

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

BOUCHAIB NADIR

ALAIN PIRIOU

Ondes semi-linéaires conormales classiques par rapport à deux hypersurfaces transverses

Journées Équations aux dérivées partielles (1989), p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1989____A7_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ONDES SEMI-LINEAIRES CONORMALES CLASSIQUES PAR RAPPORT A DEUX HYPERSURFACES TRANSVERSES

B. NADIR et A. PIRIOU

Université de Nice

Soit un système semi-linéaire du premier ordre dans un ouvert X de \mathbb{R}^n

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n A_j(x) \partial_j u + f(x, u) = 0$$

où $A_j \in C^\infty(X, \text{End}(\mathbb{C}^N))$, $f \in C^\infty(X \times \mathbb{C}^N, \mathbb{C}^N)$.

En fait, on supposera que la dimension N du système vaut 2, sauf dans le paragraphe I, où N peut être quelconque. Avant de considérer le croisement de deux ondes conormales, dont l'une au moins est classique, rappelons brièvement les résultats connus dans le cas d'une seule onde.

I - RAPPEL : cas d'une onde conormale simple ([6], [12], [16])

Soit Σ une hypersurface fermée de X , simplement caractéristique pour (1). Pour $s \in \mathbb{R}$, l'espace $H_\Sigma^s(X)$ est constitué des distributions u dans X (conormales par rapport à Σ) telles que :

(2) u est dans l'espace de besov ${}^\infty H_s^{loc}(X)$, et $Z_1 \dots Z_\ell u \in {}^\infty H_s^{loc}(X)$ pour tout ℓ et pour tous champs Z_j (à coefficients C^∞) tangents à Σ .

Localement, pour $\Sigma = \{x = (x_1, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} / x_1 = 0\}$, $H_\Sigma^s(X)$ est constitué des distributions de la forme

$$u(x) = \int e^{i x_1 \xi_1} a(x, \xi_1) d \xi_1$$

où $a(x, \xi_1)$ est un symbole dans $S^\mu(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, $\mu = -s - 1/2$ (voir [5]).

On posera $H_\Sigma^s(X) = I^\mu(X)$. Si X^+ est une demi-région délimitée par Σ (définie localement par $x_1 > 0$), $I^\mu(X^+)$ désigne l'espace des distributions dans X^+ qui admettent un prolongement dans $I^\mu(X)$. Si $u \in I^\mu(X^+)$, alors u est de classe C^k lorsque $\mu + k < -1$, et on dira que $u \in \mathring{I}_\Sigma^\mu(X^+)$ si $\partial^\alpha u|_\Sigma = 0$ lorsque $\mu + |\alpha| < -1$.

Soit D une échelle de degrés d'homogénéité, telle que :

$$\begin{cases} \mathbb{N} \subset D \subset \mathbb{C} ; & D + D \subset D ; & \bar{D} = D \\ \text{pour tout } M, \text{ l'ensemble } \{d \in D / \operatorname{Re}(d) < M\} \text{ est fini} \end{cases}$$

(noter qu'on a alors $D \subset \{0\} \cup \{\operatorname{Re}(d) > 0\}$).

Une distribution u dans X^+ est dite conormale classique de type D par rapport à Σ en un point p de Σ si, au voisinage de p dans X^+ , u admet un développement asymptotique

$$(3) \quad u(x) \sim \sum_{d \in D} \sigma_d(x') x_1^d, \quad \sigma_d \in C^\infty(\Sigma)$$

en ce sens que

$$(4) \quad u(x) - \sum_{\operatorname{Re}(d) < M} \sigma_d(x') x_1^d \in I_\Sigma^{-M-1}$$

En traduisant cette propriété par $u \in I_\Sigma^D(p)$, on a le résultat de propagation :

THÉORÈME : Soit $u \in H_\Sigma^s(X^+)$ une solution de (1), avec $s > 1/2$. Alors l'ensemble $\{p \in \Sigma / u \in I_\Sigma^D(p)\}$ est une réunion de bicaractéristiques.

