(n\varphi + \alpha_n) + H_{n+1} r^{n+1} \sin[(n+1)\varphi + \alpha_{n+1}] + \ldots \\
&\qquad + H_m r^m \sin(m\varphi + \alpha_m).
\end{aligned}$$

Pour fixer le degré de petitesse du rayon $r$, nous désignerons par K la somme $H_{n+1} + H_{n+2} + \ldots + H_m$ et nous prendrons $r$ plus petit que le plus petit des deux nombres 1 et $\frac{H_n\sqrt{2}}{2K}$. En adoptant pour $r$ une valeur assujettie à cette condition, le signe de P sera le même que celui de son premier terme $H_n\, r^n \cos(n\varphi + \alpha_n)$ toutes les fois que la valeur absolue de $\cos(n\varphi + \alpha_n)$ se trouvera supérieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, comme cela arrive quand l'arc $n\varphi + \alpha_n$ est compris entre les limites $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, ou entre les limites $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$, .... et ainsi de suite jusqu'à $\frac{(8n-1)\pi}{4}$, $\frac{(8n+1)\pi}{4}$ : de même le signe de Q sera celui de son premier terme $H_n r^n \sin(n\varphi + \alpha_n)$ toutes les fois que la valeur absolue de $\sin(n\varphi+\alpha_n)$ se trouvera supérieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui arrivera si l'arc $n\varphi+\alpha_n$ est compris entre les limites $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, ou entre les limites $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, ou enfin entre les limites $\frac{(8n-3)\pi}{4}$, $\frac{(8n-1)\pi}{4}$.

On conclut aisément de là que, sur le contour $A_1A_2A_3A_4$ et dans son intérieur il n'existe aucun point (le point M excepté), pour lequel on ait à la fois $P=0$, $Q=0$ : c'est pourquoi l'on a $\mu = n$, comme nous l'avons dit tout à l'heure.

Cela posé, pour parcourir le contour $A_1A_2A_3A_4$, nous désignerons par $A_1$, $A_2$, $A_3$, ... $A_{4n}$ les points pour lesquels on a

$$n\varphi + \alpha_n = \frac{\pi}{4},\ n\varphi + \alpha_n = \frac{3\pi}{4},\ n\varphi + \alpha_n = \frac{5\pi}{4}, \ldots n\varphi + \alpha_n \frac{(8n-3)\pi}{4};$$

et, prenant le point $A_1$ pour point de départ nous irons successivement de $A_1$ en $A_2$, de $A_2$ en $A_3$, .... de $A_{4n}$ en $A_1$ D'après ce que l'on vient de dire, le polynome Q ne changera jamais de signe, ni dans l'intervalle $A_1A_2$, ni dans l'intervalle $A_3A_4$, ... ni dans l'intervalle $A_{4n-1}A_{4n}$ ; et la même chose aura lieu pour le polynome P dans les intervalles $A_2A_3$, $A_4A_5$, ....$A_{4n}A_1$. Il est inutile de considérer ces derniers intervalles dans lesquels $\frac{P}{Q}$ ne peut pas s'évanouir : dans tous les autres au contraire, cette fraction s'évanouit et passe du positif au négatif. Ainsi, par exemple, au point $A_1$, P et Q ont les mêmes signes que leurs premiers termes, tous deux égaux à $H_n r^n . \frac{\sqrt{2}}{2}$ : la fraction $\frac{P}{Q}$ est donc positive : on peut s'assurer au contraire qu'en $A_2$ elle est négative : donc dans l'intervalle $A_1A_2$, elle change de signe une fois ou un nombre impair de fois en s'évanouissant et allant de $+$ à $-$, puis de $-$ à $+$,... puis finalement de $+$ à $-$; le nombre des passages de $+$ à $-$ surpasse d'une unité le nombre des passages de $-$ à $+$. Ce que nous disons pour l'intervalle $A_1A_2$ a lieu pour les $2n-1$ autres intervalles $A_3A_4$, $A_5A_6$, ... $A_{4n-1}A_{4n}$. L'excès $\Delta$ est donc égal à $2n$, de sorte que le théorème de M. Cauchy est rigoureusement démontré pour le contour que nous considérons (*).

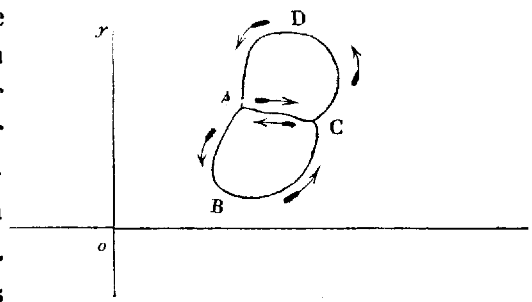
---

(*) On simplifiera beaucoup cette démonstration en admettant, comme on a au fond droit de le faire, que l'équation $f(z) = 0$ n'a pas de racines égales. Si l'on adopte cette hypothèse, on pourra aussi se dispenser de recourir à la formule de Moivre, en présentant le raisonnement de la manière suivante. Après avoir développé $f(x + y\sqrt{-1})$ et obtenu la formule (1) du n° 4, on séparera dans cette formule le premier terme $f'(a + b\sqrt{-1})r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ de tous les autres dont on représentera l'ensemble par $P_1 + Q_1\sqrt{-1}$, et après avoir mis $f'(a + b\sqrt{-1})r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ sous la forme .................. $H_1r[\cos(\varphi + \alpha_1) + \sqrt{-1}\sin(\varphi + \alpha_1)]$, on aura

