Journées Équations aux dérivées partielles

Alain Piriou

Propagation et réflexion de la propriété de transmission des distributions de Fourier

Journées Équations aux dérivées partielles (1977), p. 172-180

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1977____172_0>

PROPAGATION ET REFLEXION DE LA PROPRIETE DE TRANSMISSION DES DISTRIBUTIONS DE FOURIER

par

A. PIRIOU

§1. - INTRODUCTION

Considérons, par exemple, la solution fondamentale A du problème mixte intérieur de Cauchy-Dirichlet pour l'opérateur des ondes

$$P = D_t^2 - \sum_{j=1}^{n} D^2_{y_j^2}$$

dans le cylindre $\mathbb{R}^+ \times \Omega$, où Ω est un ouvert borné régulier strictement convexe de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} PA = 0 \\ A_{|\, t=o} = 0 \\ D_t A_{|\, t=o} = \delta_{y_o} \quad (y_o \in \Omega) \\ A_{|\mathbb{R}^+ \times \partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

On sait que WFA est invariant par le flot bicaractéristique brisé (par réflexions successives sur $\mathbb{R}^+ \times \partial\Omega$) de P (cf. ([11]), ([10]), ([3]), ([12])) et que, pour $t > 0$ petit, A coïncide avec la solution fondamentale directe E de P , dont les lacunes sont bien connues : en particulier, si S est le cône de lumière $\{t = |y - y_o| , t > 0\}$, on sait que, pour $t > 0$ assez petit, A est C^∞ jusqu'au bord de part et d'autre de S lorsque n est impair, et C^∞ jusqu'au bord uniquement du côté extérieur à S (en fait nulle de ce côté) lorsque n est pair. La propagation et la réflexion de telles propriétés de régularité jusqu'au bord ont été étudiées par Hirschowitz et Piriou ([8]). On se propose ici de généraliser les théorèmes correspondants de ([8]) à des cas plus généraux pour des opérateurs à caractéristiques réelles de multiplicité constante vérifiant la condition de Lévi, en utilisant les propriétés de propagation et de réflexion de la régularité établies par Chazarain (([2]), ([4])) pour de tels opérateurs.

L'auteur remercie J. Chazarain et A. Hirschowitz pour l'interêt qu'ils ont porté à ce travail.

§2. - RAPPEL SUR LA PROPRIETE DE TRANSMISSION (cf. ([7]), ([8]))

Soient X une variété C^∞, T_o^*X son fibré cotangent privé de la section nulle, Λ une sous-variété lagrangienne conique de T_o^*X ; on suppose Λ symétrique, c'est-à-dire invariante par la symétrie antipodale ℓ définie par $\ell(x,\xi) = (x,-\xi)$.

On appelle $S\Lambda$ la projection de Λ sur le fibré S^*X en sphères cotangentes et $\mathbb{P}\Lambda$ sa projection sur le fibré $\mathbb{P}^*X$ en espaces projectifs cotangents ; les projections naturelles sont systématiquement notées π . Pour $m \in \mathbb{R}$, $I^m(X,\Lambda)$ désigne l'espace des distributions de Fourier dans X de degré m associées à Λ , classiques en ce sens qu'elles sont définies par des symboles admettant des développements asymptotiques en somme de composantes homogènes de degrés décalés d'entiers.

On note $\mathcal{J}_\Lambda^m$ le faisceau sur $S\Lambda$ des microfonctions correspondantes.

Appelons indice sur Λ une fonction $\omega : S\Lambda \to \mathbb{R}/4\mathbb{Z}$ antisymétrique telle que :

si $\varphi(x,\theta)$ est une phase non dégénérée définissant localement Λ , alors $\omega(\lambda) + \operatorname{sgn} \varphi''_{\theta\theta}(x,\theta)$ est localement constante (pour $\varphi'_\theta(x,\theta) = 0$, $\lambda = (x, \varphi'_x(x,\theta))$.