II - ETUDE DU CROISEMENT

On suppose désormais $N = 2$, et on considère deux hypersurfaces fermées Σ_1, Σ_2 de X , caractéristiques pour (1), se coupant transversalement selon une sous-variété Γ de codimension 2, les caractéristiques sur Σ_1, Σ_2 étant transverses à Γ . Soit encore X^+ une demi-région délimitée par Σ_1 , et X^{++}, X^{+-} les quadrants de X^+ délimités par Σ_2 .

On utilisera des coordonnées locales telles que :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{x = (x_1, x_2, x'') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-2} / x_1 = 0\}, & \Sigma_2 &= \{x_2 = 0\} \\ X^+ &= \{x_1 > 0\}, & X^{++} &= \{x_1 > 0, x_2 > 0\}, & X^{+-} &= \{x_1 > 0, x_2 < 0\}. \end{aligned}$$

Rappelons ([3], [4], [7]) que l'espace $H_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}^s(X)$ (de distributions conormales par rapport à $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$) est défini comme au (2), en remplaçant Σ par $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$; $H_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}^s(X^{++})$ est encore défini par prolongement.

On a le :

THÉOREME 1 : Soient $p \in \Gamma$, C la bicaractéristique sur Σ_1 issue de p , $u \in \mathcal{D}'(X^+)$ une solution de (1) telle que $u|_{X^{++}} \in H_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}^s(X^{++})$, $u|_{X^{+-}} \in H_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}^s(X^{+-})$ (u est conormale par morceaux), avec $s > 1$.

Si $u \in I_{\Sigma_1}^D(q)$ en un point $q \in C \setminus \{p\}$, alors $u \in I_{\Sigma_1}^D$ en tout point de $C \setminus \{p\}$.

Pour établir ce résultat, on commence par introduire des espaces de distributions conormales plus souples que celles de $H_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}^s$; leur front d'onde est encore contenu dans la réunion des fibrés conormaux à Σ_1 , Σ_2 et Γ , mais les régularités peuvent y être différentes.

Pour $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, appelons $\mathcal{J}^{\mu, \nu}(X)$ l'espace des distributions qui s'écrivent localement

$$u(x) = \iint e^{i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)} a(x, \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

avec un symbole $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tel que :

$$|\partial_x^\beta \partial_{\xi_1}^{\alpha_1} \partial_{\xi_2}^{\alpha_2} a(x, \xi_1, \xi_2)| \leq C(1 + |\xi_1|)^{\mu - \alpha_1} (1 + |\xi_2|)^{\nu - \alpha_2}.$$

On définit de même l'espace $I^{\mu, \nu}(\xi)$ à l'aide de symboles vérifiant la majoration précédente pour $|\xi_2| \leq |\xi_1|$, et la majoration

$$|\partial_x^\beta \partial_{\xi_1}^{\alpha_1} \partial_{\xi_2}^{\alpha_2} a(x, \xi_1, \xi_2)| \leq C(1 + |\xi_2|)^{\mu - \alpha_2} (1 + |\xi_1|)^{\nu - \alpha_1}$$

pour $|\xi_1| \leq |\xi_2|$.

Posons $s = -\mu - 1/2$, $t = -\nu - 1/2$. Sur les fibrés conormaux à Σ_1 , Σ_2 , Γ , et en dehors des intersections deux à deux, un élément de $\mathcal{J}^{\mu, \nu}$ est (microlocalement) respectivement dans $H_{\Sigma_1}^s$, $H_{\Sigma_2}^t$, H_{Γ}^{s+t} . Pour un élément de $I^{\mu, \nu}$, on obtient respectivement $H_{\Sigma_1}^s$, $H_{\Sigma_2}^s$, H_{Γ}^{s+t} . On a la

PROPOSITION 1 : (i) Pour $\mu = -s - 1/2$ et $\varepsilon > 0$, on a

$$H_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}^s \subset I^{\mu, -1/2} \subset H_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}^{s-\varepsilon}$$

(ii) $\mathcal{J}^{\mu, \nu}$ (resp. $I^{\mu, \nu}$) est une algèbre de fonctions continues, stable par l'action des fonctions C^∞ si $\mu, \nu < -1$ (resp. $\mu < -1$, $\mu + \nu < -2$, $\mu \leq \nu < -1/2$).