$$f(x + y\sqrt{-1}) = H_1r[\cos(\varphi + \alpha_1) + \sqrt{-1}\sin(\varphi + \alpha_1)] + P_1 + Q_1\sqrt{-1},$$

qui donne $P = H_1r\cos(\varphi + \alpha_1) + P_1$, $Q = H_1r\sin(\varphi + \alpha_1) + Q_1$. Pour fixer le degré de petitesse du rayon $r$ que nous prendrons d'abord $< 1$, représentons par $H_nr^n$ le module du terme général $\dfrac{f^{(n)}(a+b)\sqrt{-1}}{1.2....n}r^n(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^n$ : le module de la somme $P_1 + Q_1\sqrt{-1}$ sera moindre que la somme des modules $H_2r^2 + H_3r^3 + \ldots + H_mr^m$ et *à fortiori* moindre que $r^2(H_2 + H_3 + \ldots + H_m)$. en posant $H_1 + H_2 + \ldots + H_m = K$, on aura donc $\sqrt{P_1^2 + Q_1^2} < Kr^2$, ce qui exige que la valeur absolue de chacune des quantités $P_1$, $Q_1$ soit aussi $< Kr^2$. Cela posé, si l'on prend $r < \dfrac{H_1\sqrt{2}}{2K}$, il est clair que le signe de P sera semblable au signe de son premier terme, et constamment négatif depuis le point $A_2$, où.. $\cos(\varphi + \alpha_1) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ jusqu'au point $A_3$ où l'on a encore $\cos(\varphi + \alpha_1) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Au contraire, le signe de P est constamment $+$ depuis le point $A_4$ où l'on a $\cos(\varphi + \alpha_1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ jusqu'au point $A_1$, où l'on a aussi $\cos(\varphi + \alpha_1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. De même la fonction Q est toujours positive dans l'intervalle $A_1A_2$, et toujours négative dans l'intervalle $A_3A_4$. On achèvera ensuite la démonstration comme au n° 5, où les points $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ ont la même signification qu'ici.

7. Quand le théorème de M. Cauchy a lieu pour deux contours ABCA, ACDA qui ont une partie commune AC, il a lieu également pour le contour total ABCDA formé par leur réunion. En effet, l'excès $\Delta$ du nombre de fois où $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant passe du $+$ au $-$ sur le nombre de fois




où cette fraction en s'évanouissant passe du $-$ au $+$ est le même, soit qu'on parcoure le contour total ABCDA, soit qu'on parcoure successivement les deux contours ABCA, ACDA, puisqu'à chaque passage du $+$ au $-$ ou du $-$ au $+$ qui a lieu quand on va sur le côté AC de C en A répond un passage inverse du $-$ au $+$ ou du $+$ au $-$ quand on va sur le même côté de A en C. Or en supposant que le nombre des racines soit égal à $\mu'$ dans le contour ABCA et à $\mu''$ dans le contour ACDA, on a $\Delta = 2\mu'$ pour le premier de ces contours et $\Delta = 2\mu''$ pour le second, puisque le théorème de M. Cauchy est supposé applicable à l'un et à l'autre : d'après ce que l'on vient de voir, il résulte de là que, pour le contour total ABCDA, on a $\Delta = 2(\mu' + \mu'')$, équation qui ne diffère pas de l'équation $\Delta = 2\mu$ du n° 2 appliquée au contour ABCDA dans lequel il y a $\mu' + \mu''$ racines. Le théorème de M. Cauchy est donc vrai pour le contour ABCDA, ce qu'il fallait démontrer.

Si l'on considère un nombre quelconque de contours juxtaposés, pour chacun desquels ce théorème ait lieu, il aura lieu également pour le contour total formé par la réunion de ceux-là : c'est ce qu'on verra en réunissant ces contours successivement deux à deux, comme on peut le faire d'après ce qui vient d'être démontré.

8. Étant donné un contour quelconque ABC, on peut toujours le concevoir divisé 1°. en contours convexes tracés autour de chaque racine contenue dans l'intérieur de ABC et assujettis aux conditions énoncées n° 6 : 2°. en contours semblables à ceux dont on a parlé n° 3, c'est-à-dire pour lesquels on n'ait jamais à la fois $P = 0$, $Q = 0$. Le théorème de M. Cauchy ayant lieu pour les diverses parties dans les-

quelles on divise ainsi le contour ABC aura lieu pour ce contour même ABC, dont la forme est arbitraire.