Pour $d \in \mathbb{R}$, posons

$$\mathcal{J}_{\Lambda,d} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{J}_\Lambda^{d+k} \quad \text{et} \quad \rho = (d,\omega) .$$

On définit (cf. ([8]), et aussi ([7]) avec un décalage dans la notation d) le morphisme involutif ℓ_ρ du faisceau (sur $\mathbb{P}\Lambda$) $\pi_*\mathcal{J}_{\Lambda,d}$. Il peut être caractérisé par la propriété suivante :

si une section $\mathcal{A}$ de $\pi_*\mathcal{J}_{\Lambda,d}$ est représentée par une intégrale oscillante $\int e^{i\varphi(x,\theta)}a(x,\theta)d\theta$, où φ est une phase antisymétrique dans un cône symétrique de $X \times (\mathbb{R}^N|0)$, et où $a(x,\theta) \sim \sum_j a_j(x,\theta)$ avec $a_j(x,\theta)$ homogène de degré δ-j en θ ($\delta = d + n/4 - N/2$) , alors $\ell_\rho\mathcal{A}$ est représentée par $\int e^{i\varphi(x,\theta)}b(x,\theta)d\theta$, où $b(x,\theta) \sim \sum_j b_j(x,\theta)$ et $b_j(x,-\theta) = (-1)^j e^{i\pi(\omega(\lambda)+\operatorname{sgn} \varphi''_{\theta\theta}(x,\theta))/2} a_j(x,\theta)$.

Une section $\mathcal{A}$ de $\pi_*\mathcal{J}_{\Lambda,d}$ est dite de ρ-transmission si $\ell_\rho\mathcal{A} = \mathcal{A}$; une distribution $A \in I^{d+k}(X,\Lambda)$ est dite de ρ-transmission si la microfonction $\mathcal{A}$ définie par A est de ρ-transmission ; cette définition est voisine de la définition des intégrales oscillantes couplées donnée par Gärding ([6]). Rappelons quelques propriétés de ℓ_ρ :

(1) Soit P un opérateur différentiel dans X . Alors $P\ell_\rho = \ell_\rho P$.

(2) Soient Y une hypersurface (lisse) de X et γ l'opérateur de restriction à Y ; on sait que γ est un opérateur intégral de Fourier pour la relation canonique R de T_o^*X dans T^*Y définie par $R = \{(\mu,\lambda) \in T^*Y \times T_o^*X \mid \lambda \in T_o^*X_{|Y} , \mu = \pi\lambda\}$, où $\pi : T_o^*X_{|Y} \to T^*Y$ est la projection. Supposons vérifiées les hypothèses standard

de composition (cf. ([5])) pour $R \circ \Lambda$. Alors $\gamma \ell_\rho = \ell_{\rho_0}\gamma$, où $\rho_0 = (d + \frac{1}{4}, \omega_0)$ et où ω_0 est l'indice sur $R \circ \Lambda = \Lambda_0$ défini par la condition : $\omega_0(\pi\lambda) = \omega(\lambda)$ lorsque $\lambda \in \Lambda_{|Y}$ (on suppose que $\omega(\lambda)$ ne dépend pas du relèvement λ choisi pour $\pi\lambda$).

(3) Prenons en particulier $\Lambda = N_S$, où S est une hypersurface (lisse) de X et N_S son fibré conormal privé de la section nulle. Pour des coordonnées locales de X telles que $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$, appellons ω la valeur de $\omega(\lambda)$ correspondant à $\xi_n > 0$. En posant $\delta = d + n/4 - 1/2$ on vérifie que les distributions de ρ-transmission sont les distributions qui, modulo $C^\infty(X)$, s'écrivent localement

$f(x)Y(x_n) + g(x)D^\mu\delta(x_n)$ avec $f,g \in C^\infty$ et $\mu \in \mathbb{N}$ lorsque $\delta \in \mathbb{Z}$, $\omega + 2\delta = 0$

$f(x)x_{n\pm}^\mu$ avec $f \in C^\infty$, $\mu - \delta \in \mathbb{Z}$ lorsque $\delta \notin \mathbb{Z}$, $\pm\omega + 2\delta = 0$.