Il sera important de contrôler les traces sur Σ_1 ou Σ_2 d'une distribution conormale ; si $\mu < -1$, appelons $J_1^{\mu, \nu}$ le sous-espace des $u \in J^{\mu, \nu}$ telles que $\partial^\alpha u|_{\Sigma_1} = 0$ pour $|\alpha| + \mu < -1$. On définit de même $J_2^{\mu, \nu}$ si $\nu < -1$, et on pose : $J_{1,2}^{\mu, \nu} = J_1^{\mu, \nu} \cap J_2^{\mu, \nu}$ si $\mu, \nu < -1$.

Pour contrôler jusqu'à l'arête Γ le développement asymptotique d'une distribution conormale classique par rapport à Σ_1 en dehors de Γ , nous dirons qu'une distribution $u \in \mathcal{D}'(X^{++})$ est dans $J^{D, \nu}(p)$, où $p \in \Gamma$, si le développement (3) a lieu, au voisinage de p dans X^{++} , avec des coefficients $\sigma_\alpha \in I_\Gamma^\nu(\Sigma_1)$ et un reste (4) dans $J_1^{-M-1, \nu}$.

La preuve du théorème 1 se décompose en 4 étapes :

1°) Régularité à l'arête.

En mettant (1) sous la forme réduite :

$$(5) \quad \begin{cases} X_2 u_1 + T_1(x, \partial'') u_2 + f_1(x, u) = 0 \\ X_1 u_2 + T_2(x, \partial'') u_1 + f_2(x, u) = 0 \end{cases}$$

où X_j est le champ bicaractéristique sur $\{x_j = \text{cste}\}$, T_j d'ordre 1 en $\partial'' = (\partial_3, \dots, \partial_n)$, et en utilisant la proposition 1 (ainsi que l'analogie du (ii) bien connu dans $H_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}^s$ si $s > 1$), on obtient la

PROPOSITION 2 : Soit $u \in H_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}^s(X^{++})$ une solution de (1), avec $s > 1$. Alors $u \in I^{\mu, \mu-1}(X^{++})$ pour $\mu = -s - 1/2$.

On a donc $u \in I^{\mu, \mu}(X^{++}) = J^{\mu, \mu}(X^{++})$.

2°) Propagation jusqu'au bord Σ_2 dans X^{++}

En supposant $u \in I_{\Sigma_1}^D(q)$ si $q \in C \cap \{x_2 > 0\} : u^+ \in J^{D, \mu}(p)$ où $u^+ = u|_{X^{++}}$. En reportant dans (5) le développement (3), où les $\sigma_d \in C^\infty(\Sigma_1 \cap \{x_2 > 0\})$, on obtient des équations de transport qui permettent d'exprimer les σ_d en fonction de σ_o ; puisque $\sigma_o = u^\dagger|_{\Sigma_1} \in I_\Gamma^\mu(\Sigma_1)$, on obtient facilement $\sigma_d \in I_\Gamma^\mu(\Sigma_1)$.

On considère $v \in J^{D,\mu}$ telle que $v \sim \sum \sigma_d x_1^d$, et il s'agit de montrer que $w = u^+ - v$ est dans $J_1^{-\infty,\mu}$. Puisque $w|_{\Sigma_1} = 0$, on peut trouver λ ($-2 \leq \lambda < -1$) tel que $u^+, v \in J^{\lambda,\mu}$, $w \in J_1^{\lambda,\mu}$. D'une façon générale, supposons $w \in J_1^{\sigma,\mu}$ avec $\sigma < -1$ et montrons que $w \in J_1^{\sigma-1,\mu}$. On a