Ce théorème est donc entièrement démontré.

Toutefois nous excluons formellement le cas particulier où, pour quelque point de la courbe ABC, on aurait à la fois $P=0$, $Q=0$ : ce cas particulier ne jouit d'aucune propriété régulière et ne peut donner lieu à aucun théorème; car dès qu'on l'admet, l'excès $\Delta$ peut varier avec la forme du contour sans que le nombre $\mu$ varie : de sorte qu'il n'existe alors entre $\mu$ et $\Delta$ aucune relation constante.

9. De l'origine O des coordonnées comme centre et d'un rayon $r$ très grand, traçons un cercle, et cherchons combien l'équation $f(z)=0$ a de racines comprises dans l'intérieur de ce cercle. Soit $\varphi$ l'angle qu'un rayon quelconque ON fait avec l'axe des $x$ : les coordonnées du point N seront $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, et l'on aura

$$\begin{aligned} f(x+y\sqrt{-1}) = {} & r^m(\cos m\varphi+\sqrt{-1}\sin m\varphi) \\ & + A_1 r^{m-1}\left[\cos(m-1)\varphi+\sqrt{-1}\sin(m-1)\varphi\right] \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + A_{m-1}\, r(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)+A_m. \end{aligned}$$

Soit $H_1$ le module de $A_1$, ... $H_{m-1}$ celui de $A_{m-1}$, $H_m$ celui de $A_m$ et supposons que l'on ait

$$A_1 = H_1(\cos\alpha_1+\sqrt{-1}\sin\alpha_1),\quad A_2=H_2(\cos\alpha_2+\sqrt{-1}\sin\alpha_2),\ \text{etc.}$$

On aura

$$\begin{aligned} f(x+y\sqrt{-1}) = {} & r^m[\cos m\varphi+\sqrt{-1}\sin m\varphi] \\ & + H_1 r^{m-1}\cos[(m-1)\varphi+\alpha_1]+\sqrt{-1}\sin[(m-1)\varphi+\alpha_1)] \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + H_m(\cos\alpha_m+\sqrt{-1}\sin\alpha_m)\,; \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} P &= r^m\cos m\varphi+H_1 r^{m-1}\cos[(m-1)\varphi+\alpha_1]+\ldots+H_m\cos\alpha_m, \\ Q &= r\ \sin m\varphi+H_1 r^{m-1}\sin[(m-1)\varphi+\alpha_1]+\ldots+H_m\sin\alpha_m. \end{aligned}$$

Prenons le rayon $r$ à la fois $>1$ et $>K\sqrt{2}$, K désignant la somme des modules $H_1, \ldots H_{m-1}$, $H_m$. Alors le signe de P sera semblable à celui de son premier terme toutes les fois que la valeur absolue de $\cos m\varphi$ sera supérieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ : de même le signe du polynome Q sera celui de son premier terme $r^m \sin m\varphi$ toutes les fois que la valeur absolue de $\sin m\varphi$ sera supérieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Nommons $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_{4m}$ les points de la circonférence du cercle pour lesquels on a successivement

$$m\varphi = \frac{\pi}{4}, \; m\varphi = \frac{3\pi}{4}, \; m\varphi = \frac{5\pi}{4}, \ldots m\varphi = \frac{(8m-1)\pi}{4}.$$

Il est aisé de voir par une discussion toute semblable à celle du n° 6 que dans les intervalles $A_2A_3$, $A_4A_5, \ldots A_{4m}A_1$ la fraction $\frac{P}{Q}$ ne s'évanouira jamais, et que dans chacun des intervalles $A_1A_2$, $A_3A_4, \ldots A_{4m-1}$, où elle s'évanouira au contraire et ne deviendra jamais infinie, l'excès du nombre de fois où elle passera du $+$ au $-$ sur le nombre de fois où elle passera du $-$ au $+$ sera égal à l'unité. L'excès total $\Delta$ pour le contour entier ABC sera ainsi égal à $2m$ : la moitié $m$ de cet excès donne le nombre des racines de l'équation $f(z) = 0$ contenues dans le cercle $A_1A_2, \ldots A_{4m}$ dont le rayon est exprimé par un nombre quelconque plus grand que 1 et que $K\sqrt{2}$. On voit par là que *toute équation algébrique $f(z) = 0$ de degré $m$ a $m$ racines de la forme $x + y\sqrt{-1}$ et n'en a que $m$.* Le plus grand des deux nombres 1 et $K\sqrt{2}$ est une limite supérieure du module de toutes les racines : il serait facile de trouver une limite plus simple (*).

(*) Il nous resterait à expliquer les moyens de trouver l'excès $\Delta$ pour un contour donné. Mais afin d'éviter un double emploi, nous renverrons cette recherche à la fin de l'article suivant.