Il y a donc régularité C^∞ jusqu'au bord de part et d'autre de S dans le premier cas, et régularité C^∞ jusqu'au bord du côté $\pm x_n > 0$ de S dans le second cas. De telles propriétés de transmission sont par exemple vérifiées, du moins pour $t > 0$ petit, par la solution fondamentale directe d'un opérateur du type des ondes itéré à coefficients variables selon que la dimension d'espace est impaire ou paire.

§3. - PROPAGATION DE LA PROPRIETE DE TRANSMISSION

Soit P un opérateur differentiel dans X de degré M , à symbole principal réel p . On suppose que P est à caractéristiques réelles de multiplicité constante, c'est-à-dire que

$$p = \prod_{j=1}^{J} p_j^{r_j}$$

où les r_j sont des entiers positifs et les p_j des symboles réels de type principal tels que les variétés $p_j^{-1}(o)$ soient deux à deux disjointes. On définit le champ bicaractéristique H_p de p par $H_p = H_{p_j}$ sur $p_j^{-1}(o)$. On suppose que P vérifie la <u>condition de Lévi</u> (cf. ([1]), ([2])).

THEOREME 1. - <u>Soit Λ une sous-variété lagrangienne conique de T_0^*X contenue dans $p^{-1}(o)$. Soit au voisinage de $S\Lambda$ une microfonction $\mathcal{A}$ telle que $P\mathcal{A} = 0$. Alors, pour $m \in \mathbb{R}$,</u>

(4) | <u>l'ensemble des $\lambda \in \Lambda$ tels que $\mathcal{A}$ soit une section de $\mathcal{J}_\Lambda^m$ au voisinage de $\pi\lambda$ est invariant par H_p .</u>

<u>On suppose de plus Λ symétrique ; soit ω un indice sur Λ . Alors, pour $d \in \mathbb{R}$,</u>

(5) | <u>l'ensemble des $\lambda \in \Lambda$ tels que $\mathcal{A}$ soit une section de (d,ω)-transmission de $\pi_* \mathcal{J}_{\Lambda,d}$ au voisinage de $\pi\lambda$ est invariant par H_p .</u>

<u>Démonstration</u> : Soient $\lambda_0 \in \Lambda$ et V_0 un germe d'hypersurface conique de Λ

transverse en λ_o à H_p . Supposons $\lambda_o \in p_j^{-1}(o)$. Soit au voisinage de λ_o un symbole elliptique homogène de degré : 1 - degré p_j ; posons $q = ep_j$, et appelons ψ^s le flot de H_q . Soit $I =]-\varepsilon,\varepsilon[$ tel que $\overline{\psi} : (\lambda,s) \to \psi^s(\lambda)$ soit un difféomorphisme (homogène de degré 1 en λ) de $V_o \times I$ sur un voisinage (conique) V de λ_o dans Λ . Soit J un sous-intervalle ouvert de I , et soit $W = \overline{\psi}(V_o \times J) \subset V$.

(6) LEMME. - <u>Soit</u> $u \in \mathcal{J}_\Lambda^m(V)$. <u>Alors</u> $Pu \in \mathcal{J}_\Lambda^{m+M-r_j}(V)$, <u>et son symbole principal est de la forme</u> $\mathcal{L}\sigma$, <u>où</u> σ <u>est le symbole principal de</u> u <u>et</u> $\mathcal{L}$ <u>un opérateur différentiel linéaire ordinaire de degré</u> r_j <u>le long des bicaractéristiques de</u> p_j , <u>indépendant de</u> u .

Ce lemme se déduit de ([1]), ([2]) et du fait que $V \subset p_j^{-1}(o)$.

(7) LEMME. - <u>Soit</u> $u \in \mathcal{J}_\Lambda^m(W)$ <u>telle que</u> $Pu = 0$. <u>Alors</u> u <u>se prolonge d'une façon unique en</u> $\tilde{u} \in \mathcal{J}_\Lambda^m(V)$ <u>vérifiant</u> $P\tilde{u} = 0$.