$$(6) \quad X_2 w_1 + T_1(x, \partial'') w_2 + f_1(x, u^+) - f_1(x, v) \in J_1^{-\infty,\mu}$$

$$(7) \quad \partial_1 w_2 + T_3(x, \partial'') w + f_2(x, u^+) - f_2(x, v) \in J_1^{-\infty,\mu}$$

et la propriété :

$$(8) \quad \text{Si } a \in J^{\lambda,\mu}, b \in J_1^{\sigma,\mu} \text{ alors } a b \in J_1^{\sigma,\mu}$$

qui montre, grâce à la formule de Taylor, que $f_2(x, u^+) - f_2(x, v) \in J_1^{\sigma,\mu}$.

L'intégration de (7) donne alors $w_2 \in J_1^{\sigma-1,\mu}$, ce qui permet d'écrire (6) sous la forme :

$$(X_2 + h) w_1 \in J_1^{\sigma-1,\mu}, \text{ avec } h \in J^{\lambda,\mu}$$

on en déduit, en utilisant encore (8), que $w_1 \in J_1^{\sigma-1,\mu}$.

3°) Traces sur Σ_2

On a $u^+|_{\Sigma_2} \in I_{\Gamma}^D(p)$. Mais (5) étant satisfait au sens des distributions dans X^+ , on a $u^-|_{\Sigma_2} = u^+|_{\Sigma_2}$, où $u^- = u|_{X^{+-}}$. Donc $u^-|_{\Sigma_2} \in I_{\Gamma}^D(p)$.

4°) Propagation à partir du bord Σ_2 dans X^{+-}

Comme au 2°), on en déduit que $u^- \in J^{D,\mu}(p)$, d'où $u \in I_{\Sigma_1}^D(q)$ si $q \in C \cap \{x_2 < 0\}$.

III - DEVELOPPEMENTS BI-CLASSIQUES

Pour étudier les distributions simultanément classiques par rapport à Σ_1 et Σ_2 relativement à des échelles de degrés D, D' , on introduit l'espace $J^{D,D'}(X^{++})$ des distributions u dans X^{++} admettant un développement asymptotique du type produit :

$$u \sim \sum_{d \in D, d' \in D'} \sigma_{d,d'}(x'') x_1^d x_2^{d'}, \quad \sigma_{d,d'} \in C^\infty(\Gamma)$$

en ce sens que

$$u - \sum_{\substack{Re(d) < M \\ Re(d') < M'}} \sigma_{d,d'} x_1^d x_2^{d'} \in E_{-M-1, -M'-1}$$

où
$$E_{\tau, \tau'} = J_1^{\tau, D'} + J_2^{D, \tau'} + J_{1,2}^{\tau, \tau'}.$$

On a le :

THÉORÈME 2 (croisement de deux ondes classiques) : Soit $u \in H_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}^s(X^{++})$ une solution de (1), avec $s > 1$. Pour $p \in \Gamma$, appelons C_1, C_2 les demi-bicaractéristiques sur $\Sigma_1 \cap \bar{X}^{++}$, $\Sigma_2 \cap \bar{X}^{+-}$ issues de p . Si $u \in I_{\Sigma_1}^D$ aux points de $C_1 \setminus \{p\}$ et si $u \in I_{\Sigma_2}^D$ aux points de $C_2 \setminus \{p\}$, alors $u \in J^{D, D'}$ au voisinage de p dans X^{++} .

Pour la démonstration, on commence par remarquer que $u|_{\Sigma_2} \in I_{\Gamma}^D(p)$, $u|_{\Sigma_1} \in I_{\Gamma}^{D'}(p)$ d'après la preuve du th. 1 (cf 3°).

