Journées Équations aux dérivées partielles

Serge Alinhac
Mohamed S. Baouendi

Unicité forte pour des opérateurs elliptiques : inégalités et contre-exemples

Journées Équations aux dérivées partielles (1979), p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1979____A2_0>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Conférence n° 2

UNICITE FORTE POUR DES OPERATEURS ELLIPTIQUES : INEGALITES ET CONTRE-EXEMPLES

par S. ALINHAC et M. S. BAOUENDI

Etant donné $P(x,D_x)$ un opérateur différentiel dans $\mathbb{R}^n$, on dit qu'il a la propriété de forte unicité en 0 si $u \in C^\infty$, $Pu = 0$ et $D^\alpha u(0) = 0$ $(\forall \alpha)$ impliquent $u = 0$ près de 0.

Dan un travail récent ("Uniqueness for the characteristic Cauchy problem and strong unique continuation for higher order partial differential inequalities", à paraître dans Amer. Jour. of Maths), les auteurs, généralisant le théorème classique d'Aronszajn-Cordes (cf. bibliographie dans l'article cité), montrent que si $P(0,D_x) = \Delta + \ldots$ ou si $P = P_1 P_2 + \ldots$, avec $P_1(0,D_x) = P_2(0,D_x) = \Delta$, alors P a la forte unicité en 0 (P à coefficients réguliers).

Dans la preuve, on factorise P, écrit en coordonnées polaires (t,θ) $(t = |x|,\ \theta \in S^{n-1})$, sous la forme $\tilde{P}(t,\theta,t\partial_t, D_\theta) = \prod_{i=1}^{m} (t\partial_t - L_i(t,\theta,D_\theta))$ et le résultat découle d'inégalités de Carleman (dans une bande $t \in [0,T]$) pour des opérateurs de la forme $L = t\partial_t + A(t,\theta,D_\theta)$. (A pseudo-différentiel en θ d'ordre 1, dépendant de t).

Ecrivant $A = J + K$, $J = J^*$, $K = -K^*$, on distingue deux cas :

i) Si $J \geq 0$ (i.e. $(Jv,v) \geq -C\|v\|^2$), on a facilement l'inégalité usuelle ($u \in C^\infty$, plate sur $t = 0$)

$$\|t^{-\gamma}u\|^2 \leq C\|t^{-\gamma}Lu\|^2 .$$

ii) Si, pour un $\lambda \geq 0$, $\lambda J + J'_t + 1/t[K,J] \leq 0$, alors $\forall M > 0$, $\forall u \in C^\infty$, plate sur $t = 0$ et $t = T$, on a

$$\frac{\gamma M}{2}\|t^{-\gamma-1/2}|\log t|^{-M\gamma-1}u\|^2 \leq \|t^{-\gamma-1/2}|\log t|^{-M\gamma}Lu\|^2 .$$

Les points décisifs sont :

a) l'importance du terme $\frac{1}{t}[K,J]$ dans la condition ii),

b) la perte de poids en $\frac{1}{|\log t|}$ dans l'inégalité de ii).

Pour comprendre la signification de a) et b), nous construisons deux contre-exemples :

a) Pour un $a(t,\theta)$ continu, $a(0,\theta) = 0$, l'opérateur $L = t\partial_t - |D_\theta| + a\partial_\theta$ $(n = 2)$ n'a pas l'unicité de Cauchy sur $t = 0$(pareillement, pour certains a, b, c continus, nuls en 0, $P = \Delta + a\partial_x^2 + 2b\partial_{xy}^2 + c\partial_y^2$ n'a pas de forte unicité en 0).

b) Pour un a borné, $P = (t\partial_t - |D_\theta|)^2 + a$ n'a pas d'unicité. En particulier, b) montre qu'aucun contrôle de u sans perte de poids n'a lieu quand $J \leq 0$.

*
**
*