En effet, soit $\sigma_o \in C^\infty(W, \Omega_{1/2} \otimes L)$ le symbole principal de u (σ_o est homogène de degré $m + n/4$). Le lemme (6) montre que $\mathcal{L}\sigma_o = 0$ dans W ; d'après les propriétés classiques des équations différentielles linéaires ordinaires, σ_o se prolonge en $\tilde{\sigma}_o \in C^\infty(V, \Omega_{1/2} \otimes L)$ homogène de degré $m + n/4$ tel que $\mathcal{L}\tilde{\sigma}_o = 0$ dans V . Soit $\tilde{u}_o \in \mathcal{J}_\Lambda^m(V)$ de symbole principal $\tilde{\sigma}_o$. On a $u - \tilde{u}_o \in \mathcal{J}_\Lambda^{m-1}(W)$ et $P\tilde{u}_o \in \mathcal{J}_\Lambda^{m'-1}(V)$ où $m' = m + M - r_j$; soit σ_1 le symbole principal de $u - \tilde{u}_o$; on a $\mathcal{L}\sigma_1 = f$ dans W , où $f \in C^\infty(V, \Omega_{1/2} \otimes L)$ est le symbole principal de $-P\tilde{u}_o$; σ_1 se prolonge en $\tilde{\sigma}_1 \in C^\infty(V, \Omega_{1/2} \otimes L)$ tel que $L\tilde{\sigma}_1 = f$ dans V ; on détermine ainsi de proche en proche des $u_k \in \mathcal{J}_\Lambda^{m-k}(V)$ de symbole principal $\tilde{\sigma}_k$ $(k \in \mathbb{N})$, et on prend $\tilde{u} \sim \sum_k \tilde{u}_k$. L'unicité de $\tilde{u}$ résulte du théorème de propagation de la régularité (cf. ([2]), th. 1.1).

Le lemme (7) et un argument de connexité impliquent (4).

Pour démontrer (5), considérons $\lambda \in \Lambda$ tel que $\mathcal{A}$ soit une section de (d,ω)-transmission de $\pi_* \mathcal{J}_{\Lambda,d}$ au voisinage de $\pi\lambda$. D'après (4), $\mathcal{A}$ est une section de $\pi_* \mathcal{J}_{\Lambda,d}$ dans $\pi\mathcal{V}$, où $\mathcal{V}$ est un voisinage conique symétrique de la bicaractérisation b issue de λ . Or, d'après (1), on a $P(\ell_\rho\mathcal{A}-\mathcal{A}) = \ell_\rho P\mathcal{A} - P\mathcal{A} = 0$; puisque $\ell_\rho\mathcal{A}-\mathcal{A}$ est nulle par hypothèse au voisinage de chaque point de $\pi\lambda$, le théorème de propagation de la régularité montre que $\ell_\rho\mathcal{A}-\mathcal{A}$ est nulle au voisinage de chaque point de πb .

REMARQUE 1. - Le théorème 1 se généralise immédiatement au cas où P est pseudo-différentiel (pour (4)) et où P est pseudo-différentiel de transmission (pour (5)).

§4. - REFLEXION DE LA PROPRIETE DE TRANSMISSION

On reprend l'opérateur différentiel P considéré au début du paragraphe précédent. Soient Y une hypersurface de X et $\mu_o = (y_o,\eta_o)$ un point de T_o^*Y . On suppose que Y est <u>non caractérisitque</u> pour P en y_o , et que $p^{-1}(o) \cap \pi^{-1}\mu_o$ est non vide

($\pi : T^*X_{|Y} \to T^*Y$ est la projection). On pose $p^{-1}(o) \cap \pi^{-1}\mu_o = \{\lambda_1,\dots,\lambda_k\}$ et on suppose que H_p est transverse à $T^*X_{|Y}$ en λ_j $(j = 1,\dots,k)$. Si j' est l'indice tel que $\lambda_j \in p_{j'}^{-1}(o)$, on pose $r_{j'} = s_j$.