En posant $E = \bigcap_{\tau, \tau'} E_{\tau, \tau'}$ et en reprenant la forme réduite (5) de (1), on construit $v \sim \sum \sigma_{d,d'} x_1^d x_2^{d'}$ dans $J^{D, D'}$ solution du problème de Goursat dans X^{++} :

$$\begin{cases} \sum A_j \partial_j v + f(x, v) \in E \\ (u_1 - v_1)|_{\Sigma_2} = 0, \quad (u_2 - v_2)|_{\Sigma_1} = 0 \end{cases}$$

(les $\sigma_{d,d'}$ sont déterminés par des relations de récurrence explicites, et on construit un représentant v convenable). On montre que $u - v \in E$ en utilisant en particulier les deux propriétés suivantes, dont la première est plus forte que (8) :

Si $a \in J_1^{\alpha, \beta}$, $b \in J_1^{\alpha', \beta}$, $\alpha, \alpha', \beta < -1$, α et $\alpha' \notin \mathbb{Z}$, alors $ab \in J_1^{\alpha + \alpha' + 1, \beta}$.

Si $a \in J_{1,2}^{\alpha, \beta}$, $b \in J_{1,2}^{\alpha', \beta'}$, $\alpha, \alpha', \beta, \beta' < -1$, et non dans \mathbb{Z} , alors $ab \in J_{1,2}^{\alpha + \alpha' + 1, \beta + \beta' + 1}$.

Signalons que B. Nadir et J. P. Varenne [11] ont obtenu des résultats analogues pour le problème de Cauchy à donnée initiale classique par morceaux, et pour la réflexion transverse d'une onde classique par morceaux sous la condition de Lopatinski uniforme.

R É F É R E N C E S

- [1] ALINHAC S : *Interaction d'ondes simples pour des équations non linéaires générales* ; Current Topics in PDE, Kinekuniya Co., 1985, Japon.
- [2] BONY J. M : *Interaction de singularités pour des équations aux dérivées partielles non linéaires* ; Sémin. Goulaouic-Meyer-Schwartz, n° 22, 1979-80.
- [3] BONY J. M : n° 2, 1981-82.
- [4] BONY J.M : *Singularités des solutions de problèmes de Cauchy hyperboliques non linéaires*. Advances in microlocal analysis, H. G. Garnier (ed), D. Reidel (1986), 15-39.
- [5] HORMANDER L : *The analysis of linear partial differential operators*. Springer Verlag, 1985, t. III.
- [6] MELROSE R. B. - RITTER N : *Interaction of progressing waves through a non linear potential*. Sémin. Goulaouic-Meyer-Schwartz, n° 12, 1983-84.
- [7] MELROSE R. B. - RITTER N : *Interaction of non linear progressing waves for semilinear waves equations*. Ann. Math. 121 (1985), 187-213.
- [8] METIVIER G : *The Cauchy problem for semilinear hyperbolic systems with discontinuous data*. Duke Math. J., vol. 53, n° 4 (1986), 983-1011.
- [9] METIVIER G : *Propagation, interaction and reflection of discontinuous progressing waves for semilinear hyperbolic systems*.
- [10] NADIR B. - PIRIOU A : *Ondes semi-linéaires conormales par rapport à deux hypersurfaces transverses*.
- [11] NADIR B. - VARENNE J.P : *Problème de Cauchy et réflexion transverse pour une onde conormale classique*. Prépublication (1989), Nice.
- [12] PIRIOU A : *Calcul symbolique non linéaire pour une onde conormale simple*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 38, 4 (1985), 173-187.
- [13] RAUCH J. - REED M : *Non linear microlocal analysis of semilinear hyperbolic systems in one space dimension*. Duke Math. J., vol 49, n° 2 (1982), 397-475.
- [14] RAUCH J. - REED M : *Striated solutions of semilinear two speed waves equations*. Indiana Univ. Math. J., 34 (1985), 337-353.

- [15] RAUCH J. - REED M : *Discontinuous progressing waves for semilinear systems*. Comm. in partial different equations, 10, (9) (1985), 1033-1075.
- [16] RAUCH J. - REED M : *Propagation of equality and classicity for conormal solutions of semilinear systems*. Comm. in partial different equations, vol. 13, n° 10, 1988.