Le théorème 2 ci-dessous est, comme le théorème 1, composé de deux parties : l'une décrit la réflexion de la propriété, pour une distribution, d'être de Fourier ; l'autre d'écrit la réflexion de la propriété de transmission. Il sera sous-entendu que toutes les variétés lagrangiennes sont coniques pour la première partie, et de plus symétriques pour la seconde.

Soit Λ_o un germe en μ_o de sous-variété lagrangienne de T_o^*Y ; on appelle C la relation bicaractérisitque de P , et R la relation canonique correspondant à l'opérateur γ de restriction à Y (cf. (2)). Soit Λ_j $(j = 1,\dots,k)$ le germe en λ_j de $C \circ R^{-1} \circ \Lambda_o$, et définissons la sous-variété lagrangienne Λ de T_o^*X par $\Lambda = \bigcup_{j=1}^{k} \Lambda_j$. Notons que $R \circ \Lambda = \Lambda_o$; si ω_o est un indice sur Λ_o , on définit l'indice ω sur Λ par $\omega(\lambda) = \omega_o(\pi\lambda)$ pour $\lambda \in \Lambda_{|Y}$.

Soient $\tilde{G}$ un voisinage de y_o dans X , et G son intersection avec un des demi-espaces ouverts délimités par Y dans X .

Soit $A \in \mathcal{D}'(G)$ prolongeable à $\tilde{G}$ et telle que $PA \in C^\infty(\tilde{G})$. Fixons un champ ν sur X transverse à Y , et appelons $\gamma_j A = \gamma(\nu^j A)$ la $j^{\text{ième}}$ trace de A sur $\tilde{G}_o = \tilde{G} \cap Y$. On désigne par $\mathcal{A}$ la microfonction définie par A .

THEOREME 2. - <u>Soit</u> $k_o \in \{0,\dots,k\}$. <u>On suppose que</u> $WFA \subset \Lambda_{|G}$.

<u>On suppose que</u> $\mathcal{A}$ <u>est une section de</u> $\mathcal{J}_\Lambda^m$ <u>au voisinage de chaque point de</u> $S\Lambda_{j|G}$ <u>pour</u> $1 \leqslant j \leqslant k_o$, <u>et que</u> $\gamma_j A \in C^\infty(G_o)$ <u>pour</u> $0 \leqslant j \leqslant m_2 + m'/2 - 1$, <u>où on a posé</u> $m_1 = s_1 + \dots + s_{k_o}$, $m_2 = s_{k_o+1} + \dots + s_k$, $m' = M - m_1 - m_2$. <u>Alors</u>

(8) $\mathcal{A}$ <u>est une section de</u> $\mathcal{J}_\Lambda^{m+s_j-1}$ <u>au voisinage de chaque point de</u> $S\Lambda_{j|G}$ <u>pour</u> $k_o + 1 \leqslant j \leqslant k$.

<u>On suppose de plus</u> $m' = 0$ <u>et que</u> $\mathcal{A}$ <u>est de</u> (d,ω)<u>-transmission au voisinage de chaque point de</u> $S\Lambda_{j|G}$ <u>pour</u> $1 \leqslant j \leqslant k_o$. <u>Alors</u>

(9) $\mathcal{A}$ <u>est de</u> (d,ω)<u>-transmission au voisinage de chaque point de</u> $S\Lambda_{j|G}$ <u>pour</u> $k_o + 1 \leqslant j \leqslant k$.

<u>Démonstration</u> : On peut supposer $Y = \{x = (t,y) \in \mathbb{R}^n \mid t = 0\}$, $G = \{t > 0\}$, $\nu = \frac{\partial}{\partial t}$. Par hypothèse, pour (t,y,η) dans un voisinage conique symétrique de (o,y_o,η_o) , on a

$$p(t,y,\tau,\eta) = \prod_{j=1}^{k} (\tau - v_j(t,y,\eta))^{s_j} q(t,y,\tau,\eta) ,$$

où q est un polynôme en τ de degré m' sans zéro réel, et où

(10) les $v_j(t,y,\eta)$ sont réels, deux à deux distincts, homogènes de degré 1 en η .

Prolongeons les v_j à $\mathbb{R} \times T_o^* Y$ en conservant (10). On sait (cf. ([10]), ([4])) qu'on peut factoriser P en

(11) $$P = H_1 Q H_2 + R$$

où H_1, H_2, Q, R sont des opérateurs pseudo-différentiels de degrés m_1, m_2, m', m différentiels en t, H_1 ayant pour symbole principal

$$\prod_{j=1}^{k_o} (\tau - v_j(t,y,\eta))^{s_j} ,$$

H_2 ayant pour symbole principal

$$\prod_{j=k_o+1}^{k} (\tau - v_j(t,y,\eta))^{s_j} ,$$

H_1 et H_2 vérifiant encore la condition de Lévi, où le reste R est de la forme

(12) $$\sum_{j=o}^{M-1} R_j(t,y,D_y) D_t^j ,$$

le symbole complet de R_j étant d'ordre $-\infty$ dans un voisinage conique symétrique Γ de (o,y_o,η_o) et où Q est elliptique dans $\Gamma \times \mathbb{R}$.

Posons

$$\Lambda^1 = \bigcup_{j=1}^{k_o} \Lambda_j , \quad \Lambda^2 = \bigcup_{j=k_o+1}^{k} \Lambda_j , \quad PA = f , \text{ et}$$

(13) $$B = QH_2A .$$

On a donc, d'après (11), $H_1 B = f - RA$. Posons $g_j = (D_t^j B)_{|\,t=T}$ où $T > 0$ est choisi assez petit. Par existence et unicité de la solution du problème de Cauchy pour H_1 (avec données initiales pour $t = T$) (cf. ([1])), on a $B = B' + B''$, où B' est la solution de $H_1 B' = 0$, $(D_t^j B')_{|\,t=T} = g_j$ $(j = 0,\ldots,m_1-1)$ et où B'' est la solution de $H_1 B'' = f - RA$, $(D_t^j B'')_{|\,t=T} = 0$ $(j = 0,\ldots,m_1-1)$. D'après (12) et ([4]) on sait que B'' est <u>régulière en</u> μ_o, en ce sens que $a(y,D_y)B'' \in C^\infty$ lorsque le symbole complet de $a(y,D_y)$ est à support dans un voisinage conique assez petit de (y_o,η_o) ou de $(y_o,-\eta_o)$.

On en déduit que la microfonction $\mathcal{B}''$ définie par B'' est nulle dans un voisinage conique symétrique V de $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_k\}$, et donc que $\mathcal{B}' \in \mathcal{J}^{m+m'+m_2}(S\Lambda^1_{|G} \cap V)$ (cf. (13)).

Puisque $H_1 B' = 0$, le théorème 1 de propagation montre qu'on peut encore décomposer B en

(14) $$B = B' + B'' , \text{ avec } B' \in I^{m+m'+m_2}(\tilde{G},\Lambda) , \quad B'' \text{ régulière en } \mu_o .$$

Posons maintenant

(15) $$H_2 A = C .$$

D'après (13), (14) et l'hypothèse sur les traces de A (on appelle que degré $H_2 = m_2$) on obtient

$$\begin{cases} QC = B' + B'' \\ \gamma_j C \in C^\infty \text{ pour } 0 \leq j \leq m'/2 - 1 . \end{cases}$$

Soit E une paramètrix microlocale de Q (on rappelle que Q est elliptique dans $\Gamma \times \mathbb{R}$). Posons $C - (EB')_{|G} = D$; alors

$$\begin{cases} QD \text{ est régulière en } \mu_o \\ \gamma_j D \in I^{m+m2+j+1/4}(G_o, \Lambda_o) \text{ pour } 0 \leq j \leq m'/2 - 1 . \end{cases}$$

D'après la théorie (microlocale) du projecteur de Caldéron, on en déduit que la microfonction définie par $\gamma_j D$, et donc aussi la microfonction définie par $\gamma_j C$ est, pour tout $j \in \mathbb{N}$, une section de $\mathcal{J}_{\Lambda_o}^{m+m2+j+1/4}$ au voisinage de $\pi\mu_o$. En calculant de proche en proche les traces de A à l'aide de l'équation (15) (on rappelle que $\gamma_j A \in C^\infty$ pour $0 \leq j \leq m_2 - 1$) on obtient alors que

(16) | la microfonction définie par $\gamma_j A$ est, <u>pour tout</u> $j \in \mathbb{N}$, une section de $\mathcal{J}_{\Lambda_o}^{m+j+1/4}$ au voisinage de $\pi\mu_o$.

En considérant une factorisation analogue à (11) :

$$\tilde{P} = \tilde{H}\tilde{Q} + \tilde{R} \quad (\text{degré } \tilde{H} = m_1 + m_2 \text{ , degré } \tilde{Q} = m')$$

et en posant

$$\tilde{Q}A = U \tag{17}$$

il vient $\begin{cases} \tilde{H}\tilde{U} = f - \tilde{R}A \\ \gamma_j U = \tilde{g}_j' + \tilde{g}_j'' \quad (0 \leq j \leq m_1 + m_2 - 1) \end{cases}$

où, d'après (16), $\tilde{g}_j' \in I^{m+m'+j+1/4}(G_o, \Lambda_o)$, $\tilde{g}_j''$ régulière en μ_o .

On sait (cf. (¹), (²)) que la solution U de ce problème de Cauchy est, modulo une distribution régulière en μ_o , de la forme

$$\sum_{j=1}^{k} U_j \text{ , avec } U_j \in I^{m+m'+sj-1}(\tilde{G}, \Lambda_j) .$$

D'où (8) grâce à (17) puisque $\tilde{Q}$ est elliptique de degré m' dans $\Gamma \times \mathbb{R}$.

Plaçons-nous enfin sous les hypothèses de (9). Puisque $m' = 0$, on peut prendre $\tilde{Q} = I$, $U = A$ dans le raisonnement précédent, qui montre alors que $A = A'_{|G} + A''$, où $\mathcal{A}'$ est une section de $\pi_* \mathcal{J}_{\Lambda,d}$ et où A'' est régulière en μ_o .

En posant $\rho = (d,\omega)$, on définit naturellement (modulo $C^\infty(\tilde{G})$) la distribution $\ell_\rho A'$ à partir de la microfonction $\ell_\rho \mathcal{A}'$. On a (cf. (1), (2))

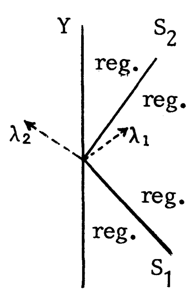
$$\begin{cases} P(\ell_\rho A' - A') \equiv \ell_\rho PA' - PA' \text{ régulière en } \mu_o \\ \gamma_j(\ell_\rho A' - A') \equiv \ell_{\rho_o}\gamma_j A' - \gamma_j A' \text{ régulière en } \mu_o \text{ pour } 0 \leqslant j \leqslant m_2 - 1 \,. \end{cases}$$

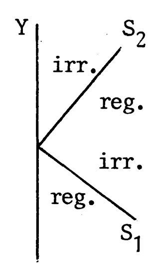
Or, par hypothèse, $WF(\ell_\rho A' - A')$ ne rencontre pas $\Lambda^1_{|G} \cap (\Gamma \times \mathbb{R})$, où Γ est un voisinage conique symétrique de (o, y_o, η_o). Le théorème de réflexion de la régularité (cf. ([4])) montre alors que $\ell_\rho A' - A'$ est régulière en μ_o, ce qui implique (9).

REMARQUE. - On peut étendre le théorème 2 au cas des conditions au bord plus générales considérées par Majda, Osher ([9]) et, sous l'hypothèse des caractéristiques réelles simples, au cas des systèmes considérés par Taylor ([12]). La généralisation du résultat (9) concernant la réflexion de la propriété de transmission au cas $m' > 0$ n'est pas évidente puisque les opérateurs pseudo-différentiels sur Y intervenant dans le projecteur de Caldéron ne conservent pas la transmission.

EXEMPLE. - Soit S_1 un germe en $y_o \in Y$ d'hypersurface de X tel que $N_{S_1} \subset p^{-1}(o)$.

On suppose H_p transverse à $T^*X_{|Y}$ en $\lambda_1 = (y_o, \xi_1) \in N_{S_1}$; soit $\mu_o = \pi\lambda_1$; on suppose $k = 2$ et H_p transverse à $T^*X_{|Y}$ en λ_2. On prend $\Lambda_o = R \circ N_{S_1}$; on vérifie que $\Lambda_o = N_{S_o}$, où S_o est une hypersurface de Y, et que $\Lambda = N_{S_1} \cup N_{S_2}$ où S_2 est un germe en y_o d'hypersurface de X. Si ω_1 est un indice sur $\Lambda_1 = N_{S_1}$, on définit l'indice ω_o sur N_{S_o} et l'indice ω_2 sur $\Lambda_2 = N_{S_2}$ par $\omega_1(\lambda_1) = \omega_o(\mu_o) = \omega_2(\lambda_2)$; ω est alors l'indice sur Λ défini par $\omega = \omega_j$ sur Λ_j $(j = 1,2)$. Quand on applique le théorème 2 dans ce cas pour $k_o = 1$ lorsque (d,ω) est d'un type (4) sur N_{S_1}, on obtient les réflexions de comportement au bord schématisées ci-dessous :





Ceci s'applique en particulier, grâce au théorème 1 de propagation, à la première réflexion dans l'exemple considéré dans l'introduction (avec $S_1 = S$).

BIBLIOGRAPHIE

(1) CHAZARAIN, Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante, Ann. Inst. Fourier 24 (1974), p. 173-202.

(2) CHAZARAIN, Propagation des singularités pour une classe d'opérateurs à caractéristiques multiples et résolubilité locale, Ann. Inst. Fourier 24 (1974), p. 203-223.

(3) CHAZARAIN, Paramètrix du problème mixte pour l'équation des ondes à l'intérieur d'un domaine convexe pour les bicaractéristiques, Soc. Math. France, Astérisque 34-35 (1976), p.165-181.

(4) CHAZARAIN, Reflexion of C^∞ singularities for a class of operators with multiple characteristics, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ. 12 supplement (1977), p. 39-52.

(5) DUISTERMAAT, Fourier integral operators, Courant Institute of Math. Sc., New-York University, (1973).

(6) GÅRDING, Sharp Front of Paired oscillatory integrals, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ. 12 supplement (1977), p. 53-68.

(7) HIRSCHOWITZ, PIRIOU, La propriété de transmission pour les distributions de Fourier ; applications aux lacunes, Séminaire Goulaouic-Schwartz (1976-77), exposé n° 14.

(8) HIRSCHOWITZ, PIRIOU, La propriété de transmission pour les distributions intégrales de Fourier, (à paraître).

(9) MAJDA, OSHER, Reflection of singularities at the boundary, comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), p. 479-499.

(10) NIRENBERG, Lectures on linear partial differential equations, Regional Conf. series in Math. n° 17, A. M. S. (1973).

(11) POUZNER, SUKHARREVSKII, Discontinuities of the Green's fonction of a mixed problem for a mixed problem for the wave equation, Mat. Sb. 51 (1960), p. 3-26, Amer. Math. Soc. Transl., ser. 2, 47 (1965), p. 131-156.

(12) TAYLOR, Reflection of singularities of solutions to systems of differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), p. 457-478.

Université de Nice
INSTITUT DE MATHEMATIQUES ET SCIENCES PHYSIQUES
Parc Valrose - 06034 NICE CEDEX